

〈論 文〉

채터상황에서 마모된 공구가 받는 절삭력 해석

권 원 태*

(1993년 7월 29일 접수)

Cutting Force Analysis under Chatter Condition with a Worn Tool

Won-Tae Kwon

Key Words : Chatter(채터), Shear Line Method(전단선 해석방법), Workmaterial Removal Force(칩 제거력), Elastic Effect of the Workpiece(공작물의 탄성효과), Orthogonal Cutting(직교절삭)

Abstract

The resultant cutting force during machining with a worn tool is viewed as a decomposition of the cutting force into a cutting force component related to chip removal from the workpiece and into a component dependent on the contact force between the tool flank's wear land and the workpiece. The shear line method, in which the cutting force is considered proportional to the length of the shear line, is used to calculate the cutting force component for the removal of the chip, while the elastic effect of the workmaterial on the tool is taken into consideration to analyze the effect of tool flank wear. The predicted resultant cutting force, expressed as the sum of both components, is compared to experimental data obtained during wave-on-wave cutting.

1. 머리말

이 논문에서는 마모가 생긴 공구로 공작물을 가공하다가 일어난 채터(chatter)상황에서의 동절삭력에 대하여 연구하였다. 이 상황에서 절삭력은 크게 두가지로 나뉘는데 첫번째는 칩을 제거하는 데 필요한 칩 제거력이요, 두번째는 마모된 플랭크면에 작용하는 공구-공작물사이의 마찰력이다. 여기서 칩 제거력은 그 힘이 전단선의 길이에 비례함을 이용하여 계산하였고, 공구-공작물사이의 마찰력은 공구에 작용하는 공작물의 탄성력을 고려하여 계산하였다. 칩 제거력은 공작물이 전단변형과 소성변형을 일으켜 칩으로 깎여 나가는 근원이 된다.⁽¹⁴⁾ 많은 논문들^(2,4,8,11,12)에서 칩 제거력은 비절삭 두

께에 비례한다는 가정하에 그 크기를 계산하였다. 이렇게 계산된 칩 제거력은 실제 측정치와 위상차가 생기므로, 절삭속도에 비례하는 또 다른 힘을 더함으로써 이를 보정하였다. 본 논문에서는 Fig. 1에서 볼 수 있듯이 칩 제거력은 전단선의 길이에 비례한다는 전단선방법을 이용하여 그 크기를 구하였다. 원칙적으로 칩 제거력은 전단면의 면적에 비례하나 이 논문에서는 절삭폭을 항상 일정하게 하였으므로 전단선의 길이만을 고려하였다. 이 이론은 매우 잘 개발되어 있음에도 불구하고 이 방법보다는 비절삭 칩 두께가 칩제거력에 비례한다는 이론을 기존 논문들^(3,4,11)에서 선호하였는데 그 주된 이유는 후자가 계산하기 편하기 때문이다. 하지만 전단선방법으로 절삭력을 계산하면 계산은 복잡해지나 위상차 문제는 발생하지 않는다는 것점이 있다.

*정회원, 서울대학교 정밀기계설계공동연구소

Wave-on-wave 가공중 공구의 플랭크면에 작용

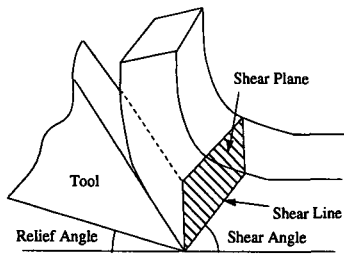


Fig. 1 Chip formation mechanism

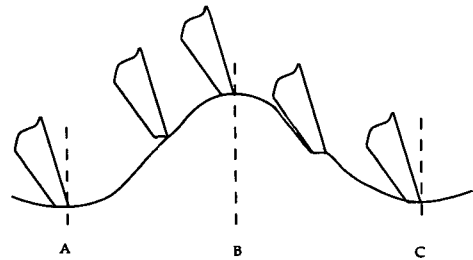


Fig. 2 Wavy cutting with a worn tool

하는 마찰력에 의한 총 절삭력의 변화를 계산하기 위해 공작물의 공구에 대한 탄성효과를 고려하였다. 새 공구로 가공할 때 공구팁의 round에 의한 탄성력을 이전에 고려한 바 있지만⁽¹³⁾ 공구의 플랭크면이 공작물로부터 받는 탄성력에 대하여서는 연구되어진 바 없다. 또한 공구팁에 작용하는 탄성력의 계산을 위해 경험적으로 얻어진 상수가 이용된 상수가 이용된 반면, 이 논문에서는 공작물의 물성에 관계된 상수를 이용하여 해석학적으로 얻어진 식으로부터 공구의 플랭크면에 작용하는 탄성력을 구하였다.

2. 마모된 공구로 행한 직교절삭의 해석

Wave-on-wave 절삭을 좀 더 간단하고 고립된 형태로 해석하기 위하여, 직교절삭(othogonal cutting) 실험을 행하였다. 마모된 공구로 행하여진 절삭에서의 총 절삭력은 다음과 같다.

$$F_{cr} = F_c + Q_c \tag{1a}$$

$$F_{tr} = F_t + Q_t \tag{1b}$$

여기서,

F_{cr} : 총 절삭력

F_{tr} : 총 추력(thrust force)

F_c : 칩형성 및 제거를 위한 절삭력

F_t : 칩형성 및 제거를 위한 추력

Q_c : 플랭크면에서 공구 공작물 상호작용에 의한 절삭력방향 힘

Q_t : 플랭크면에서 공구공작물 상호작용에 의한 추력방향 힘

Wave-on-wave 절삭중에 이 두개의 힘을 합성하여 총 절삭력을 계산할 수 있다. 절삭중 일어나는 물리적인 현상(physical mechanism)은 절삭으로 생겨난 물결모양의 표면에 대한 공구의 위치에 따라

달라지는 데 그것은 다음과 같다.

(a) 처음 것은 Fig. 2의 A점에서 B점으로 가는 상향절삭이다. 상향절삭(uphill cutting) 동안은 단지 공작물의 절삭에 의한 절삭력만이 작용한다. 상향절삭동안 마모된 공구와 새 공구의 차이는 마모된 공구에서의 플랭크 마모면의 효과때문에 여유각이 달라진다는 것이다. 여유각이 0도가 되어 전체 절삭역학 자체가 바뀌기 때문에, 전단각(shear angle)이 바뀌고 그로 인하여 총 절삭력이 바뀌게 된다.⁽¹³⁾ 그러나 여유각의 변화로 생기는 절삭력 크기의 변화는 매우 작고, 게다가 3절에서 볼 수 있듯이 절삭력 자체가 전단각의 적은 변화에 별로 민감하지 않기 때문에 구간 A와 B에서는 전단각을 고정하여 절삭면의 크기를 계산한 뒤 그에 비례하는 절삭력을 구하였다.

(b) 두번째 구간은 Fig. 2의 BC구간에서 보여지는 하향절삭이다. 이 경우 두개의 힘이 이 메카니즘에 관련되어 있는데 첫번째는 칩 제거를 위한 칩 제거력이요 두번째는 플랭크 마모면과 공작물 사이의 마찰력에 기인하는 힘이다. 여기서 칩 제거력은 상향절삭에서와 마찬가지로 전단각이 일정하다는 가정하에 절삭면의 면적을 구한 뒤, 그 면적에 비례하는 힘으로 계산하였고, 마찰력은 공구의 플랭크 마모면에 작용하는 공작물의 탄성력을 고려하여 계산하였다.

2.1 칩 제거력

절삭가공 중 채터가 일어날 경우에 전단선의 길이를 구하고 그로부터 칩 제거력을 구하는 방법은 참고문헌⁽¹⁰⁾에 주어져 있다. 일단 전단선의 길이가 결정이 되면 칩 제거력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_c = k_c l_s w \tag{2a}$$

$$F_t = k_t F_c \quad (2b)$$

여기서,

- l_s : 전단선 길이
- w : 절삭넓이
- k_c : 절삭강성
- k_t : 비례상수

2.2 플랭크 마모면에서의 힘

Wave-on-wave 가공중 플랭크 마모면에 작용하는 힘은 Fig. 2에서 구간 B와 C 사이의 하강절삭(downhill cutting)시 발생한다. 이 힘은 공구와 공작물사이의 탄성효과 때문에 발생하는데 이 힘을 계산하기 위해 다음과 같이 몇개의 가정을 세웠다.

(1) 공구는 공작물에 비하여 매우 단단하기 때문에 가공중 공작물과의 접촉에 의한 탄성변형을 무시할 수 있다. 이것은 공구의 강성이 공작물의 강성 보다 최소한 3배 이상 단단해야 한다는 것을 고려하면 받아들일 수 있는 가정이다.⁽¹⁾

(2) 공구의 플랭크 마모면의 길이가 채터의 진폭에 비해 작기 때문에 마모면을 제외한 여유면과 공작물의 접촉은 일어나지 않는다.

(3) 플랭크 마모면과 공작물은 서로 접촉하여 그 사이에 틈새가 없다.

위와 같은 가정하에서 Fig. 3에서 보여진 하강절삭(down-hill cutting)문제를 Fig.(A.3)에 보여진 바와 같이 탄성적인 공작물에 이상적으로 강성이 높은 공구가 모멘트를 전달하는 문제로 바꿀 수 있다. 즉 공구와 공작물 사이의 접촉문제를 공구에 주어진 모멘트(M)와 공구의 플랭크 마모량의 길이($2c$) 그리고 매 순간의 절삭위치에서 공구가 공작물과 이루는 각(α)의 관계를 공구나 공작물의 물성과 연관지어 알아내는 문제로 바꿀 수 있다. 플랭크 마모면과 공작물의 경사와의 각도는 공구가 하강 절삭을 할 때 그 위치에 따라 변한다. 그때의 모멘트는 경사면의 각도와 플랭크 마모면의 길

이 그리고 공작물의 물성의 함수이다. 하지만 불행하게도 모멘트는 측정할 수 없는 양이므로, 그에 해당하는 편심력(an equivalent eccentric force)을 구하는 것이 합당하다. 일단 편심량을 알면 편심력 P 와 모멘트 M 의 관계는 $P=M/\zeta$ 로 계산할 수 있다. 그런데 참고문헌(1)에서 편심력의 편심량은 플랭크 마모면의 약 1/5~1/2부분에 존재하는 것으로 알려져 있으므로 공작물의 탄성력에 의한 모멘트를 먼저 계산하면 편심력 P 또한 계산할 수 있다. 결과적으로 편심량(ζ)을 알고 있다는 가정하에 공작물의 탄성력에 의해 공구에 전달되는 편심력이 경사면의 경사각(α)과 플랭크 마모면의 길이($2c$) 그리고 공작물의 물성의 함수로 구할 수 있다. 이 관계를 구하는 계산식은 부록에 주어졌는데 결론적으로 탄성력에 의한 주절삭력(Q_c) 방향과 트러스트 방향의 힘(Q_t)은 다음과 같다.

$$Q_c = G_c \tan(\alpha) w \quad (3a)$$

$$Q_t = P \cdot w \quad (3b)$$

여기서, $G_c = \mu \frac{5\pi\mu_1}{\chi_1 + 1}$

$$P : \frac{5\pi\mu_1 c}{\chi_1 + 1} \tan(\alpha)$$

μ : 공구-공작물간의 마찰계수

χ_1 : 공작물의 Muskelishibili상수

μ_1 : 공작물의 전단상수(shear modulus)

3. 실험에 의한 증명

실험은 크게 세가지를 실행하였는데 첫번째 실험은 전단선의 절삭강성을 구하기 위한 실험이요, 두번째는 마모가 없는 새 공구로 절삭하면서 측정된 절삭력과 계산된 절삭력을 비교하기 위한 것이요, 세번째는 인공적으로 만든 마모가 있는 공구에 의한 실험이다.

3.1 실험장치

본 논문에서는 특별히 설계된 test-rig을 사용함으로써 이송방향으로의 1 자유도계(degree of freedom)시스템으로 전체 시스템을 간략화하였다. 새 공구를 이용한 절삭가공중 절삭력과 공구의 위치에 대한 데이터를 얻기 위한 실험장치 구성도가 Fig. 4에 주어졌고 있다. 공구와 공작물사이의 상대위치는 Proximeter로 측정하였고 절삭력은 공구동력계로

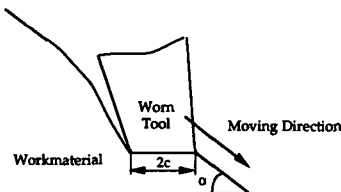


Fig. 3 A tool and workpiece problem

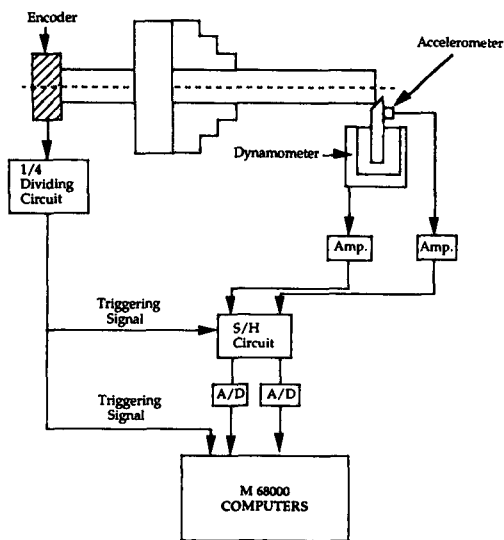


Fig. 4 Experimental set-up

측정하였다. 공구-공작물의 상대위치와 절삭력은 주축대 끝에 달린 엔코더에서 펄스를 보낼때 마다 샘플링함으로써 항상 일정한 위치에서 측정하도록 하였다. 한 회전이나 두회전 또는 뒤로 지연하여 얻었다. 측정된 절삭력과 위치를 기록하기 위해 자료습득장치(data acquisition system)를 사용하였다. 이 실험장치를 이용하여 여러가지 절삭조건하에서 공구-공작물간의 상태위치와 절삭력을 얻기위한 실험들을 행하였다. 얻어진 상대위치는 새 공구와 마모된 공구로 가공시 발생하는 절삭력을 예측하는데 사용하였다. 실험에 사용된 공작물은 50 mm직경과 3mm두께를 가진 1008강관이고, 공구는 0도의 경사각과 11도의 여유각을 가진 KC 810이다.

3.2 실험결과

3.2.1 전단각과 절삭강성의 결정

계산식으로 절삭력을 예측할 경우 전단각의 크기가 해에 커다란 영향을 미치므로 정절삭 실험에서 절삭전후의 칩의 두께비를 측정하여 전단각을 구하였다.⁽⁵⁾

이 실험결과 결정된 전단각은 30도이나 시뮬레이션에서 난각을 30도 내외에서 조금씩 변화시키면서 절삭력을 예측한 결과 동절삭력은 약간의 전단각의 변화(2도내외)에는 거의 변하지 않음이 관측되어

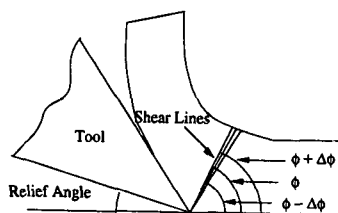


Fig. 5 Effect of shear line variation

절삭력 예측을 위한 모든 시뮬레이션에서 전단각은 30도로 고정하였다. 전단각을 30도로 고정시켜 놓고 측정된 공구-공작물의 상대위치로부터 공구의 궤적을 재현하고 30도의 각도를 갖는 전단선과 공구의 궤적간의 만나는 점을 구한 뒤 그 점과 공구 팁과의 거리로 전단선의 길이를 구하게 된다. (Fig. 5) 이렇게 전단선의 길이가 구한 뒤 절삭력을 절삭력을 전단선의 길이로 나눔으로써 절삭강성을 구할 수 있게 된다.

실험결과 절단폭이 3 mm일 때 절삭강성은 약 $8.756 \cdot 10^{10}$ Newton/m로 구해졌다. 이때 절삭폭은 모든 실험에서 일정하게 유지되므로 고려하지 않는다.

3.2.2 새 공구로 절삭가공시 해석

새 공구를 공구대에 설치하여 절삭을 실행하면서 이송방향과 절삭방향으로의 공구와 공작물의 상대위치를 측정하였다. 이렇게 측정된 위치로부터 공구의 궤적을 재현하였고 전단선의 각도를 30도로 고정함으로써 전단선의 길이도 구하였다. 이렇게 구해진 전단선의 길이에 앞절에서 얻어진 절삭강성을 곱함으로써 절삭력을 구하였고 이렇게 계산된 절삭력을 실제 측정된 절삭력과 비교한 것을 Fig. 6에 보였다. 이 그림에서 점선은 예측된 절삭력이고 실선은 측정된 절삭력이다. 이 그림에서 볼 수 있듯이 예측된 절삭력과 측정된 절삭력이 매우 유사한 값을 갖는데 이로써 새 공구로 절삭시 전단선 길이로 절삭력을 예측하는 방법이 타당함을 알 수 있다. Fig. 6에서 두 절삭력 정점사이에 절삭력이 0으로 나타나는 데 이것은 그 부분에서 공구와 공작물이 순간적으로 분리됨을 암시한다. 하지만 이 논문에서는 하강절삭시 언제나 공구나 공작물과 접촉하고 있음을 전제로 절삭력을 예측하고 있으므로 공구와 공작물이 항상 접촉하고 있는 절삭조건을 찾아 다시 실험을 행하였다. 그때 측정된 절삭력과

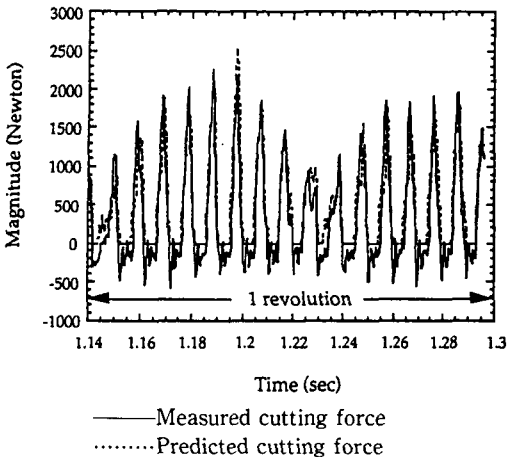


Fig. 6 Comparison of the predicted and measured force with a new tool under 382 rpm and 0.0254 mm/rev. feed rate

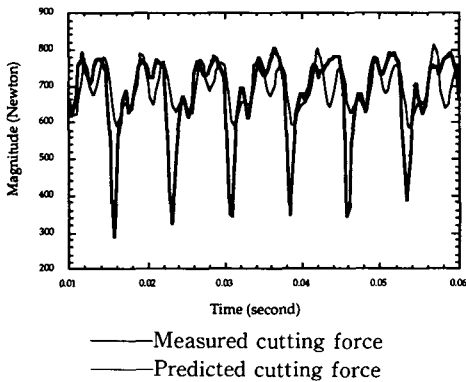


Fig. 7 Comparison of the predicted and measured force with a new tool under 390 rpm and 0.0787 /rev. feed rate

예측된 절삭력을 Fig. 7에 나타내었는데 이 실험에서는 절삭력이 항상 0보다 크므로 공구와 공작물이 계속해서 접촉하고 있음을 알 수 있다. 이러한 사실은 실험도중 항상 연속형 칩(continuous chip)이 만들어지는 사실로도 확인 할 수 있었다.

3.2.3 마모된 공구로 절삭가공시 해석

이 실험에서는 인공적으로 마모된 공구를 사용하였고, 마모된 플랭크 양은 현미경으로 측정하였다. 마모된 공구로 절삭가공시 절삭력은 공작물을 깎아내기 위한 칩 제거력과 공작물의 탄성력에 의한 마찰력의 합으로 나타나는데 이렇게 계산된 절삭력과

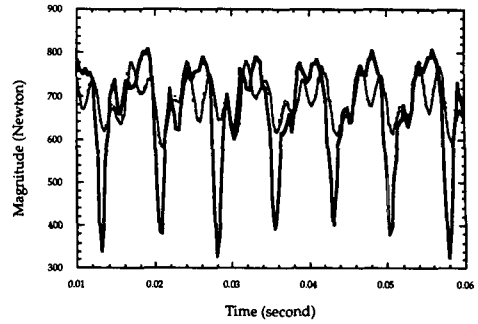


Fig. 8 Comparison of the predicted and measured force with 0.1 mm worn tool under 390 rpm and 0.087 mm/rev. feed rate

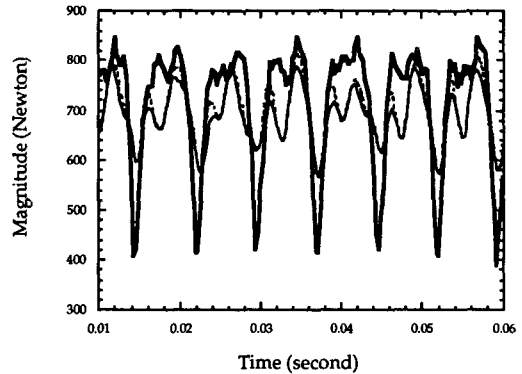
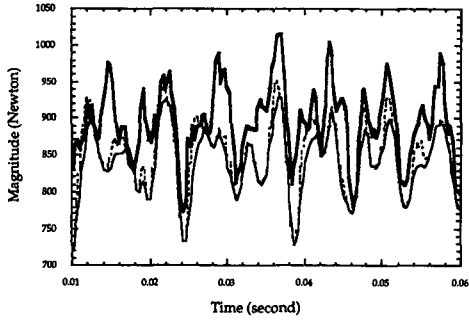


Fig. 9 Comparison of the predicted and measured force with 0.2 mm worn tool under 390 rpm and 0.0787 mm/rev. feed rate

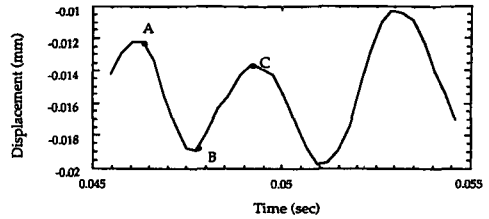
실험에서 얻어진 측정치를 서로 비교하였다. 공작물의 탄성력을 고려함으로써 절삭력의 계산치가 실제 측정치에 좀 더 가깝게 됨을 보여주기 위해 0.0787 mm/rev 이송량 390 RPM 속도의 절삭조건 아래서 실험을 하였다. 실험중 공구공작물의 상대 거리와 그때의 절삭력을 측정하였다. 단지 전단선의 길이만으로 절삭력을 계산한 경우와 이 논문에서 제시된 방법으로 계산한 경우를 Fig. 8, 9, 10, 그리고 11에 보였다. 칩 제거력은 측정된 공구와



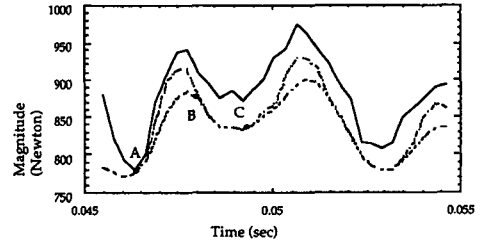
— Measured force
 - - - Predicted force by shear line method
 Predicted force by considering the elastic effect on the tool wear land

Fig. 10 Comparison of the predicted and measured force with 0.3 mm worn tool under 390 rpm and 0.0787 mm/rev. Feed rate

공작물의 상대거리를 이용, 식(2)에서 계산하였고 탄성력은 식(3)을 이용하여 구하였다. 이 두 힘을 더하여 마모된 공구로 wave-on-wave 절삭중의 총 절삭력을 계산하였다. 이 실험에서는 열간처리연강을 사용하였는데 이때의 전단강성의 값은 7.143×10^{10} Newton/m (5180 Tons/in)이다. 공작물에서는 평면 변형률 (plain strain)을 가정하였는데 이때 λ 값은 $3-4\nu$ 이고 ν 는 Poisson계수로써 0.281이다. Fig. 8에서 11까지는 같은 절삭조건하에서 공구마모량만 바뀌가며 실험을 행하였다. Fig. 8에서 탄성력을 더하였음에도 불구하고 계산된 절삭력에는 별다른 변화가 없는데 그 이유는 공구의 마모량이 작기 때문이다. 그러나 마모량이 증가함에 따라 탄성력이 커지고 그에 따라 탄성력이 전체 계산된 절삭력에 차지하는 비율도 커진다. 이렇게 커진 절삭력은 계산된 총 절삭력이 실제 측정된 절삭력에 접근하게 하는 역할을 하게 된다. 이러한 현상은 특히 Fig. 11에 잘 나타나 있다. Fig. 11(a)와 (b)를 비교해 보면 공구가 하강절삭을 할 때 (Fig. 11(a)의 A점에서 B점으로) 탄성력이 더해짐을 알 수 있다. 이와 같이 공구가 하강절삭을 할 때 탄성력을 더하고 이렇게 더한 탄성력이 계산된 총 절삭력을 실제 측정치에 가깝게 만드는 것을 볼 때 주어진 모델이 합당함을 알 수 있다. 비록 탄성력이 총 절삭력의 양을 실제 측정절삭력에 가깝게 만들었지만 아직도 두 값은 어느정도 차이가 있는데 그 이유는 전단각의 과도한 변화, 마모된 공구의 기하학



(a) Workpiece undulation



— Measured force
 - - - Predicted force by shear line method
 Predicted force by considering the elastic effect on the tool wear land

(b) Comparison of the predicted and measured force with a 0.3 mm worn tool

Fig. 11 The relationship between force variation and workpiece undulation

적인 형태변화(마모면이 평면이 아닌 형태)와 공구 플랭크면에서는 공작물의 소성효과(plastic effect) 등이 될 수 있다.

4. 맺음말

마모된 공구로 Wave-on-wave 절삭중 절삭력을 계산하는 새로운 모델을 개발하였고 실험으로 증명하였다. 이 논문의 주요결과는 다음과 같다.

(1) 칩 제거력을 구하기 위해 칩 제거력이 전단선의 길이에 비례한다면 가정을 이용하였고, 그 타당성을 새 공구로 wave-on-wave 절삭시에 측정치와 계산치를 비교함으로써 증명하였다.

(2) 공작물에 의한 플랭크 마모면에서의 탄성력을 공작물의 물성을 이용하여 해석학적으로 구하였다.

(3) 새로 제시된 모델의 타당성을 공구로 wave-on-wave 절삭을 하는 동안 절삭력을 측정하여 계산치와 비교함으로써 증명하였다. 총 절삭력의 계산치가 탄성력을 고려함으로써 좀 더 측정치에 가까워짐을 보였다.

참고문헌

(1) Chandrasekaran, H. and Nagarajan, R., Aug. 1977, "Influence of Flank Wear on the Stresses in a Cutting Tool," *Trans. of ASME. Jour. of Eng. for Ind.*, pp. 566~577.

(2) Hanna, N. H. and Tobias, S. A., 1969, "The Nonlinear Dynamic Behavior of a machine Tools Structure," *Int. J. Mach. Tooils Manufact.*, Vol. 9, pp. 293~307.

(3) Hanna, N. H. and Tobias, S. A., 1974, "A Theory of Nonlinear Regenerative Chatter," *Trans. of ASME. Jour. of Eng. for Ind.*, pp. 247~253.

(4) Knight, W. A., 1967, "Application of the Universal Machinability Index and the Prkediction of Machine Tool Stability," *Inter. Jour. of MTDR*, Vol. 7, pp. 91~106.

(5) Kwon, W. T., 1992, *Tool Wear Analysis and Monitoring*, Ph. D. Theses, Northwestern University.

(6) Merchant, M. E., May 1945, "Mechanics of the Cutting Process," *Jour. of Applied Physics*, Vol. 16, No. 5, pp. 267~318.

(7) Muskhelishvili, N. I., 1945, "Singular Integral Equations," *Noordhoff International Publishing*, Netherland.

(8) Nigm, M. M., 1981, "A Method for the Analysis of Machine Tool Chatter," *Inter. Jour. of MTDR*, Vol. 21 No. 3.4, pp. 251~261.

(9) Nigm, M. M., Sadek, M. M. and Tobias, S. A., 1977, "Determination of Dynamic Cutting Coefficients from Steady State Cutting Data," *Inter. Jour. of MTDR*, Vol. 17, pp. 19~37.

(10) Parthimos, D. T., 1990, *Nonlinear Behavior of the Dynamic Cutting Process*, Ph. D. Theses, Northwestern University.

(11) Tlusty, J. and Ismail, F., 1981, "A Basic Nonlinearity in Machining Chatter," *Annals of the CIRP*, Vol. 30/1, pp. 299~304.

(12) Tobias, S. A., 1965, *Machine Tool Vibrations*, Blackie & Son LTD.

(13) Wu, D. W., 1986, "Governing Equations of the

Shear Angle oscillation in Dynamic Orthogonal Cutting," *Trans. of ASME. Jour. of Eng. for Ind.*, pp. 280~287.

(14) Zorev, N. N., 1966, *Metal Cutting mechanics*, Pergamon Press, London.

부 록

이 부록에서는 이상적인 강성체인 공구에 모멘트 M이 작용하였을 때 그 모멘트와 공구의 회전각도 그리고 공구-공작물간의 물성관계에 대한 수식을 유도하였다. 이 관계를 밝혀내기 위해 우선 하나의 집중력이 반 무한평면(semispace)으로 가정된 공작물에 작용하였을 때 해를 구하고 이것을 확장해 나갔다. Fig.(A.1)에서와 같이 하나의 집중력이 무한평면에 주어졌을때 Ariy 응력함수(Airy Stress Function) ϕ 는 다음과 같다.⁽⁷⁾

$$\phi = -P/\pi r\theta \sin\theta \tag{A.1}$$

여기서, P : 반 무한평면에 주어짐 힘
 r : 반경방향 길이
 θ : 접선방향 각도

여기서 극좌표를 직교좌표로 바꾸고 변위를 구해보면 그때의 y방향의 변위 u_y 는 다음과 같다.

$$u_y(x, y) = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{P}{\pi} \right) \left\{ \frac{1}{2} (x+1) \log r - \frac{y^2}{r^2} \right\} \tag{A.2}$$

여기서, μ : Muskhelishvili 상수
 μ : 전단상수 (Shear modulus)

이 식을 Fig.(A.2)에 주어진 경우처럼 균일한 힘이 공구와 공작물에 주어졌을때로 확장할 수 있다. 일단 이 경우에 표면(x-axis)에서의 변위함수가 구해지면 변형(strain)은 변위함수를 미분함으로써 얻어지고 응력(stress)은 변형과 응력의 관계를 표

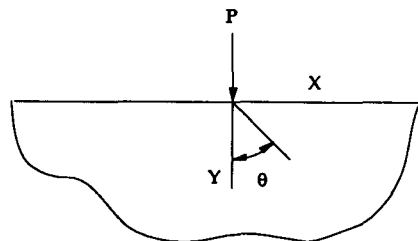


Fig.(A.1) Conontrated force on an elastic semispace

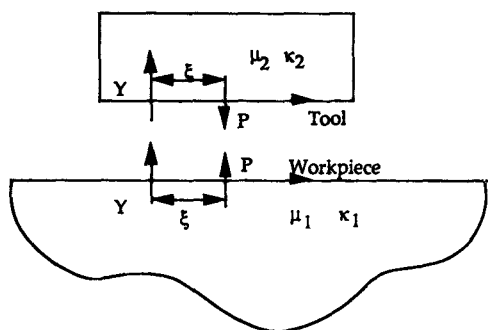


Fig. (A.2) Forces of the same magnitude and opposite direction applied to the tool and the workpiece

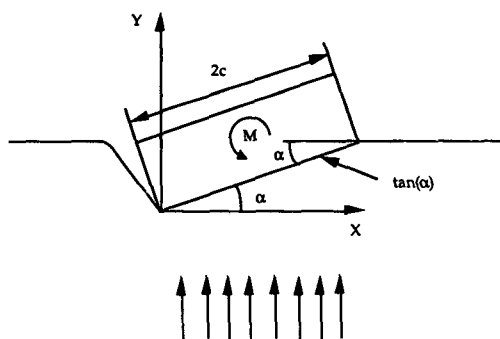


Fig. (A.3) Schematics for idealized tool and workpiece contact

시한 Hooke's Law로부터 구해진다. 표면에서의 위치 함수, 즉 $y=0$ 에서의 위치함수와 변형함수는 각각(A.3), (A.4)와 같다.

$$u_y(x, 0) = -\frac{P(x+1)}{4\pi\mu\log r} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y(x, 0)}{\partial x} &= -\frac{P(x+1)}{4\pi\mu} \frac{1}{r} \frac{dx}{r} \\ &= -\frac{P(x+1)}{4\pi\mu} \frac{1}{x} \end{aligned} \quad (A.4)$$

식(A.4)는 집중력 P 가 반 무한평면에 주어졌을 때 표면에서의 변형분포도이다. 이 식은 집중력 P 가 반 무한평면으로 표시된 공작물과 공구에 동시에 작용하였을 때의 식으로 확장할 수 있는데 그림(A.2)의 경우에서처럼 y 축에서부터 거리 ξ 만큼 떨어진 곳에 힘 P 가 주어진 경우 공구와 공작물에서의 변형함수(strain function)는 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_y(x, 0^-)}{\partial x} = -\frac{(x_2+1)}{4\pi\mu_2} \frac{P}{\xi-x} \quad (A.5)$$

$$\frac{\partial u_y(x, 0^+)}{\partial x} = -\frac{(x_1+1)}{4\pi\mu_1} \frac{P}{\xi-x} \quad (A.6)$$

수직 분포하중(distributed normal force)이 공구와 공작물 사이에 작용할 때 공구의 길이가 $2c$ 일 때 그 힘을 공구의 길이에 걸쳐 적분하여 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial u_y(x, 0^-)}{\partial x} = -\frac{(x_2+1)}{4\pi\mu_2} \int_{-c}^{+c} \frac{N(\xi)}{\xi-x} d\xi \quad (A.7)$$

$$\frac{\partial u_y(x, 0^+)}{\partial x} = -\frac{(x_1+1)}{4\pi\mu_1} \int_{-c}^{+c} \frac{N(\xi)}{\xi-x} d\xi \quad (A.8)$$

앞에서 가정하였듯이 공구와 공작물 사이에 아무런 틈새가 없다면 공구와 공작물이 서로 접촉하는

부분에서는 모양이 똑같다는 결론에 이르게 된다. 공구와 공작물 사이의 틈새를 나타내는 틈새함수(gap function)는 다음과 같다.

$$g(x) = g_0(x) + u_y(x, 0^+) - u_y(x, 0^-) \quad (A.9)$$

여기서, $g_0(x)$: 공구와 공작물 접촉면의 위치함수 공구를 α 만큼 기울어져 있으면, kx ($k=\tan(\alpha)$)로 표시된다. (Fig.(A.2) $g(x)$), 공구와 공작물 사이의 틈새함수

식(A.9)을 x 에 관한 편미분하면 공구와 공작물 사이의 변형 함수의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{\partial g_0(x)}{\partial x} + \frac{\partial u_y(x, 0^+)}{\partial x} - \frac{\partial u_y(x, 0^-)}{\partial x} \quad (A.10)$$

식(A.10)에서 $g_0(x) = kx$ 이고 공구가 이상적으로 강성이 높으므로 μ_2 는 α 이다.

식(A.10), (A.8)과 위의 가정을 식(A.10)에 적용하면

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = k - \frac{(x_1+1)}{4\pi\mu_1} \int_{-c}^{+c} \frac{N(\xi)}{\xi-x} d\xi \quad (A.11)$$

가정에 의하여 공구와 공작물 사이에는 틈새가 없으므로 $(\partial g(x)/\partial x) = 0$ 이다. 그러므로 식(A.11)은 다음과 같다.

$$\int_{-c}^{+c} \frac{N(\xi)}{\xi-x} d\xi = k \frac{4\pi\mu_1}{(x_1+1)} = B1 \quad (A.12)$$

여기서 $B1$ 은 상수이다.

식(A.12)의 적분은 Cauchy의 특이적분함수의 형태이므로 풀 수 있다. 이 식의 해로써 4가지가 가

능한데 공구의 양쪽 모서리가 날카로우므로 그 지점에서 특이점이 존재한다는 가정을 하면 다음과 같다.

$$N(x) = -\frac{1}{P^2} \frac{1}{\sqrt{c^2-x^2}} \left\{ B2 + \int_{-c}^{+c} \frac{B1\sqrt{c^2-\xi^2}}{\xi-x} d\xi \right\} \quad (A.13)$$

여기서 $B2$ 는 상수이다.

식(A.13)의 오른쪽에 있는 적분함수는 Cauchy의 특이적분식을 이용하며 다음과 같이 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-c}^{+c} \frac{B1\sqrt{c^2-\xi^2}}{\xi-x} d\xi &= \int_{-c}^{+c} \frac{B1(c^2-\xi^2)}{(\xi-x)\sqrt{c^2-\xi^2}} d\xi \\ &= B1[c^2I - \{ \pi x + x^2I \}] \end{aligned} \quad (A.14)$$

여기서,

$$I = -\pi \frac{\text{sing}x}{\sqrt{x^2-c^2}} H(|x|-c) \quad (A.15)$$

$H(|x|)$: 계단함수

식(A.15)를 (A.14)에 대입하면

$$\begin{aligned} N(x) &= -\frac{B2}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{c^2-x^2}} \\ &\quad - \frac{B1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{c^2-x^2}} [c^2I - \pi x - Ix^2] \\ &= \frac{\overline{B2}}{\sqrt{c^2-x^2}} + \frac{\overline{B1}x}{\sqrt{c^2-x^2}} \quad \text{for } |x| < c \end{aligned} \quad (A.16)$$

여기서 $\overline{B2} = -B2/\pi^2$, $\overline{B1} = -B1/\pi$ 이다.

수직 분포함수 $N(x)$ 는 $B1$, $B2$ 두개의 상수를 가지고 있는데 이 상수는 공구의 힘과 모멘트 평형 조건을 생각함으로써 풀 수 있다. 힘과 모멘트의 평형방정식을 각각 다음과 같다.

$$\int_{-c}^{+c} N(\xi) d\xi = 0 \quad (A.17)$$

$$-M + \int_{-c}^{+c} \xi N(\xi) d\xi = 0 \quad (A.18)$$

식(A.16)은 식(A.17)에 대입하면

$$\int_{-c}^{+c} N(\xi) d\xi = \int_{-c}^{+c} \frac{\overline{B2}}{\sqrt{c^2-\xi^2}} + \frac{\overline{B1}\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}} d\xi \quad (A.19)$$

식(A.19)의 오른쪽 식의 두번째 식은 기함수이므로 0이 되고 $\xi = \sin\theta$ 를 대입하면 첫번째 식도

풀린다.

$$\begin{aligned} \int_{-c}^{+c} \frac{\overline{B2}}{\sqrt{c^2-\xi^2}} + \frac{\overline{B1}\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}} d\xi &= B2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{c \cos\theta}{c \cos\theta} d\xi \\ &= \overline{B2}\pi = 0 \end{aligned} \quad (A.20)$$

그러므로, $\overline{B2} = 0$

상수는 모멘트 평형식을 생각하면 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} M &= \int_{-c}^{+c} \xi N(\xi) d\xi = \int_{-c}^{+c} \frac{\overline{B1}\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}} d\xi \\ &= \overline{B1} \int_{-c}^{+c} \frac{\xi^2(\xi-x)}{(\xi-x)\sqrt{c^2-\xi^2}} d\xi \\ &= \overline{B1} \int_{-c}^{+c} \frac{\xi^3}{(\xi-x)\sqrt{c^2-\xi^2}} - \frac{\xi^2x}{(\xi-x)\sqrt{c^2-\xi^2}} d\xi \end{aligned} \quad (A.21)$$

식(A.21) 또한 Cauchy의 특이 적분함수로 풀 수 있다.

$$M = \overline{B1} \left[\frac{\pi}{2} c^2 + \pi x^2 - x(\pi x) \right] = \overline{B1} \frac{\pi c^2}{2} \quad (A.22)$$

그러므로, $\overline{B1} = 2M/\pi c^2$

식(A.20)과를 (A.22) 식(A.16)에 대입하면

$$N(x) = \frac{2M}{\pi c^2} \frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}} \quad \text{for } |x| < c \quad (A.23)$$

이 식이 모멘트 M 이 공구에 주어졌을 때 공구가 공작물에 전달하는 수직 분포력의 분포를 계산한 식이다. 하지만 우리의 목적은 주어진 모멘트 M 을 경사도 α , 공구 플랭크 마모량 $2c$ 그리고 공작물의 물성으로 나타내는 것이다.

식(A.16)과 (A.13)로부터 우리는 다음 관계를 알아낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{B1}{\pi} \frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{4\pi\mu_1 k}{(x_1+1)\sqrt{c^2-x^2}} \end{aligned} \quad (A.24)$$

식(A.23)과 (A.24)를 합성하면

$$\begin{aligned} M &= \frac{2\pi\mu_1 c^2}{(x_1+1)} k \\ &= \frac{2\pi\mu_1 c^2}{(x_1+1)} \tan(\alpha) \end{aligned} \quad (A.25)$$

결과적으로 모멘트 M 이 기울기 α , 플랭크 길이 $2c$, 그리고 공작물의 물성으로 나타났다. 그런데 공구에 주어지는 힘이 플랭크의 1/2~1/5에 집중되

므로 [1] 식 (A.25)의 모멘트 대신 $M=0.4cp$ 를 대입할 수 있는데 그러면

$$P = \frac{5\pi\mu_1 c}{(\chi_1 + 1)} \tan(\alpha) \quad (\text{A.26})$$

식 (A.26)으로 나타난 힘은 트러스트 방향이므로 그 힘에 공구-공작물 사이에 작용하는 마찰력을 곱해주면 주절삭력 방향의 힘이 얻어진다. 결과적으로

공작물의 탄성력에 의한 공구-공작물 사이의 힘은 다음과 같다.

$$Q_c = G_c c \tan(\alpha) \cdot w \quad (\text{A.27})$$

$$Q_t = P \cdot w \quad (\text{A.28})$$

여기서,

$$G_c = \mu \frac{5\pi\mu_1}{(\chi_1 + 1)}, \quad w \text{는 절삭폭이다.}$$