

〈論 文〉

# 기술함수를 이용한 비선형 결합부를 가진 구조물의 진동해석

박해성\* · 지태한\*\* · 유원희\*\*\* · 박영필\*\*\*\*

(1993년 10월 20일 접수)

## Vibration Analysis of Structure with Nonlinear Joint Using Describing Function

Hae-Sung Park, Tae-Han Jee, Won-Hee You and Young-Pil Park

**Key Words :** Describing Function(기술함수), Nonlinear Joint(비선형 결합부), Nonlinear Building Block Analysis(비선형 빌딩블럭법), Modal Analysis(모드 해석)

### Abstract

In this study, the describing function is adopted to represent nonlinearity in the system equations. The compliance can be obtained by solving nonlinear simultaneous algebraic equations for multi-degrees-of-freedom system with multiconlinearities. When the technique is applied, the nonlinearity of the system can be identified from the compliance which is obtained from the sinusoidal excitation of the system. By employing the describing function in the Building Block Analysis, we can extensively develop the BBA into investigation of the continuous systems with nonlinearities. The evaluated compliance can quantitatively show the effects of nonlinearity such as the transfer of the natural frequency, the variance of the compliance at the natural frequency, and the jump phenomena which occur during sweeping of the excitation frequency.

### 1. 서 론

공작기계 또는 일반 기계구조물의 동적강성의 평가수단으로는 여러가지 주파수응답 해석법과 시간영역에서의 해석법이 사용되고 있다. 주파수응답 해석법에는 유한요소법, 모드해석법, 부분구조합성법<sup>(1,2)</sup> 등이 있으나, 이 방법들은 동적해석에 있어서 대부분이 선형계를 대상으로 하고 있다. 그러나 실제로는 선형계라 하더라도 어떤 일정한 작동범위 내에서만 선형특성을 가지며, 모든 계는 어느 정도의 비선형성을 포함하고 있다. 특히 하나의 기계에도 여러 종류의 부분 구조물들과 이들을 연결

하는 수 많은 결합부가 존재하며 이들 결합부는 대부분 비선형성을 가지게 되어 정확한 해석을 위해서는 비선형성에 대한 고려가 필요하다.

이러한 이유때문에 여러가지 방법의 비선형계 해석방법이 제안되어 왔다. 이들 해석방법으로는 조화 균형법(the method of harmonic balance)<sup>(3,4)</sup>과 비선형성이 작은 계에 적용되는 섭동법(perturbation method)<sup>(3,4)</sup> 및 평균법(averaging method),<sup>(4)</sup> 비선형성이 큰 경우에 적용되는 Ritz방법(the Ritz method)<sup>(3)</sup> 등이 있다. 그러나 이들은 대부분 1자유도 비선형계의 해석에 사용되며 다자유도계의 해석에 적용된 경우는 거의 보이지 않는다. 현재 널리 사용되고 있는 다자유도 비선형계의 응답해석법으로는 미분방정식의 직접적분법에 의한 시간응답 해석법이 있지만, 이 방법은 시간영역의 해석을 통하여 주파수응답을 구하기 때문에 막대한 계산시간을 요한다. 따라서 계산시간이 많이 소요되지 않는

\*삼성중공업(주)

\*\*연세대학교 기계공학과 대학원

\*\*\*삼성전자(주)

\*\*\*\*정회원, 연세대학교 기계공학과

새로운 방법이 필요하게 되었다.

계의 비선형성을 표시하기 위한 방법으로는 비선형 자동제어에 쓰이는 기술함수가 있다.<sup>(5)</sup> 1985년 渡部 和와 佐藤壽芳은 진동계의 주파수응답 해석에 기술함수를 도입하여, 계에 포함되어 있는 비선형 요소를 준선형화하는 방법으로 다자유도 비선형계를 해석하는 방법을 제안하였다.<sup>(6)</sup> 기술함수법은 비선형요소의 응답중에서 기본주파수 성분에 중점을 두어 이를 기술함수로 치환함으로써 비선형요소를 준선형화하여, 수치계산으로 비선형계의 응답을 얻어 해석하는 방법이다.

또, 해석하고자하는 대상계가 해석하기가 곤란한 복잡한 구조물이거나 해석시간이 너무 길어질 경우에 전체 기계구조물(전계)을 간단한 부분구조(분계)로 나누어 해석하는 부분구조 합성법의 일종으로서 빌딩블럭법이 있다.<sup>(1~3)</sup> 빌딩블럭법은 유한요소법이나 실험을 통하여 각 분계의 전달함수를 구하여 이들을 합성함으로써 간단히 전계의 응답을 구하는 방법이다. 이러한 빌딩블럭법에 기술함수를 도입함으로써 기계구조물의 분계의 결합부가 비선형 요소로 구성되어 있을 경우에도 해석이 가능하게 된다. 이 방법을 비선형 빌딩블럭법(nonlinear building block analysis : NBBA)이라 하며, 1986년 渡部 和 등은 이를 이론적으로 해석하였다.<sup>(7)</sup>

본 연구에서는 비선형 결합부를 가진 구조물에 대하여 기술함수를 이용한 비선형 빌딩블럭법을 사용하여 해석하고 실험을 통하여 검증함으로써 비선형성을 내포하고 있는 복잡한 기계구조물의 진동해석이 가능함을 보인다. 본 연구에서 제안된 수치해석방법을 적용할 경우 비선형 결합부를 가진 계에 대하여 발산하지 않고 계의 응답을 얻을 수 있음을 보인다. 이를 통하여 비선형성을 포함한 복잡한 비선형계의 해석에 있어서 기술함수를 사용하는 방법이 타당성을 가짐을 밝히고, 기술함수를 사용하여 비선형계의 응답특성을 알아보려고 한다.

## 2. 이 론

### 2.1 기술함수

정현파 가진에 대한 비선형계의 응답은 기본파와 그에 따른 여러가지 조화파 성분의 조합으로 구성된다. 이 중에서 기본파의 성분이 출력에 가장 크게 기여하고 고조파 성분은 다른 선형부분에 의하여 누진적으로 감쇠되므로 계의 작동특성에 미치는

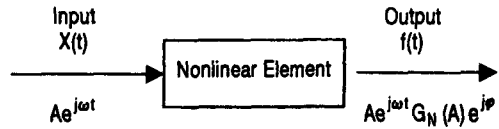


Fig. 1 Concept of describing function

효과가 적다. 따라서, 응답 중 기본파에 관한 이득만을 채용하여 이것을 기술함수  $G_N$  이라 하면, 이것에 의하여 응답을 구해도 좋은 근사치를 얻을 수 있다. 이 개념은 Fig.1에 도시되어 있다. 즉, 기술함수는 비선형요소의 주파수영역에서의 전달특성을 나타내며, 이에 따라 운동방정식을 준선형계(quasi-linear system)로 해석하는 것이 가능하게 된다. 이하에서는 스프링만이 비선형요소일 경우에 대해 해석해 본다.

비선형스프링의 입력이  $x = A \sin \omega t$  일 때의 출력을 복원력  $f_k(t)$ 라 하면, 실수형으로 쓴  $f_k(t)$ 의 푸리에 변환은 식(1)과 같다.

$$f_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(t) \cos(n\omega t) d(\omega t)$$

$$\text{단, } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(t) \sin(n\omega t) d(\omega t) \quad (2)$$

위의 식에서 기본파에 해당하는  $a_1$ ,  $b_1$ 의 항만을 택하면  $f_k(t)$ 는  $f_{k1}(t)$ 로 되며 이를 사용하여 다음 식과 같이 기술함수  $G_N$ 을 구한다.

$$G_N = \frac{f_{k1}(t)}{X(t)} \quad (3)$$

본 연구에서는 비선형요소로서 가장 대표적인 구간 선형요소를 사용하여 비선형계를 구성하였다. 이 비선형요소를 Fig. 2에 표시하였으며, 식(4)에

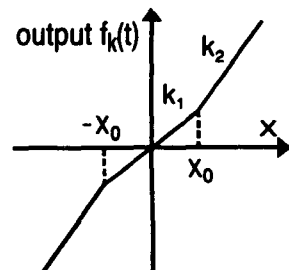


Fig. 2 Piecewise linear spring

이 요소에 대한 기술함수를 나타내었다. 이 요소는 기술함수가 입력의 크기만의 함수이며 입력에 대해 위상차를 갖지 않는다.

$$G_N(A) = k_1 \quad \text{for } A \leq x_0$$

$$G_N(A) = k_2 + (k_1 - k_2) \cdot \mu(\lambda) \quad \text{for } A > x_0 \quad (4)$$

여기서,  $\mu(\lambda)$ 는 포화함수라 불리며 다음과 같이 정의된다.

$$\mu(\lambda) = \frac{2}{\pi} \{ \sin^{-1}(\lambda) + \lambda \sqrt{1 - \lambda^2} \}, \quad \lambda = \frac{x_0}{A} \quad (5)$$

2.2 비선형 빌딩블럭법에 의한 구조물의 진동 해석

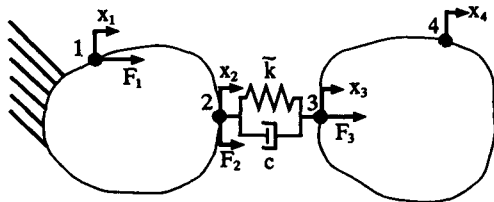
빌딩블럭법은 유한요소법이나 실험에 의해서 각 분계의 전달함수를 구성한 후 이를 합성하여 전체의 동적특성을 얻는 방법이다. 여기에 기술함수를 도입하여 결합부에 비선형요소를 갖는 구조물을 해석할 수 있다.

Fig. 3과 같이 2개의 분계를 가지며 결합부가 비선형스프링과 선형댐퍼로 구성된 계에 대해서 해석한다. Fig. 3에서 점1은 가진부, 점2와 점3은 결합부, 점4는 응답부를 나타낸다.

분계 1에 대하여 점1에 작용하는 가진력을  $F_1$ , 변위를  $x_1$ 이라 하고 결합부 점2에서 분계2에 대한 분계1에서의 작용력을  $F_2$ , 점2의 변위를  $x_2$ 라 하면, 점*i*와 점*j*사이의 전달함수인  $G_{ij}$ 를 사용하여 분계 1에 대해 다음 식이 성립한다.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

마찬가지로 분계 2에 대해서도 다음과 같이 표시된다.



Substructure 1                      Substructure 2

- 1 : Exciting regin
- 2,3 : Inter face regin
- 4 : Response regin

Fig. 3 Structural system composed of 2 substructures

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{33} & G_{34} \\ G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

또한 비선형 결합부에서는 결합부의 질량을 고려하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$(-w^2m + G_N + jw c) \cdot (x_3 - x_2) = F_2$$

$$F_2 + F_3 = 0 \quad (8)$$

식(6), 식(7)를 분계방정식과 식(8)의 결합조건을 연립하면 식(9)와 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -G_{12} \\ 0 & 1 & 0 & -G_{22} \\ 0 & 1 & 0 & G_{33} + \frac{1}{-w^2m + G_N + jw c} \\ 0 & 0 & 1 & G_{43} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} F_1 \quad (9)$$

· 식(9)로부터 전체의 응답은 다음 식으로 구해진다.

$$x_4 = \frac{G_{43} \cdot G_{12}}{G_{22} + G_{33} + \frac{1}{-w_2m + G_N + jw c}} \cdot F_1 \quad (10)$$

각 분계에서의 전달함수  $G_{12}$ ,  $G_{22}$ ,  $G_{33}$ ,  $G_{43}$ 를 구하고 기술함수  $G_N$ 을 알면 위의 식에 의하여 가진점과 응답점 간의 전달함수를 계산할 수 있다.

또한 여기에서의 기술함수  $G_N$ 은 또다른 미지수인 결합부의 스프링의 변위  $(x_3 - x_2)$ 의 함수이므로 이들을 동시에 구해야 한다. 결합부스프링의 진폭이 기술함수의 함수이고 기술함수 역시 결합부스프링 진폭의 함수이므로, 1회 계산으로는 해를 구할 수 없다. 따라서 하나의 주파수에 대해 기술함수와 식(8)을 반복계산하여 이 두 식을 동시에 만족시키는 해를 구한 후 이 해를 식(10)에 대입하여 구하고자하는 응답을 계산한다. 이와 같은 과정을 원하는 주파수대역에서 반복하여 주파수응답을 얻는다. 얻어진 응답을 가진점의 변위로 나누면 컴플라이언스를 구할 수 있다.

계산방법은 이분법을 사용하였으며, 이 계산 과정을 Fig. 4의 순서도에 보인다. 시뮬레이션 과정은 다음과 같다.  $G_N$ 의 최대값과 최소값을 설정하여 한계범위를 정한다. 초기 주파수에 대해 적당한  $G_N$ 의 초기치를 설정하고 적용된 비선형요소에 해당하는 기술함수의 식과 식(8)을 사용하여  $G_N'$ 를 계산하고 이값을 처음의  $G_N$ 값과 비교한다. 이와 같이 얻은  $G_N'$ 를 판정하여 한계범위를 좁혀간다. 이 과정을 수렴할 때까지 반복하여  $G_N$ 를 구하고

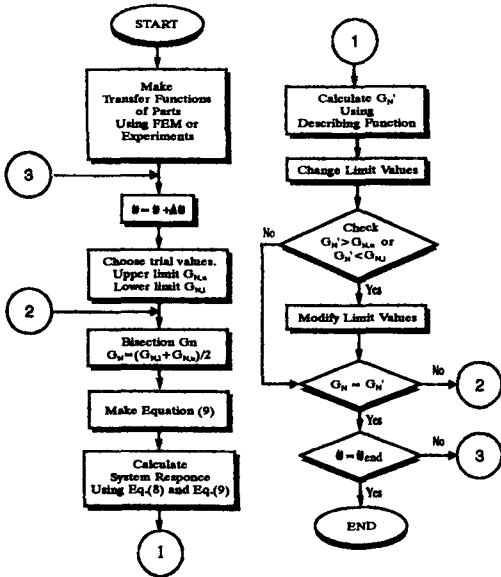


Fig. 4 Flow chart of (Calculation of nonlinear system response)

이 값을 사용하여 진폭을 구한다. 주파수를 증가시키면서 위와 같은 과정으로 진폭을 계산하여 원하는 주파수 대역에서의 계의 응답을 구한다. 이 때 새로운  $G_N$ 의 초기치로서 이전 주파수에서 구한  $G_N$ 의 값을 사용하면 불안정 구간에서 계의 응답을 올바르게 구할 수 있으며 계산시간이 단축되는 장점이 있다. 이 방법을 사용하여 정확한 수렴값을 얻을 수 있으나, 때로는 보통의 이분법으로는 수렴하지 않는 경우가 발생한다. 즉, 비선형성으로 인해 수렴도중 갑자기 한계범위 밖의 값이 나오는 경우가 발생하므로 이러한 경우에는 한계범위를 적절하게 수정할 필요가 있다. 따라서 이러한 경우에는 적절한 보정계수를 곱하여 한계범위를 다시 넓혀주는 작업을 수행한다. 이때 수정을 위한 보정계수의 값은 비선형 요소의 종류와 계의 파라미터에 따라 다르게 되며 이 값을 적절히 설정해야만 해를 구할 수 있다.<sup>(8)</sup>

### 3. 실험 및 결과 고찰

#### 3.1 실험장치 및 방법

실험 및 시뮬레이션에 사용된 구조물은 두개의 평판으로 구성되어 있으며 비선형 결합부로 결합되어 있다. 실험에 사용된 구조물은 Fig. 5와 같다.

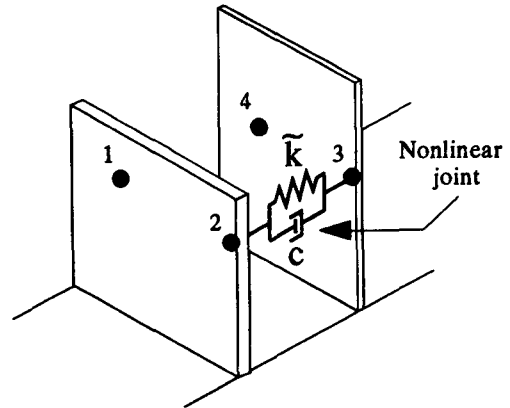


Fig. 5 Plate structure with nonlinear joint

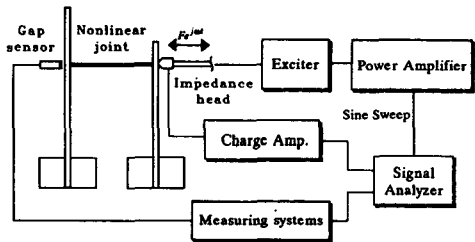


Fig. 6 Schematic diagram of experimental set-up (sine sweep)

그림에서 1점은 가진부, 2점과 3점은 결합부이며 4점은 응답부를 나타낸다. 빌딩블럭해석에 필요한 분계의 전달함수는 각 분계에 대한 임팩트실험 (impact test)에 의한 결과와 FEM에 의한 결과를 사용한다. FEM에 사용된 유한요소는 4절점, 12자유도의 4각형요소이다.<sup>(9)</sup>

가진실험장치의 전반적인 개요는 Fig. 6과 같으며 전계에 대해서는 1자유도계 실험과 같이 가진기로 강제가진실험 (sine sweep experiment)을 하였다. Fig. 6과 같이 분계1을 가진하여 분계2에서 응답을 측정한다. 가진력은 임피던스 헤드로 측정하고 계의 응답은 변위센서 (gap sensor)로 측정한다. 측정된 신호는 각각 증폭기에서 증폭되어 신호분석기에서 전달함수를 구한다.

비선형 결합부는 구간선형스프링을 사용하였으며, 비교를 위해  $k_1$ 의 강성을 갖는 선형결합부를 가진 계의 응답을 임팩트 실험으로 구한다.

#### 3.2 분계의 전달함수

구조물의 각 분계는 Fig. 7과 같다. 분계1은 두

께 4 mm, 길이 250 mm, 폭 250 mm인 강판이며, 유한요소 분할은 길이방향으로 5등분, 폭방향으로 5등분을 하였다. 분계2는 두께 3 mm, 길이 300

mm, 폭 200 mm인 강판이고 유한요소 분할은 길이방향으로 6등분, 폭방향으로 4등분을 하였다.

각 판에 대한 유한요소해석에 사용된 수치는 실험으로 얻은 측정치이며 그 값은 Table 1과 같다.<sup>(10)</sup> 감쇠는 비례감쇠를 사용하였다.

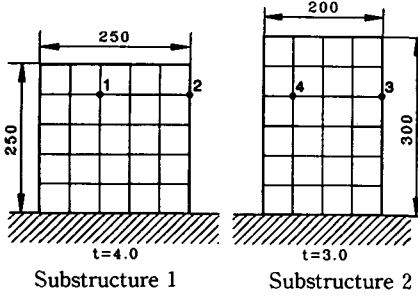
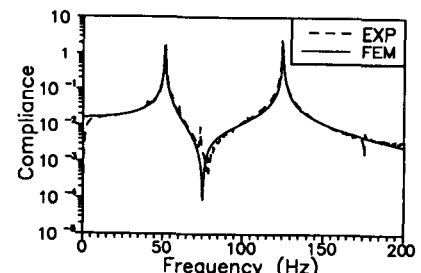
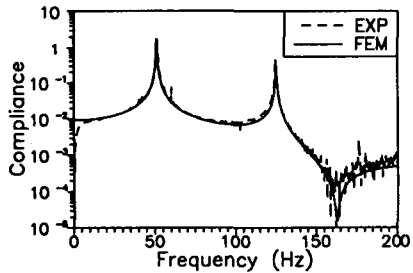
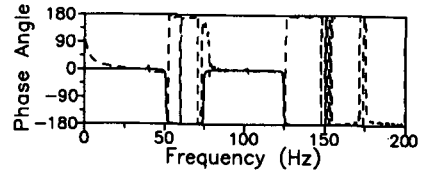
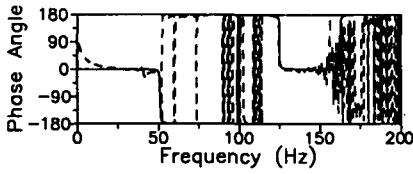


Fig. 7 Finite elements of substructure 1 & 2

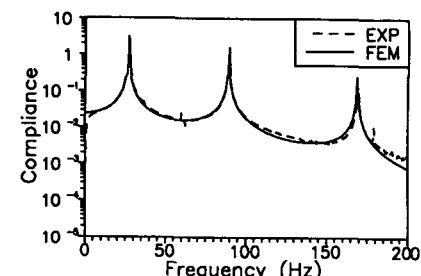
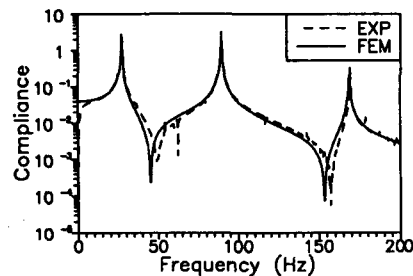
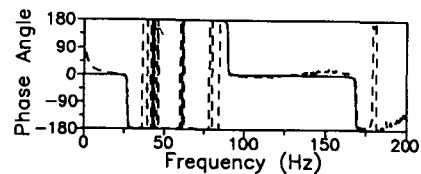
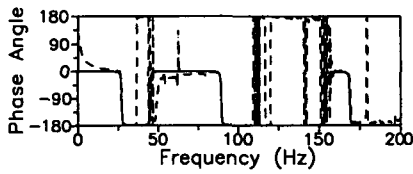
Table 1 Material properties for plates

Property	Plaste 1	Plate 2
Density	7782 kg/m <sup>3</sup>	7782 kg/m <sup>3</sup>
Elastic modulus	1.83 × 10 <sup>11</sup> N/m <sup>2</sup>	1.87 × 10 <sup>11</sup> N/m <sup>2</sup>
Poisson's ratio	0.3	0.3



(a) G<sub>12</sub>

(b) G<sub>22</sub>



(c) G<sub>33</sub>

(d) G<sub>43</sub>

Fig. 8 Transfer function; Substructure

위와 같은 물성치를 사용하여 유한요소법을 사용하여 각 판의 전달함수(compliance)를 구하였으며, 실험에 의한 각 분계의 전달함수는 임팩트실험으로 구하였다. 각 분계의 실험에 의한 전달함수와 유한요소법에 의한 전달함수를 Fig. 8에 나타내었다.

3.3 시뮬레이션 및 실험 결과

결합부에 사용된 스프링은 비대칭구간 선형스프링이며 사용된 수치는 Table 2와 같다.

빌딩블럭법은 부분구조 합성법 중의 한 해석방법으로서 각 부분구조들의 전달함수를 구하여 이들을 합성하는 방법이다. 이 방법은 저차 고유모드에서는 높은 신뢰도로서 전체의 응답을 구할 수 있다. 본 연구에서는 결합부의 비선형성에 의한 전체의 비선형응답에 주안점을 두었기 때문에 비선형 현상이 일어나는 저차 고유진동수만을 대상으로 전체에 대한 해석을 하였다.

Fig. 9에 전체의 실험결과를 보인다. Fig. 9의 (a)는 가진력이 5.4 N일 때의 전달함수이며 (b)는 가진력이 9.5 N일 때의 전달함수이다. 각 그림에서 점선은 결합부의 강성이  $\infty$ 인 선형결합부를 가진 계의 임팩트실험 결과이다. 가진력이 강할수록 비선형성이 강해지는 현상이 그림에 잘 나타나 있다. 계의 응답에서 비선형의 영향은 1차 공진점과

Table 2 Asymmetric piecewise nonlinear spring constants

Spring mass(g)	$k_1$ (N/m)	$k_2$ (N/m)	$c$ (Nsec/m)	$x_0$ (mm)
12	10600	$5.6 \times 10^6$	0.01	0.381

3차 공진점에서 나타났으며 이들은 모두 분계2의 공진점에 해당한다. 이것은 가진기로 구조물을 강제진동시킬 경우에 가진기의 가진력이 구조물의 공진점 부근에서 급격히 감소하기 때문에 분계 1의 공진점에서는 구조물의 진폭이 감소하여 비선형요소의 영향이 나타나지 않기 때문에 발생하는 현상이다.<sup>(11)</sup>

분계의 전달함수를 비선형 빌딩블럭법으로 해석한 결과를 Fig. 10과 Fig. 11에 보인다. Fig. 10은 가진력이 5.4 N일 때의 해석결과이고 Fig. 11은 가진력이 9.5 N일 때의 해석결과이다. 그림에서 점선은 전체의 실험결과를 나타낸다. 빌딩블럭법으로 시뮬레이션할 때 사용된 가진력은 실험에서 측정된 값을 사용하였다. Table 4에 실험 결과의 고유진동수와 빌딩블럭법으로 구한 고유진동수를 표시하였다. Table 4에서의 Case 1, 2, 3은 Table 3과 같다.

해석결과는 Table 4에 보이는 바와 같이 전체의

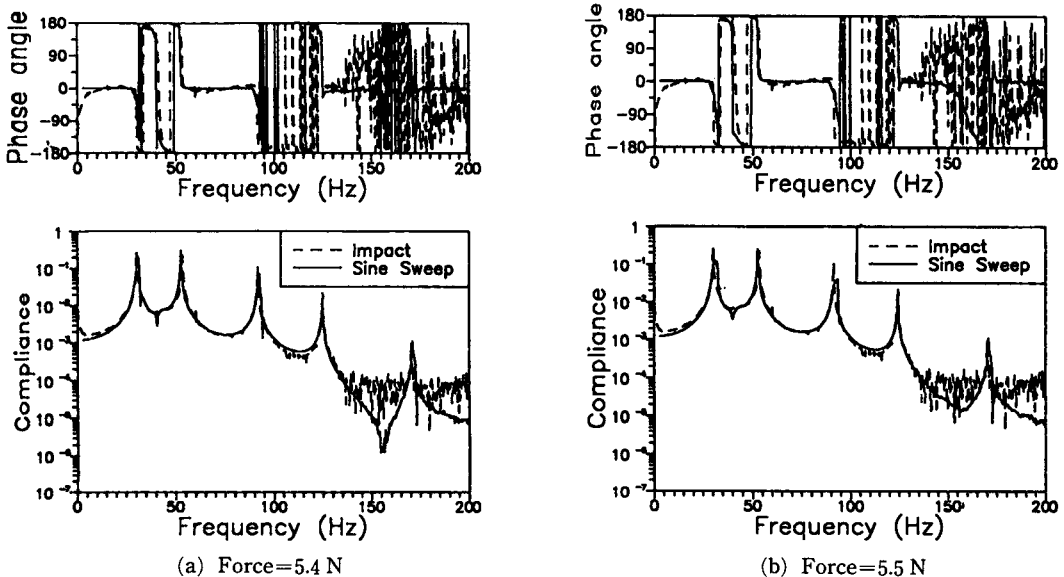


Fig. 9 Transfer function: Experiment

실험에 의한 해석결과와 상당히 일치함을 알 수 있다. 그러나 유한요소법에 의한 분계의 전달함수를 사용하여 전체를 해석하였을 경우 각 분계의 전달함수에서 공진점의 크기가 실험에 의한 분계의 전달함수의 공진점의 크기보다 작기 때문에 비선형 현상이 상대적으로 적게 나타났고 이로 인해 고유진동수가 전체의 실험보다 작다. 그러나 실험으로 구한 분계의 전달함수를 사용한 경우에는 고유진동수

및 비선형현상이 전체의 실험결과와 거의 일치한다. 즉, 본 방법에 의한 계의 해석에 있어서 비선형응답의 정확도는 각 분계의 전달함수의 공진봉의 정확도에 의존하는 단점이 있다. 따라서 유한요소법을 사용하였을 때 정확한 분계의 전달함수를 구하면, 빌딩블럭법에 의한 해석결과도 보다 정확하게 됨을 알 수 있다.

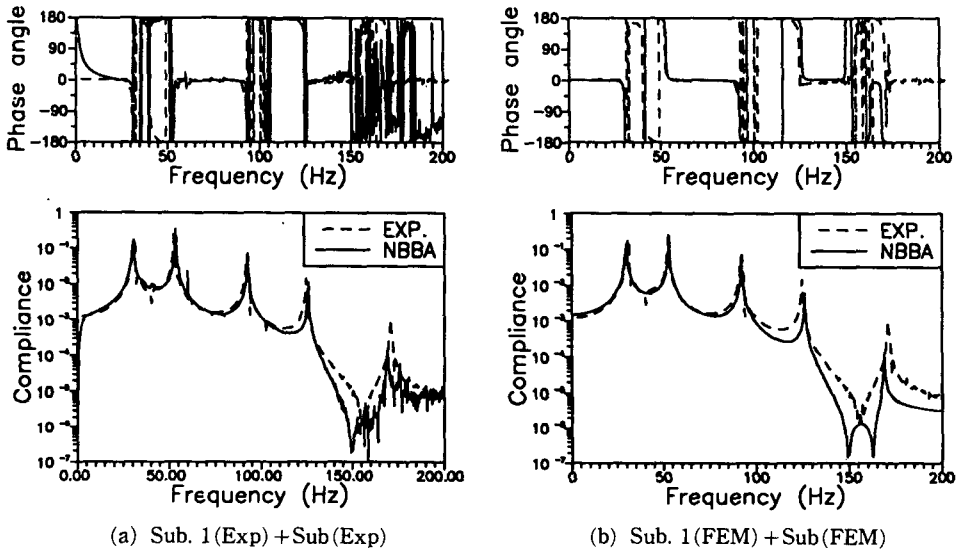


Fig. 10 Transfer function: NBBA (Force=5.4 N)

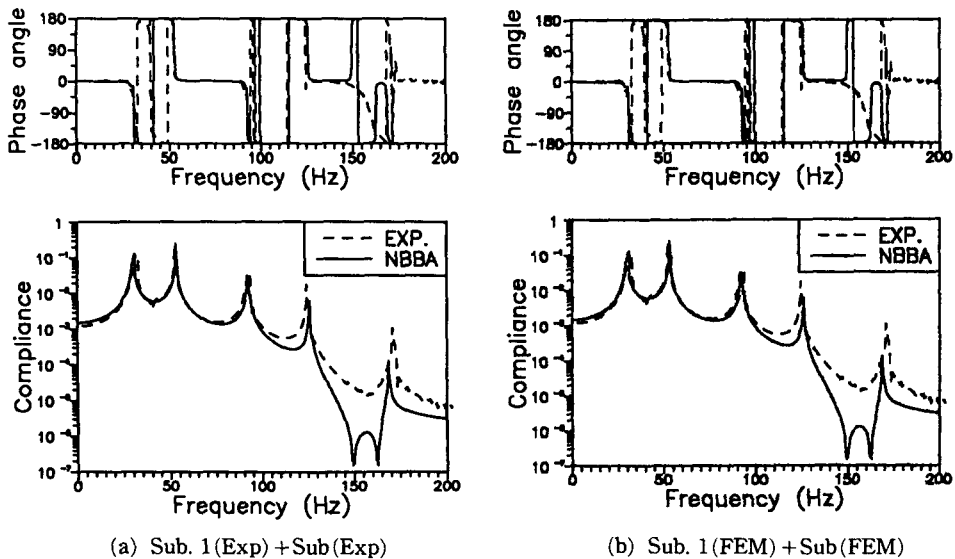


Fig. 11 Transfer function: NBBA (Force=9.5 N)

**Table 3** Method to obtain transfer function of whole structure

Case 1	Experiment of whole structure(sine sweep)
Case 2	Substructure 1(Exp) + Substructure 2(Exp)
Case 3	Substructure 1(FEM) + Substructure 2(FEM)

Exp : Experiment  
FEM : Finite Element Method

**Table 4** Natureal frequencies (Hz) of whole structure

Natural frequency		1st	2nd	3rd	4th	5th
Impact test		30.25	53.25	91.50	124.75	170.25
F=5.4N	Case 1	30.50	52.50	92.50	124.50	171.00
	Case 2	30.75	53.50	92.50	125.75	169.50
	Case 3	30.00	53.00	92.25	126.00	168.75
F=9.5N	Case 1	31.00	52.50	93.50	124.50	171.00
	Case 2	31.75	53.50	93.00	125.75	169.50
	Case 3	30.75	53.00	92.50	126.00	168.75

#### 4. 결 론

비선형요소를 가진 진동계의 응답해석에 대하여 기술함수를 적용하여 비선형부를 준선형화시키고, 각 부분구조의 응답을 사용하여 전체의 응답을 구하는 빌딩블럭법을 사용함으로써 계에 대한 수치해석과 실험을 수행하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 기술함수를 이용함에 있어 본 논문에서 제안된 반복계산과정을 사용함으로써 비선형 결합부를 가진 계에 대하여 발산없이 수렴하는 주파수응답을 얻었으며, 비선형 결합부를 가진 계의 특성들이 파악되었다.

(2) 비선형 결합부를 가진 구조물에 대해 빌딩블럭법과 기술함수를 결합하여 해석하는 방법의 타당성을 보였다. 구조물 중 선형부분은 실험이나 수치

해석으로, 비선형부분은 기술함수를 이용한 비선형 해석을 하여 이들 결과를 결합시켜 전체계의 비선형 특성을 규명할 수 있음을 보였다.

#### 후 기

본 연구는 국방과학연구소 장기기초연구(ADD-90-5-007)의 일부로서 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- (1) 長松昭男, 大熊政明, 部分構造合成法, 培風館, 1991.
- (2) 정재훈, 유원희, 박영필, "빌딩블럭법을 이용한 탄성결합된 판의 동특성 해석," 한국소음진동 공학회 추계학술대회논문집, 1991, pp. 21~26.
- (3) Peter Hagedorn, *Non-linear Oscillations*, Clarendon Press, 1981.
- (4) Chihiro Hayashi, 1985, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, McGraw-Hill, 1985.
- (5) Shinnars, S. M., 1978 *Modern Control System Theory and Application*, Addison Wesley.
- (6) 渡部 和, 佐藤壽芳, "多自由度非線形系の周波數應答解析," 日本機械學會論文集 (C편), 51권, 467호, 1985, pp. 1765~1770.
- (7) 渡部 和, 佐藤壽芳, "非線形ビルディング・ブロック法の開發と應用," 日本機械學會論文集(C 편), 52권, 481호, 1986, pp. 2397~2404.
- (8) 박해성, 유원희, 박영필, 1992, "기술함수를 이용한 비선형 결합부의 진동 해석," 대한기계학회 추계학술대회논문집, pp. 557~561.
- (9) Dhatt, G. and Touzot, G., 1984, *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons, 1984.
- (10) Blevins, R. D. 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company.
- (11) Ewins, D. J. 1984, *Modal Testing : Theory and Practice*, Research Studies Press.