

〈論 文〉

# 중동력을 받는 탄성지지된 외팔보의 동적 안정성에 미치는 스프링위치와 상수의 영향

류봉조\* · 권경우\* · 명태식\*\*

(1993년 12월 20일 접수)

## Spring Position and Stiffness Effect on the Dynamic Stability of Elastically Restrained Cantilevered Beams under a Follower Force

Bong-Jo Ryu, Kyong-Woo Kwoun and Tae-Sik Myung

**Key Words :** Flutter (플러터), Divergence Type (발산형), Follower Force (중동력), Translational Spring (병진스프링)

### Abstract

The influences of spring position and spring stiffness on the critical force of a cantilevered beam subjected to a follower force are investigated. The spring attached to the beam is assumed to be a translational one and can be located at arbitrary positions of the beam as it has not been assumed so far. The effects of transeverse shear deformation and rotary inertia of the beam are also included in this analysis. The charateristic equation for the system is derived and a finite element model of the beam using local coordinates is formulated through extended Hamilton's principle. It is found that when the spring is located at position less than that of 0.5L, the flutter type instability only exists. It is shown that the spring position approaches to the free end of the beam from its midpoint, instability type is changed from flutter to divergence through the jump phenomina according to the increase of spring stiffness.

### 기 호 설 명

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| $x_k$ : 고정단으로부터의 스프링위치  | $R$ : 보의 회전관성 매개변수      |
| $\zeta_k$ : 무차원화된 스프링위치 | $k$ : 전단계수              |
| $K_s$ : 스프링상수           | $P$ : 중동력               |
| $K_s^*$ : 무차원화된 스프링상수   | $Q$ : 무차원화된 중동력         |
| $L$ : 보의 길이             | $x$ : 보의 축방향 좌표         |
| $A$ : 보의 단면적            | $y$ : 보의 횡축방향 좌표        |
| $E$ : 탄성계수              | $[M]$ : Global 질량행렬     |
| $I$ : 단면의 2차 모멘트        | $[K]$ : Global 강성행렬     |
| $S$ : 전단변형 매개변수         | $t$ : 시간                |
|                         | $\Omega$ : 무차원화된 고유진동수  |
|                         | $Q_{cr}$ : 무차원화된 임계 중동력 |
|                         | $\rho$ : 보의 밀도          |
|                         | $\varphi$ : 보의 굽힘기울기    |

\*정회원, 대전산업대학교 기계설계학과

\*\*정회원, 충북대학교 대학원 기계공학과

## 1. 서론

중동력(follower force)을 받는 탄성보의 동적 안정성에 미치는 다양한 파라미터의 영향에 대해서는 지난 수년간 많은 연구자들에 의해 연구되어져 왔다.<sup>(1~4)</sup> 일반적으로 탄성계에 있어 안정으로부터 불안정으로의 천이되는 것은 동적인 과정에 의해 특정화될 수 있으며, 이런 계의 안정성의 상실은 경계조건에 의존하는 플러터형(flutter type)이거나 발산형(divergence type)의 불안정이 될 수 있다. 특히, 파이프를 흐르는 유체관련 진동 및 안정성문제는 중동력을 받는 탄성지지된 보의 안정성문제와 관련이 있어, 이에 대한 연구도 많이 이루어져 왔다.

Kounadis<sup>(5)</sup>는 한단이 힌지(hinged)되고, 타단에 중동력을 받는 보가 집중질량을 갖는 경우에 대한 플러터하중의 불연속에 대해 연구하였으며, 곧이어 중동력을 받는 탄성지지된 구조물의 발산형과 플러터형대의 임계 중동력 값을 조사하였다.<sup>(6)</sup> 그 후, Sugiyama와 공동 연구자들<sup>(7)</sup>은 유체가 흐르는 파이프의 안정성에 미치는 스프링의 영향에 대해 연구하였고, Rosa와 Franciosi<sup>(8)</sup>는 중동력을 받는 외팔보의 안정성에 미치는 중간스프링(intermediate spring)의 영향을 해석하였으며, Sato<sup>(9)</sup>는 비보존력을 받는 탄성지지된 외팔보 모델의 진동과 안정성에 대해 연구하였다. 그는 자유단에 작용되는 힘이 비보존력이 아닌 단순 압축력인 경우와 항상 접선방향의 중동력을 받는 두 경우에 대하여 스프링상수의 변화에 따른 임계 중동력 값을 구하였으나, 스프링의 위치는 자유단에 고정시키고 스프링상수의 크기가 작은 경우에만 한정하였으므로 일반적인 결론의 도출은 어려웠다. Lee와 Kuo<sup>(10)</sup>는 스프링 지지된 불균일 보의 탄성 안정성연구에 있어, 테이퍼(taper)의 비(ratio)와 경계조건들이 임계 중동력 값에 미치는 영향에 대해 조사하였다. 최근 Lee, Kuo and Lin<sup>(11)</sup>은 Winkler 탄성기초(elastic foundation)에 의해 지지되는 보가 중동력을 받는 경우 스프링상수, 세장비(slenderness ratio)의 변화가 계의 동적 안정성에 미치는 효과에 대한 연구를 행하였다. Chen과 Ku<sup>(12)</sup>는 자유단에 집중질량을 갖고 중동력을 받는 Back's column문제의 안정성을 판별하는데 있어 고유치의 정확도에 관한 연구를 하였다.

본 연구의 목적은 탄성스프링 지지된 외팔보의 자유단에 일정 크기의 중동력이 작용되는 경우 스프링의 위치변화와 스프링상수의 크기변화 및 보의 전단변형 매개변수의 변화에 따른 계의 불안정 형태 및 최대 임계 중동력 값을 구하여 계의 안정성을 판별하는데 있다.

## 2. 이론해석

### 2.1 지배방정식

보의 고정단으로부터 임의의 위치에 병진 탄성스프링(translational elastic spring)에 의해 지지되고, 자유단에 일정한 크기의 중동력을 받는 외팔보에 대한 수학적 모델은 Fig. 1과 같다. 보의 전체 길이  $L$ , 밀도  $\rho$ , 단면적  $A$ , 단면의 2차 모멘트  $I$ , 탄성계수  $E$ , 전단탄성계수  $G$ 를 가지며, 스프링상수  $K_s$ 인 병진스프링은 고정단으로부터 임의의 위치  $x_k$ 에 있다고 가정한다. 또한 중동력  $P$ 의 방향과 변형되지 않은 보축과의 각도는  $y_x(L, t)$ 에 의해 나타내진다.

확장된 해밀턴원리(extended Hamilton's principle)를 이용하여 지배방정식을 나타내면 식(1)과 같다.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T_k - V_p + W_x) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W_y dt = 0 \quad (1)$$

여기서,

$$T_k = \frac{1}{2} \int_0^L \{ \rho A y_t^2 + \rho I \varphi_t^2 \} dx \quad (2)$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^L \{ EI \varphi_x^2 + kAG(y_x - \varphi)^2 \} dx + \frac{1}{2} K_s y^2(x_k, t) \quad (3)$$

$$W_x = \frac{1}{2} \int_0^L P y_x^2 dx, \quad \delta W_y = -P y_x(L, t) \delta y(L, t) \quad (4)$$

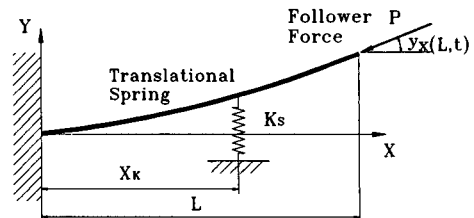


Fig. 1 Mathematical model of an elastically restrained cantilevered beam under a follower force

이다 또한,  $T_k$ 는 계의 운동에너지,  $V_p$ 는 탄성 포텐셜에너지,  $W_x$ 와  $\delta W_y$ 는 각각 중동력의 보존력 성분에 의한 일과 비보존력 성분에 의한 가상일을 나타낸다.

식(2)~(4)에서,  $y$ 와  $\varphi$ 에 대한 하첨자  $x$ 와  $t$ 는 각각 위치와 시간에 대한 미분을 나타내며,  $y$ 는 굽힘과 전단에 의한 전체변위,  $\varphi$ 는 굽힘에 의한 보의 경사각을 나타낸다.

식(2)~(4)를 식(1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A y_t^2 + \rho I \varphi_t^2) dx \right. \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L \{ EI \varphi_x^2 + kAG (y_x - \varphi)^2 \} dx \\ & - \frac{1}{2} K_s y^2(x_k, t) + \frac{1}{2} \int_0^L P y_x^2 dx \Big] dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} P y_x(L, t) \delta y(L, t) dt = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 유한요소법의 적용

Fig. 1의 수학적 모델에 대해 유한요소법을 적용시키기 위해 보를 Fig. 2에서와 같이, 길이가  $l$ 인  $N$ 개의 균일한 요소로 분할한다. Fig. 2에서 요소 위의 숫자는 node수를 나타내고, 원문자는 요소수를 보여준다. 또한 ①와 ③은 각각 보의 임의의 요소와 스프링이 위치한 요소를 나타낸다. 계산상의 편리를 위해 다음과 같은 국부좌표

$$x' = x - (i-1)l, \quad x'_k = x_k - (e-1)l \quad (6)$$

들과 식(7)의 무차원화된 좌표들

$$\xi = \frac{x'}{l}, \quad \xi_k = \frac{x'_k}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l} \quad (7)$$

을 도입하고, 식(5)의 변분을 정리한 후, 식(6)과 (7)을 식(5)에 대입하면 다음과 같다.

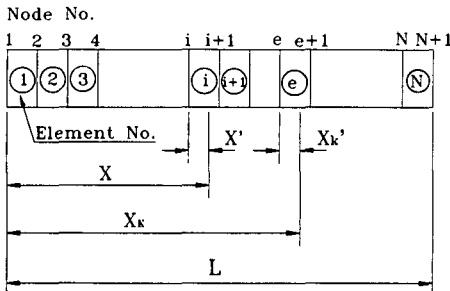


Fig. 2 Finite element model of the beam

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ \rho A l^3 \eta_t^{(i)} \delta \eta^{(i)} + \rho I l \varphi_t^{(i)} \delta \varphi^{(i)} + \frac{EI}{l} \varphi_t^{(i)} \delta \varphi_t^{(i)} \right. \\ & + kAGl (\eta_t^{(i)} - \varphi_t^{(i)}) \delta (\eta^{(i)} - \varphi^{(i)}) - Pl \eta_t^{(i)} \delta \eta_t^{(i)} \Big\} d\xi \\ & + Pl \eta_t(\xi_k, t) \delta \eta(\xi_k, t) + K_s l^2 \eta(\xi_k, t) \delta \eta(\xi_k, t) \Big\} dt \\ & = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)의 해를

$$\begin{aligned} \eta^{(i)}(\xi, t) &= \eta^{(i)}(\xi) e^{i\omega t} \\ \varphi^{(i)}(\xi, t) &= \varphi^{(i)}(\xi) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (9)$$

로 가정하고, field변수  $\eta^{(i)}(\xi)$ 와  $\varphi^{(i)}(\xi)$ 를 다음과 같은 근사해의 행렬형태

$$\begin{aligned} \eta^{(i)}(\xi) &= a^T(\xi) H^{(i)} \\ \varphi^{(i)}(\xi) &= a^T(\xi) \Psi^{(i)} \end{aligned} \quad (10)$$

와 무차원화된 변수들

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{\rho A L^4 \lambda^2}{EI}, \quad R = \frac{I}{AL^2}, \quad S = \frac{kAGL^2}{EI}, \\ Q &= \frac{PL^2}{EI}, \quad K_s^* = \frac{K_s L^3}{EI} \end{aligned} \quad (11)$$

을 도입하면 식(9)는 식(12)와 같이 나타내진다.

식(11)에서,  $Q$ 는 무차원화된 중동력을 나타내고,  $S$ 와  $R$ 은 각각 보의 전단변형 매개변수와 회전관성 매개변수를 표시한다. 또한,  $K_s^*$ 는 무차원화된 스프링상수,  $\Omega$ 는 무차원 고유진동수를 나타낸다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left\{ \delta H^T(i) \frac{\Omega^2}{N^4} [A] H^{(i)} + \delta \Psi^T(i) \frac{\Omega^2 R}{N^2} [A] \Psi^{(i)} \right. \\ & + \delta \Psi^T(i) [B] \Psi^{(i)} + \{ \delta H^{(i)} \delta \Psi^{(i)} \} \frac{S}{N^2} \begin{bmatrix} [B] \\ [U] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{(i)} \\ \Psi^{(i)} \end{bmatrix} \\ & - \delta H^T(i) \frac{Q}{N^2} [B] H^{(i)} \Big\} + \delta H^T(e) \frac{K_s^*}{N^3} [D] H^{(e)} \\ & + \delta H^T(N) \frac{Q}{N^2} [L_1] H^{(N)} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,  $H$ 와  $\Psi$ 는 일반화된 좌표벡터(generalized coordinate vector)이며, 각 행렬들은 다음과 같이 표현되는  $4 \times 4$  행렬들이다.

$$\begin{aligned} [A] &= \int_0^1 a(\xi) a^T(\xi) d\xi \\ [B] &= \int_0^1 a_t(\xi) a_t^T(\xi) d\xi \\ [D] &= a(\xi_k) a^T(\xi_k) \\ [U] &= - \int_0^1 a_t(\xi) a_t^T(\xi) d\xi \\ [W] &= - \int_0^1 a(\xi) a_t^T(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$[L_1] = a(1) a_r^T (1) \quad (13)$$

식(12)에서  $V^T = (H^T \Psi^T)$ 라 놓고,  $N$ 개의 요소에 대해 조합하면 최종적으로 다음과 같은 고유치 문제(eigenvalue problem)의 식이 된다.

$$\{\Omega^2[M] + [K]\} V = \{0\} \quad (14)$$

식(14)의  $\Omega^2$ 의 변화에 따라 계의 안정성을 판별한다.

### 3. 수치결과 및 해석

본 연구의 수치시뮬레이션을 위해 보를 8개의 균일 요소로 나누었으며, Euler-Bernoulli보(이론적으로는 보의 전단변형 매개변수  $S$ 가 무한대로 접근되고, 보의 회전관성 매개변수  $R$ 이 영으로 접근한다.)와 Timoshenko보의 경우에 대해, 탄성지지된 스프링의 위치 및 스프링상수의 변화에 따른 임계 중동력 값을 구하였으며, 스프링에 의해 지지되는 외팔보에 있어, 스프링이 어떤 위치에 있든, 스프링상수가 어떤 크기든지 계의 동적 안정성을 판별할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 개발하였다.

해의 정확도를 검증하기 위하여 참고문헌<sup>(12)</sup>의 Beck's column문제와 같은 조건(본 연구에 있어, 스프링상수 값  $K_s^* = 0.0$ 의 입력값)을 주어 비교한 결과, 임계 중동력 값은 0.1%의 오차를 나타냈다.

Fig. 3~5는 Euler Bernoulli보에 대해, 횡축을 무차원화된 스프링상수 값, 종축을 무차원화된 중동력 값으로 스프링의 위치변화에 따른 불안정 형태와 임계 중동력 값을 나타낸다. 스프링의 위치가  $x_k/L < 0.5$ 이면, 스프링상수의 크기에 관계없이 플러터형태의 불안정이 유발되며, 스프링상수의 크기가 증가함에 따라 임계 중동력 값은 증가된다. 스프링의 위치가  $x_k/L \geq 0.7$ 일 때는 임계 중동력 값이 점프(jump)하여 불안정 형태가 플러터형태에서 발산형태로 천이(transition)되는 스프링위치의 천이점이 존재하며, 스프링상수 값이 천이점에서의 임계 중동력을 나타내는 스프링상수 값보다 작을 때는 플러터형태의 불안정이 되고, 큰 경우는 발산형태의 불안정이 된다. 또한,  $x_k/L \geq 0.830$ 인 경우, 임계 중동력 값은 스프링상수가 증가함에 따라 점프과정을 거쳐 감소되지만,  $x_k/L < 0.830$ 에 대해서는 스프링상수가 증가함에 따라 점프과정을 거쳐 임계 중동력 값은 증가된다. 이 그림들에서 나타나

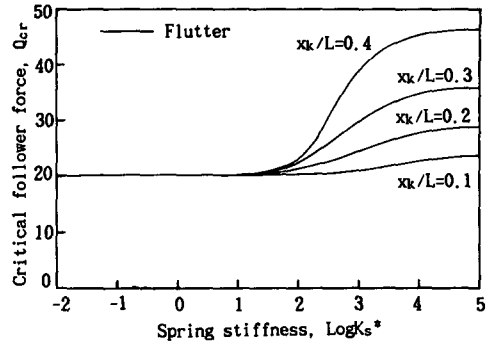


Fig. 3 Critical follower force depending on spring positions and spring stiffness( $x_k/L=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, S=10^6, R=0.0$ )

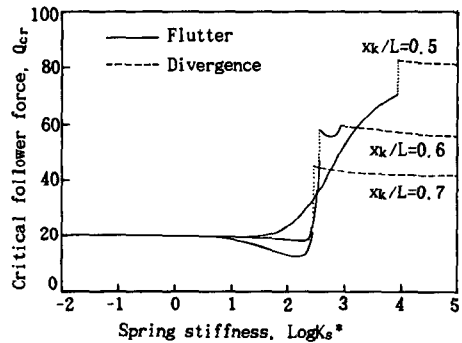


Fig. 4 Critical follower force depending on spring positions and spring stiffness( $x_k/L=0.5, 0.6, 0.7, S=10^6, R=0.0$ )

는 또 하나의 특징은 스프링의 위치가 고정단으로부터 자유단 쪽으로 움직여 갈때, 점프현상을 일으키는 스프링상수의 크기는 점점 감소되고, 스프링상수가 작은 경우( $K_s^* \leq 1.0$ )는 스프링의 위치는 임계 중동력 값의 변화에 영향을 미치지 않는다. 특히,  $K_s^* \leq 34$ 에서는 스프링위치에 관계없이 항상 플러터 형태의 불안정이 된다.

Table 1은 Euler-Bernoulli보에 대해, 스프링의 위치  $x_k/L \geq 0.5$ 인 경우, 점프현상이 일어나기 전과 후의 불안정 형태와 임계 중동력 값 및 스프링상수의 크기를 보여주는 것으로, Fig. 3과 4에 대한 구체적인 임계 중동력 값을 나열한 것이다. Table 1에서  $F$ 는 플러터,  $D$ 는 발산형 불안정을 나타내며, 점프현상이 일어날 때의 구체적인 스프링상수의 값과 임계 중동력 값을 예시하였다. 스프링의 위치  $x_k/L$ 이, 0.5부터 0.829까지는 어떤 스프링상수 값에서 불안정 형태가 플러터로부터 발산

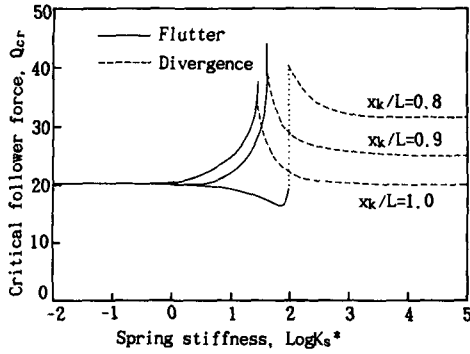


Fig. 5 Critical follower force depending on spring positions and spring stiffness( $x_k/L=0.8, 0.9, 1.0, S=10^6, R=0.0$ )

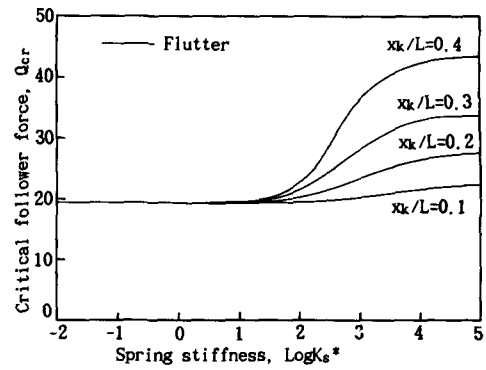


Fig. 6 Critical follower force depending on spring positions and spring stiffness( $x_k/L=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, S=10^3, R=0.0$ )

Table 1 Numerical value of critical follower forces depending on instability types ( $S=10^6, R=0.0$ )

$K_s^*$	$x_k/L$							
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.829	0.830	0.9	1.0
9000	71.25 F							
9001	81.72 D							
365		40.86 F						
366		58.13 F						
871		59.02 F						
872		59.12 D						
278			21.32 F					
279			45.89 D					
95				19.25 F				
96				39.77 D				
60					28.23 F			
61					46.58 D			
60						48.66 F		
61						45.99 D		
48							43.92 F	
49							39.18 D	
34								38.00 F
35								31.98 D

형으로 천이될 때, 임계 하중 값이 증가하거나 점프되는 경향을 나타내나, 스프링의 위치가 0.830 이상에 대해서는 불안정이 플러터로부터 발산형으로 천이될 때 임계 중동력 값은 감소됨을 알 수 있다. 그러나, 스프링의 위치가 0.6일 때는 플러터에서 플러터로의 임계 하중 값의 점프현상(스프링상수  $K_s^*=365 \rightarrow 366$ )이 일어나며, 플러터에서 발산형으

Table 2 Numerical value of critical follower forces depending on instability types ( $S=10^3, R=0.0$ )

$K_s^*$	$x_k/L$							
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.845	0.846	0.9	1.0
8083	66.23 F							
8084	74.81 D							
347		40.86 F						
348		53.79 F						
836		55.37 F						
837		55.47 D						
267			20.63 F					
268			43.62 D					
94				18.16 F				
95				37.90 D				
54					44.31 F			
55					44.33 D			
54						44.71 F		
55						43.33 D		
45							41.95 F	
46							37.60 D	
34								37.11 F
35								29.31 D

로의 천이( $K_s^*871 \rightarrow 872$ )는 일어나나 점프현상없이 단순히 증가한다.

Fig. 5와 6은 전단변형 매개변수  $S$ 가  $S=10^3$ 인 Timoshenko보에 대해, Fig. 3과 4에서처럼 스프링의 상수 크기변화와 위치변화에 따른 임계 중동력 값을 나타낸다. 스프링의 위치  $x_k/L$ 가  $x_k/L < 0.5$  일때는 Euler-Bernoulli보의 경우와 같이 스프링

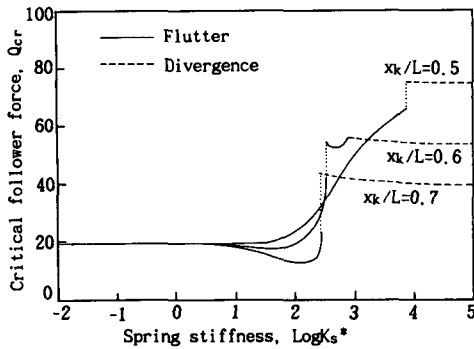


Fig. 7 Critical follower force depending on spring positions and spring stiffness( $x_k/L=0.5, 0.6, 0.7, S=10^3, R=0.0$ )

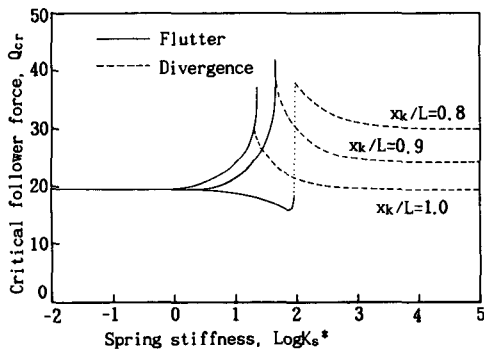


Fig. 8 Critical follower force depending on spring positions and spring stiffness( $x_k/L=0.8, 0.9, 1.0, S=10^3, R=0.0$ )

상수의 크기변화에 관계없이, 플러터형태의 불안정만이 나타나며 임계 중동력 값은 스프링상수 값이 같은 상태에서 비교하면 Euler-Bernoulli보의 그것보다 작은 값을 지닌다.

그러나, 스프링의 위치가  $x_k/L \geq 0.5$ 인 경우는 스프링위치가 같은 상태에서, 점프현상을 유발시키는 스프링상수 값도 Timoshenko보의 경우가 Euler-Bernoulli보의 값보다 작게 된다.

Table 2는 보의 전단변형을 고려한  $S=10^3$ 에 대해, 점프현상이 나타나는 전후의 스프링상수 값, 임계 중동력 값, 그리고 불안정 형태 및 그때의 스프링의 위치를 보여준다. Table 2에서도 Table 1의 Euler-Bernoulli보의 경우에서와 유사한 경향을 나타내지만, 다른점은 다음과 같다. 첫째, 스프링의 위치가 0.5부터 0.845까지는 어떤 스프링상수 값에서의 불안정 형태가 플러터로부터 발산형으로

천이될 때, 임계 중동력 값이 점프되어 증가되거나 단순히 증가( $x_k/L=0.6$ )하고, 0.846 이상에서는 점프와 함께 임계 중동력 값이 감소되거나 단순감소( $x_k/L=0.846$ )된다. 즉, 임계 중동력 값의 증가와 감소를 나타내는 스프링의 위치 값이 Table 1은 0.830이고, Table 2는 0.846을 갖는다. 둘째, 스프링의 위치가 같을 경우, 점프현상이 유발되는 스프링의 강성 값은 Euler-Bernoulli보의 경우가 Timoshenko보의 그것보다 더 큰 값을 갖는다.

#### 4. 결 론

중동력을 받는 탄성지지된 외팔보의 수치해를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 스프링의 위치가 외팔보의 고정단으로부터 보길이의 50% 이내에 위치해 있으면, 플러터 불안정이 일어나며, 임계 중동력 값은 스프링 강성의 증가에 따라 증가한다.

(2) 스프링이 보의 중간으로부터 자유단쪽에 위치하면, 스프링 강성의 증가에 의해 플러터와 발산 형태가 나타날 수 있고, 어떤 특정위치를 중심으로 불안정 형태가 플러터에서 발산형으로 천이될 때 임계 중동력 값이 점프되는 현상과 함께, 임계 중동력 값이 증가되거나 감소된다.

(3) 스프링 강성의 값  $K_s^*$ 가 작은 경우( $K_s^* \leq 34$ )는 스프링의 위치에 관계없이 항상 플러터형태의 불안정이 일어난다.

#### 참고문헌

- (1) Herrmann, G., 1967, "Stability of Equilibrium of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 20, pp. 103~108.
- (2) Sundararajan, C., 1974, "Influence of End Supports on the Stability of Non-Conservative Elastic System," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, pp. 313~315.
- (3) Pederson, P., 1977, "Influence of Boundary Conditions on the Stability of a Column under Nonconservative Load," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, pp. 445~455.
- (4) Park, Y. P. and Ryu, B. J., 1987, "Effect of a Concentrated Mass on the Stability of a Free

- Timoshenko Beam under a Controlled Follower Force," *Proceedings of the KSME/JSME Vibration Conference '87*, pp. 309~318.
- (5) Kounadis, A. N. and Katsikadelis, J. T., 1980, "On the Discontinuity of the Flutter Load for Various Types of Cantilevers," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 16, pp. 375~383.
- (6) Kounadis, A. N., 1981, "Divergence and Flutter Instability of Elastically Restrained Structures under Follower Forces," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 19, pp. 553~562.
- (7) Sugiyama, Y., Tanaka, Y., Kishi, T. and Kawagoe, H., 1985, "Effect of a Spring Support on the Stability of Pipes Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 100, pp. 257~270.
- (8) Rosa, M. A. De and Franciosi, C., 1990, "The Influence of an Intermediate Support on the Stability Behavior of Cantilever Beams Subjected to Follower Forces," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 137, pp. 107~115.
- (9) Sato, K., 1991, "Vibration and Stability of Clamped-Elastically Restrained Timoshenko Column under Nonconservative Load," *JSME International Journal*, Vol. 34, pp. 459~465.
- (10) Lee, S. Y. and Kuo, Y. H., 1991, "Elastic Stability of Non-Uniform Columns," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 148, No. 1, pp. 11~24.
- (11) Lee, S. Y., Kuo, Y. H. and Lin, F. Y., 1992, "Stability of a Timoshenko Beam Resting on a Winkler Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 153, No.2, pp. 193~202.
- (12) Chen, L. W. and Ku, D. M., 1992, "Eigenvalue Sensitivity in the Stability Analysis of Beck's Column with a Concentrated Mass at the Free End," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 153, No.3, pp. 403~411.