

〈論 文〉

굽힘을 고려한 원형 및 정사각형컵 딥드로잉 공정의 탄소성 유한요소해석

심현보* · 양동열**

(1994년 2월 7일 접수)

Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Deep Drawings of Circular and Square Cups Considering Bending

H. B. Shim and D. Y. Yang

Key Words : Elastic-Plastic FEM(탄소성 유한요소법), Natural Convected Coordinate(국부질 점좌표계), Shell Analysis(셸해석), Deep Drawing(딥드로잉), Square Cup(사각형컵), Circular Cup(원형컵), Numerical Buckling(수치적 좌굴)

Abstract

Both cylindrical cup drawing and square cup drawing are analyzed using membrane analysis as well as shell analysis by the elastic-plastic finite element method. An incremental formulation incorporating the effect of large deformation and normal anisotropy is used for the analysis of elastic-plastic non-steady deformation. The computed results are compared with the existing experimental results to show the validity of the analysis. Comparisons are made in the punch load and distribution of thickness strain between the membrane analysis and the shell analysis for both cylindrical and square cup drawing processes. In punch load, both analyses show very little difference and also show generally good agreement with the experiment. For the cylindrical cup deep drawing, the computed thickness strain of a membrane analysis, however, shows a wide difference with the experiment. In the shell analysis, the thickness strain shows good agreement with the experiment. For the square cup deep drawing, both membrane and shell analyses show a wide difference with experiment, this may be attributable to the ignorance of the shear deformation. Concludingly, it has been shown that the membrane approach shows a limitation for the deep drawing process in which the effect of bending is not negligible and more exact information on the thickness strain distribution is required.

기 호 설 명

E : 탄성계수
 R : 이방성계수
 t_i : 외력의 Cartesian 좌표계 성분
 τ^{ab} : Kirchhoff응력 성분

S^{ab} : 2nd Piola-kirchhoff응력 성분
 B_L, B_{NL} : Kagraugian 변형도와 변위관계 행렬
 E_a, E^a : 시간 t_0 에서의 기저벡터
 e_a, e^a : 시간 $t_0 + \Delta t$ 에서의 기저벡터
 G_{ab}, G^{ab} : 시간 t_0 에서의 메트릭텐서
 g_{ab}, g^{ab} : 시간 $t_0 + \Delta t$ 에서의 메트릭텐서
 h_k : 셸 중립면에서의 형상함수

*정회원, 영남대학교 기계공학과

**정회원, 한국과학기술원 정밀공학과

- K : 강성행렬
- R : 외력에 의한 절점력벡터
- F : 응력 발산항에 의한 절점력벡터
- u_i : 변위의 Cartesian 성분
- u_{α}, u^{α} : 변위의 실험 좌표계 성분
- X : 절점의 위치벡터
- β_1^k, β_2^k : 셀 중립면의 회전각
- $L^{\alpha\beta\gamma\delta}$: 구성방정식텐서
- ϵ : Lagrangian 변형도텐서
- $\epsilon_{\alpha\beta}, \epsilon^{\alpha\beta}$: Lagrangian 변형도텐서 성분
- $e_{\alpha\beta}$: Lagrangian 변형도텐서의 선형부분
- $\eta_{\alpha\beta}$: Lagrangian 변형도텐서의 비선형부분
- θ^{α} : 국부절점좌표계 성분
- V_n^k, v_n^k : 셀 중립면의 수직벡터
- X, x : 절점의 위치벡터
- X^k, x^k : 절점 k 의 위치벡터

1. 서 론

박판성형 공정은 굽힘(bending)보다는 대부분 인장(stretching)에 의하여 성형이 이루어지기 때문에 대부분의 박판성형 공정의 해석에서는 굽힘과 판두께 방향의 전단응력을 무시하는 박막해석법(membrane analysis)이 널리 사용되고 있으나 딥드로잉이나 굽힘가공 공정과 같이 공정의 특성상 굽힘의 효과가 무시될 수 없을 정도로 나타나는 공정도 있으며 이러한 공정의 해석에는 적절한 방법으로 굽힘의 효과를 고려할 필요가 있다.

딥드로잉 공정에서는 펀치(punch)의 진행에 따라 플랜지(flange)가 다이구멍(die cavity)속으로 빨려 들어가면서 컵의 벽면을 형성하게 된다. 이때 플랜지 부위는 다이라운드(die round)를 따라서 굽힘이 일어나고 다이라운드를 통과한 소재는 퍼짐(unbending)이 발생되면서 컵의 벽면을 형성한다. 드로잉 하중은 펀치가 진행됨에 따라 어느 한도까지는 점차 증가하나 그 한도를 지나면 플랜지가 감소되면서 드로잉에 대한 저항력이 감소되어 드로잉 하중이 감소된다. 이때 하중이 감소되는 구간에서는 컵의 벽면부위에서는 해중(unloading)이 발생한다. 따라서 딥드로잉 공정을 정확히 해석하기 위하여는 적절한 방법으로 굽힘 및 해중을 고려해 줄 필요가 있다. 강소성 유한요소법에서는 해중이 발생할 경우 이 구간이 강체영역(rigid zone)으로 되

어 해를 구할 수가 없다. 따라서 강체영역이 발생되었을 경우는 이 영역에 특별한 처리기법을 동원하여 해를 구하기 때문에 해의 정확성은 떨어진다. 탄소성 유한요소법에서는 이 구간에 대한 특별한 처리가 필요없어 해의 정확도를 높일 수 있는 장점이 있다.

박판성형 공정의 탄소성 유한요소해석은 사용하는 유한요소의 종류에 따라, 박막해석(membrane analysis), 셀해석(shell analysis) 및 연속체해석(continuum analysis) 등의 크게 3가지의 범주로 나눌 수가 있다.

Wang(1978), Arlinghaus(1985), Mattiason(1987), Massoni(1987), Saran(1989) 및 Batoz(1989) 등의 해석에서 사용된 박막해석법은 계산시간이 적다는 장점때문에 여러가지 박판성형 공정에 가장 널리 사용되고 있는 방법이나 굽힘이 지배적인 공정에 적용하였을 경우에는 부정확한 정보를 제공할 가능성이 많다. Wifi(1976), Anderson(1982), Stalman(1986), Makinouchi(1987, 1989) 및 Keck(1989) 등에 의해 사용된 연속체해석법은 굽힘효과를 고려할 수 있고, 수식화가 간단하다는 장점이 있으나 3차원 문제를 해석할 경우에는 계산에 소요되는 시간이 과도할 뿐만 아니라 계산기에 요구되는 기억용량이 매우 크게 요구되기 때문에 주로 축대칭이나 평면변형과 같은 2차원 문제에만 주로 적용되고 있다. Tatenami(1982), Wang(1986, 1988), Gelin(1986), Honnor(1987), Batoz(1989) 및 Honecker(1989) 등의 해석에서 사용된 셀해석법은 앞서의 연속체해석과 박막해석법의 타협적인 해석방법으로 간주될 수 있다. 즉 상대적으로 적은 계산시간으로 굽힘의 효과까지 고려할 수 있으나 3차원 셀의 경우 역학적인 거동(kinematics)을 다루기가 어려우며 계산시간등의 관점때문에 이 역시 2차원 문제에만 주로 사용되고 있다.

최근들어 박막해석, 연속체해석 및 셀해석의 비교를 통하여 박판성형 공정에서 굽힘의 영향을 조사하는 연구가 이루어지고 있다. Wang과 Tang(1988)은 축대칭 스트레칭과 축대칭 딥드로잉 공정을 축대칭 박막요소 및 축대칭 셀요소를 이용하여 해석하여, 스트레칭 공정의 경우 양 해석법이 큰 차이를 보이지 않았으나 딥드로잉 공정의 경우 양 해석법사이에는 큰 차이를 보여줌을 알았다. Hambrecht 등(1989)은 평면변형 스트레칭과 축대

칭 스트레칭 공정을 상기의 3가지 해석방법으로 해석하여 실험결과와 비교하였다. 딥드로잉 공정에서는 연속체해석법에 의한 결과나 셀해석법에 의한 결과가 실험과 잘 일치하고 있으나 박막해석법에 의한 결과는 실험결과와 차이를 보여주고 있어 딥드로잉 공정의 해석에는 연속체해석법이나 셀해석법이 필요함을 알았고 스트레칭 공정에서는 3가지의 해석방법 모두가 실험과 잘 일치하여 박막 해석법도 유효함을 알았다. Yang 등(1990)은 정사각형 박판의 스트레칭과 원형컵의 딥드로잉 공정을 박막요소를 이용한 강소성 유한요소법으로 해석하여 인장이 지배적인 공정과 드로잉이 지배적인 공정에서의 굽힘의 영향을 조사하였다. 최근의 연구결과를 종합할 때 박판성형 공정의 해석에서의 굽힘의 효과의 중요성은 점차 증대되고 있으며 딥드로잉 공정의 설계에 필요한 보다 정확한 정보를 얻기 위하여는 굽힘의 효과의 고려가 필수적임을 보여준다.

본 연구에서는 원형컵과 정사각형컵의 딥드로잉 공정을 박막요소와 셀요소를 이용한 탄소성 유한요소법으로 각각 해석하여 해석 결과를 알려진 실험결과와 각각 비교하여 굽힘의 효과를 조사하였다. 박판은 수직 이방성으로 가정하였으며 접촉과 마찰 조건은 Yang 등(1990)에 의해 사용된 경사면 좌표계(skew coordinate system)를 이용하여 처리하였다.

2. 이론

2.1 탄소성재료에 대한 Updated Lagrangian 수식의 유도

Fig. 1과 같이 3차원 공간상에 있는 변형체를 생각하자. 비정상상태 변형(non-steady state deformation)을 해석하기 위하여 시간 t_0 에서 시간 $t_0 + \Delta t$ 사이의 한 스텝동안의 변형을 생각한다.

Fig. 1에서 θ^1 과 θ^2 축은 물체 표면상의 질점좌표계(surface convected coordinate system)로 하고 θ^3 축은 박판의 표면에 수직인 좌표축으로 생각하자. $G_{\alpha\beta}$ 와 $g_{\alpha\beta}$ 를 각각 변형전과 변형후의 메트릭 텐서(metric tensors), $G^{\alpha\beta}$ 와 $g^{\alpha\beta}$ 를 각각의 역(inverse)을 나타낸다. 또한 변형전의 베이스벡터(base vector)를 E_α , 이의 역(reciprocal)을 E^α 로 하고 변형후의 베이스벡터를 e_α , 이의 역을 e^α 로 하면 다음의 식이 성립된다.

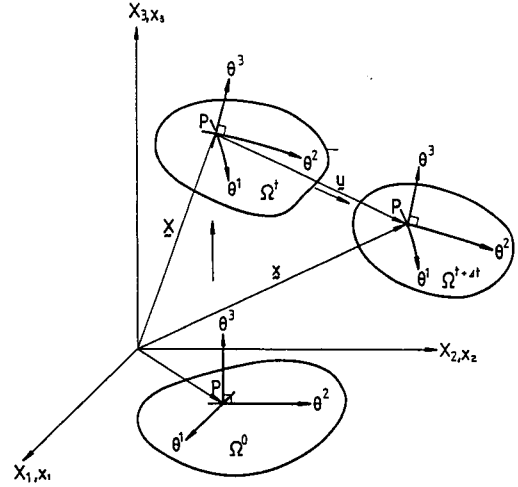


Fig. 1 Convected coordinate system in the deformation process

$$E_\alpha = \frac{\partial X}{\partial \theta^\alpha} \quad e_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \theta^\alpha} \quad (1)$$

$$G_{\alpha\beta} = E_\alpha \cdot E_\beta \quad g_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta \quad (2)$$

$$E^\alpha = G^{\alpha\beta} E_\beta \quad e^\alpha = g^{\alpha\beta} e_\beta \quad (3)$$

변형전의 상태에서의 변위벡터(displacement vector) u 는 다음과 같이 표현된다.

$$u = u^\alpha E_\alpha = u_\alpha E^\alpha = u_i E^i \quad (4)$$

여기서, $u^\alpha = G^{\alpha\beta} u_\beta$, 그리스첨자(Greek indice)는 질점좌표계의 성분임을 표시하고 라틴 첨자(Latin indice)는 직교 Cartesian 좌표계의 성분임을 나타낸다. 질점좌표계에서의 Lagrangian 변형도텐서 ϵ 는 다음의 식으로 표현이 된다.

$$\epsilon = \epsilon_{\alpha\beta} E^\alpha E^\beta = \epsilon^{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{,\alpha}^r u_{\gamma,\beta}) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, (comma)는 변형전의 상태를 기준한 covariant differentiation을 나타낸다. Lagrangian 변형도텐서를 선형부분과 비선형부분으로 분리하면

$$\epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \quad (7)$$

여기서, $e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})$, $\eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}u_{,\alpha}^r u_{\gamma,\beta}$

대변형을 고려한 updated Lagrangian 수식은 다음의 식으로 표현된다.

$$\int_{V_0} \Delta S^{ab} \delta e_{ab} dV + \int_{V_0} \tau^{ab} u_{n,a} \delta u_{,b}^k dV = \int_{S_0^i} t_i^{(t_0+dt)} \delta u_i dS - \int_{V_0} \tau^{ab} \delta e_{ab} dV \quad (8)$$

2nd Piola-Kirchhoff 응력증분과 Lagrangian 변형도와의 관계로 주어지는 구성방정식(constitutive tensor) $L^{a\beta\gamma\rho}$ 에 대하여 응력증분 ΔS^{ab} 는

$$\Delta S^{ab} = L^{a\beta\gamma\rho} e_{\gamma\rho} \quad (9)$$

식(8) 및 식(9)에 대한 자세한 유도과정은 Shim과 Yang(1990) 논문의 부록(appendix)에 나타나 있다. Hill의 이방성 소성이론을 만족하는 평면응력 탄소성 구성방정식은 다음과 같다. (Wang, 1989, Mattiason, 1985)

$$L^{a\beta\gamma\rho} = \frac{E(1+R)}{1+2R} \left\{ \frac{1}{2} (g^{a\gamma} g^{b\rho} + g^{a\rho} g^{b\gamma}) + R g^{ab} g^{\gamma\rho} \right\} - \Gamma \frac{E^2 \tau^{ab} \tau^{\gamma\rho}}{\bar{\sigma}^2 (E+h')} - \frac{1}{2} (g^{a\gamma} \tau^{b\rho} + g^{b\gamma} \tau^{a\rho} + g^{a\rho} \tau^{b\gamma} + g^{b\rho} \tau^{a\gamma}) \quad (10)$$

여기서, 그리스첨자는 1부터 2사이의 범위를 나타낸다.

식(8)과 식(9)를 결합하면 탄소성 재료에 대한 최종적인 updated Lagrangian 수식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\int_{V_0} L^{a\beta\gamma\rho} e_{ab} \delta e_{\gamma\rho} dV + \int_{V_0} \tau^{ab} \frac{\partial u_i}{\partial \theta^a} \cdot \frac{\partial \delta u_i}{\partial \theta^b} dV = \int_{S_0^i} t_i^{(t_0+dt)} \delta u_i dS - \int_{V_0} \tau^{ab} \delta e_{ab} dV \quad (11)$$

절점좌표계에서의 2nd Piola-Kirchhoff 응력텐서의 성분은 Kirchhoff 응력텐서의 성분과 같아진다는 점을 이용하면 응력적분의 과정이 다른 좌표계를 택하였을 경우에 비하여 매우 간단해진다. 식(11)으로부터 변위가 구해지면 응력의 증분은 식(9)를 이용하여 구할 수 있고 시간 $t_0 + \Delta t$ 에서의 응력의 성분은 다음의 식(12) 및 식(13)을 이용하면 구할 수 있다.

$$(S^{ab})^{(t_0+dt)} = (S^{ab})^{t_0} + \Delta S^{ab} \quad (12)$$

$$(\tau^{ab})^{(t_0+dt)} = (S^{ab})^{(t_0+dt)} \quad (13)$$

또한 재료를 비압축성이라고 가정하면 Kirchhoff 응력텐서 τ 는 Cauchy 응력 텐서 σ 와 같아진다.

2.2 적층 셀요소의 수식화

셀요소에 대한 유한요소 방정식은 요소의 변형

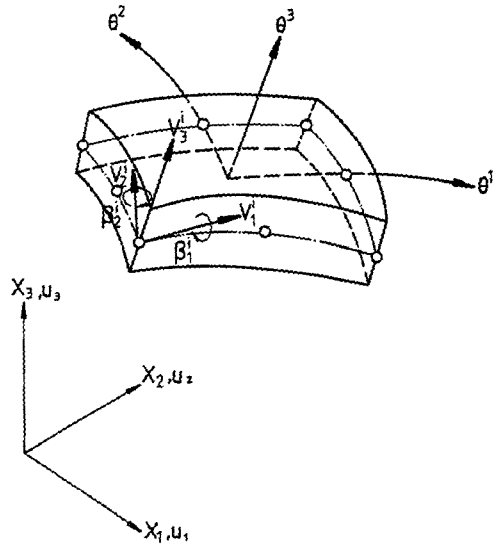


Fig. 2 Nodal degrees of freedom of a degenerated shell element

거동을 고려함으로써 얻어진다. Fig. 2와 같은 적층 셀요소(degenerated shell element)는 변위장을 좌표계와 등변수적인 표현(isoparametric expression)이 가능하기 때문에 수식화가 일관성이 있어 널리 사용되고 있으며 또한 셀의 표면을 정확히 표현할 수가 있어 접촉조건을 가지는 박판 성형공정의 해석에 적합한 셀요소로 알려져 있다.

굽힘에 의해 두께방향으로는 가공정확도의 정도 및 응력, 변형도가 달라지기 때문에 이러한 변화를 고려하기 위하여 Fig. 3과 같이 요소를 두께방향으로

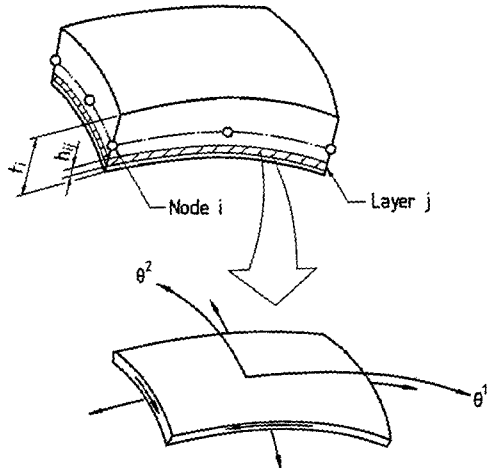


Fig. 3 Finite element model of a layered shell structure

몇 개의 층으로 나누어서 생각한다. 종래의 적층 셀요소는 두께방향의 수직응력을 제외한 다섯 개의 응력성분을 고려하고 있으나 본 연구에서는 박판성형에 사용되는 소재의 두께가 다른 치수에 비하여 훨씬 작기 때문에 평면응력 상태에 있는 것으로 생각을 하여 각 층에서는 평면응력의 세 개의 응력성분만으로 고려하였다. 따라서 본 연구에서 사용되는 적층셀은 이러한 가정을 도입함에 따라 박막수식의 확장의 개념이 된다.

시간 t_0 와 시간 $t_0 + \Delta t$ 에서의 질점(material point)의 좌표는 각각 다음의 식으로 표현된다.

$$X = \sum_{k=1}^m h_k X^k + \frac{\theta^3}{2} \sum_{k=1}^m a_k h_k V_N^k \quad (14)$$

$$x = \sum_{k=1}^m h_k x^k + \frac{\theta^3}{2} \sum_{k=1}^m a_k h_k v_n^k \quad (15)$$

여기서, a_k 는 절점(node) k 에서의 두께를 나타내고, h_k 는 절점 k 에 해당되는 형상함수(shape function)를 나타내고, V_N^k 과 v_n^k 은 절점 k 에서의 각각 변형전과 변형후의 셀 중립면에 대한 θ^3 방향의 단위벡터를 나타낸다고 하자.

시간증분 Δt 동안의 변위 u 는 다음과 같이 표현되고

$$u = x - X \quad (16)$$

식(14)와 식(15)를 식(16)에 대입하면 변위장이 다음과 같이 표현된다.

$$u = \sum_{k=1}^m h_k u^k + \frac{\theta^3}{2} \sum_{k=1}^m a_k h_k (v_n^k - V_N^k) \quad (17)$$

여기서, β_1^k 과 β_2^k 를 각각 시간 t_0 에서 시간 $t_0 + \Delta t$ 동안에 수직벡터 V_N^k 가 V_1^k 축과 V_2^k 축에 대한 회전각으로 생각하면 미소한 회전각 β_1^k 과 β_2^k 에 대하여

$$v_n^k - V_N^k = -V_2^k \beta_1^k + V_1^k \beta_2^k \quad (18)$$

식(18)을 식(17)에 대입하면 미소한 회전에 대하여 다음과 같은 변위장을 얻을 수 있다.

$$u = \sum_{k=1}^m h_k u^k + \frac{\theta^3}{2} \sum_{k=1}^m a_k h_k [-V_1^k \beta_1^k + V_2^k \beta_2^k] \quad (19)$$

2.3 유한요소 방정식

Fig. 1에서 표현한 바와 같이 X_i 를 시간 t_0 에서의 질점의 Cartesian 좌표성분을 나타내고 u_i 를 시간 Δt 동안의 질점의 변위로 생각하자. 앞서의 수

식은 임의의 질점좌표계에 대하여 유도된 수식이고 유한요소의 국부좌표계(natural coordinates)가 질점 좌표계의 성질을 갖는다는 점을 이용하면 국부좌표계를 질점좌표계로 채택하여도 무방하다. 국부 질점좌표계(natural convected coordinate system)에서의 Lagrangian 변형도는 다음과 같다.

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta^\alpha} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \theta^\beta} + \frac{\partial u_i}{\partial \theta^\beta} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \theta^\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial \theta^\alpha} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \theta^\beta} \right) \quad (20)$$

질점의 Cartesian 좌표와 변위는 다음의 행렬식으로 표현된다.

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = H \cdot \bar{X} \quad (21)$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = H \cdot \bar{u} \quad (22)$$

여기서, H 는 좌표에 대한 형상함수(shape function)이고 H 는 변위에 대한 형상함수, 또한 \bar{X} 와 \bar{u} 는 다음과 같이 표현되는 질점의 좌표 및 변위이다.

$$\begin{aligned} \bar{X}^T &= \{X_1^1, X_2^1, X_3^1, X_1^2, X_2^2, X_3^2, \dots, X_1^n, X_2^n, X_3^n\} \\ \bar{u}^T &= \{u_1^1, u_2^1, u_3^1, \beta_1^1, \beta_2^1, u_1^2, u_2^2, u_3^2, \beta_1^2, \beta_2^2, \dots, \\ &u_1^n, u_2^n, u_3^n, \beta_1^n, \beta_2^n\} \end{aligned} \quad (22)$$

Lagrangian 변형도텐서 e 의 선형부분은

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta^\alpha} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \theta^\beta} + \frac{\partial u_i}{\partial \theta^\beta} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \theta^\alpha} \right) \quad (23)$$

따라서

$$e = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}^T \cdot B_{L1} \cdot \bar{u} \\ \bar{X}^T \cdot B_{L2} \cdot \bar{u} \\ \bar{X}^T \cdot B_{L3} \cdot \bar{u} \end{pmatrix} = B_L \cdot \bar{u} \quad (24)$$

으로 표현되고 여기서 B_{L1} , B_{L2} 및 B_{L3} 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_{L1} &= \frac{\partial H^T}{\partial \theta^1} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta^1} \\ B_{L2} &= \frac{\partial H^T}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta^2} \\ B_{L3} &= \frac{\partial H^T}{\partial \theta^1} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta^2} + \frac{\partial H^T}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta^1} \end{aligned} \quad (25)$$

Lagrangian 변형도텐서의 비선형부분의 표현은 다

음의 식을 고려함으로써 이루어진다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta^1} \frac{\partial u}{\partial \theta^2}\right)^T &= (B_{NL_1} \cdot \bar{u} \ B_{NL_2} \cdot \bar{u})^T \\ &= (B_{NL} \cdot \bar{u})^T \end{aligned} \quad (26)$$

여기서,

$$B_{NL_1} = \frac{\partial H}{\partial \theta^1}, \quad B_{NL_2} = \frac{\partial H}{\partial \theta^2}$$

식 (11)의 행렬식은 Newton-Raphson법을 이용한 면 식 (27)과 같이 표현된다.

$$K \cdot \Delta \bar{u}^{(i)} = R - F^{(i-1)} \quad (27)$$

여기서,

$$K = \int_{V_0} B_L^T \cdot C \cdot B_L dV + \int_{V_0} B_{NL}^T \cdot \tau \cdot B_{NL} dV \quad (28)$$

$$F = \int_{V_0} B_L^T \cdot \tau dV \quad (29)$$

으로 표현이 되고 식 (28)의 C 는 식 (10)에서 주어지는 구성방정식 텐서이고 $F^{(i-1)}$ 는 시간 $(t_0 + \Delta t)$, $(i-1)$ 번째의 축차(iteration)에서의 응력 발산항(stress divergence term)이고 R 은 시간 $(t_0 + \Delta t)$ 에서의 외력벡터를 나타낸다. R 에 관한 자세한 유도과정은 Kim과 Yang(1985)의 논문에 나타나 있다.

$$\bar{u}^{(i)} = \bar{u}^{(i-1)} + \beta \Delta \bar{u}^{(i)} \quad (30)$$

여기서, $\bar{u}^{(i-1)}$ 는 현재 상태의 변위벡터이고 $\Delta \bar{u}^{(i)}$ 는 변위의 변화량, 그리고 β 는 해의 발산을 막기 위하여 도입한 감속계수이다. $(0 < \beta \leq 1)$ 식 (27)에 대한 반복계산은 다음의 조건이 만족될 때까지 계속된다.

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leq \delta \quad (31)$$

여기서, $\|\cdot\|$ 는 euclidean norm이고 δ 는 대략 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 사이의 작은 상수이다.

3. 수치해석 및 고찰

딥드로잉 공정은 박판성형의 대표적인 공정이나 여타의 박판성형 공정에 비하여 역학적으로 매우 복잡한 변형거동을 보여준다. 즉, 대부분의 박판성형 공정은 주로 인장에 의해 성형이 이루어지나 딥드로잉 공정에서는 굽힘, 찌짐, 해중의 발생 및 압축응력의 존재 등의 원인으로 유한요소법으로 해석

하기에는 어려움이 있다.

딥드로잉 공정에서는 컵의 벽면의 축방향과 플랜지의 반경방향으로는 인장응력 상태에 있으나 원주방향으로는 압축응력 상태에 있고, 박판의 두께가 여타의 치수에 비하여 작기 때문에 굽힘에 대한 저항이 작아서 이러한 압축응력이 쉽게 주름현상(wrinkling)을 유발시킨다. 또한 이러한 압축응력은 수치해석에서도 수치적인 좌굴현상(numerical buckling)을 유발시킨다. 즉, 이러한 수치적인 좌굴현상은 실제로 주름을 발생시키는 압축응력보다도 훨씬 낮은 압축응력 상태에서 실제의 좌굴현상과 마찬가지로 유한요소해석 도중에 압축응력이 가하여지는 부분에서 발생하는 유한요소 메쉬의 좌굴현상이다. (Yang, Chung and Shim, 1990)

해석결과를 실험결과와 비교하기 위하여 Yang 등(1990)의 실험결과를 인용하였고 때 사용된 재질은 다음과 같다.

재질	Aluminum-killed steel
박판두께	$t_0 = 0.8 \text{ mm}$
응력변형도-곡선	$\bar{\sigma} = 508.79(0.001 + \bar{\epsilon}_p)^{0.247} \text{ MPa}$
탄성계수	$E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$
Lankford 값	$R = 1.867$

해석에 사용된 마찰계수는 감음마찰장치(Lee, Shim and Yang, 1988)를 이용하여 구한 결과를 이용하였다.

3.1 원형컵의 딥드로잉

원형컵의 딥드로잉의 실험 및 해석에 사용된 공정변수는 아래와 같다.

블랭크 직경	$\phi 120 \text{ mm}$
펀치 직경	$\phi 60 \text{ mm}$
다이개구부 직경	$\phi 62.5 \text{ mm}$
펀치라운드 반경	5 mm
다이라운드 반경	5 mm
Coulomb 마찰계수	$\mu = 0.24$: 펀치측 $\mu = 0.12$: 다이측
블랭크 가압력	9800 N

Fig. 4(a)는 이 공정에 대한 개략도를 나타내고 있으며 Fig. 4(b)는 박막해석과 셀해석에 공통으로 사용된 유한요소 메쉬로 50개의 절점과 24개의 사각형 요소를 사용하였다.

셀해석에서는 각요소를 5개의 층으로 나누었고

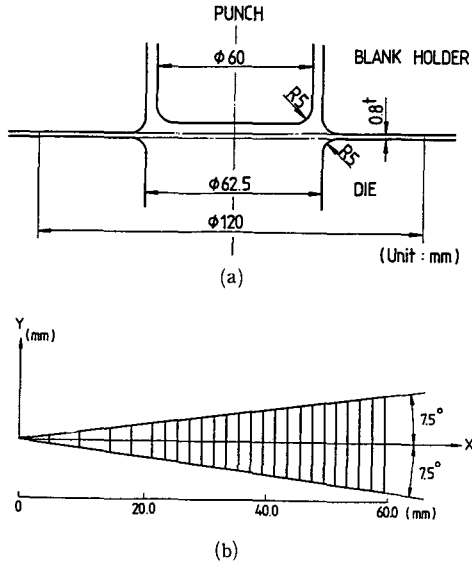


Fig. 4 Geometry of the tooling and finite element mesh system used in the analyses of deep drawing of a cylindrical cup

대칭성을 이용하여 $\theta=15^\circ$ 의 섹터 하나만을 채택하여 해석하였다. 딥드로잉 공정시 초기 블랭크를 다이와 블랭크홀더 사이에 넣고 블랭크를 가압한 후 펀치를 진행시켜 컵을 성형하게 된다. 원래 다이와 블랭크 사이에 있던 플랜지가 다이 공동부(die cavity)로 빨려 들어가면서 컵의 벽면을 형성하게 되는데 플랜지가 빨려 들어감에 따라 다이측에 있는 플랜지는 점차 두꺼워지게 되고 그 정도는 플랜지의 최외각 부위가 가장 크게 나타난다. 이때 일정한 힘으로 블랭크를 가압하고 있는 블랭크홀더는 플랜지의 두께에 따라 다이와의 간극이 벌어지게 된다. 따라서 궁극적으로는 플랜지의 가장 두꺼운 부분과 블랭크홀더가 접촉하게 되므로 블랭크가 압력에 의한 마찰력은 플랜지의 최외각에만 작용한다. 따라서 본 해석에서는 공정도중에 일정하게 유지시키고 있는 블랭크 가압력에 의한 마찰력을 플랜지의 최외각 부위에만 가하였다. 초기 감속계수를 0.1로 택하여 계산의 진행정도에 따라 변화하도록 하였으며 5×10^{-5} 의 fractional norm까지 도달하는데 약 10번 정도의 반복계산이 필요하였다. 각 증분 스텝당 펀치의 변위는 0.2 mm로 택하여 50 mm까지 펀치를 진행시켰고, 계산에 소요된 시간은 박막해석에서는 SUN 3/110 워크스테이션에서 약 7400 CP 초가 소요되었으며 셀해석의 경우 CRAY

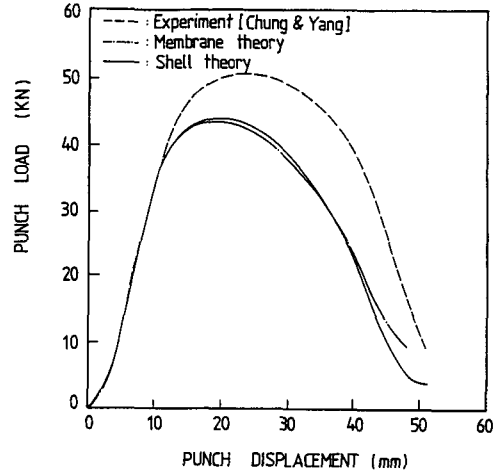


Fig. 5 Comparison of drawing load between the computed results and the experiment; deep drawing of a cylindrical cup

2S에서 약 3500 CP 초가 소요되었다.

Fig. 5는 펀치의 변위와 드로잉 하중의 관계를 나타내고 있으며 박막해석과 셀해석 모두 드로잉 하중은 초기에는 실험결과와 잘 일치하고 있으나 변형의 후반으로 가면서 약간의 차이를 보여주고 있으며 양 해석의 결과는 큰 차이를 보여주지 않음을 알 수 있다. 해석에서 구하여진 최대 성형하중은 실험에서 구한 결과보다 약간 낮은 값으로 예측되었다. 이는 성형이 진행됨에 따라 극심한 상대운동과 높은 면압때문에 다이라운드 부근에서 다이와 박판사이의 윤활제가 압착되어 빠져나오는 현상이 실제로 관찰된 바와 같이 다이라운드 부근에서 윤활막이 깨어져 다이라운드 부근의 마찰조건은 계산에서 사용된 마찰조건보다 훨씬 가혹한 조건에서 변형이 이루어졌기 때문으로 생각된다. 또 하나의 원인으로서는 박판의 두께에 비하여 다이라운드의 반경이 작은 편이기 때문에 가정에서 무시하였던 전단 변형도 하나의 원인으로 추정된다. 즉 박판의 두께가 0.8 mm으로 일반적인 관점에서 볼 때는 얇은 편이지만 이를 실제로 굽힘이 일어나는 다이라운드의 반경 5 mm와 비교할 경우에는 작은 값이 아니기 때문에 얇은 판이라는 가정하의 평면응력의 가정이 이 구간에서는 타당성이 적고 비평면응력성분(out-of-plane stress)으로 두께방향의 응력성분으로 전단응력을 고려하여야 더욱 정확한 결과를 얻을 수 있을 것으로 생각된다. 그러나 박판의 두께에 비하여 다이라운드가 크게 설계되는 실제의

대형제품의 딥드로잉 공정의 해석에는 평면응력 상태로 가정하여도 무리가 없을 것으로 생각된다.

Fig. 6과 Fig. 7은 펀치 행정이 각각 30.4 mm 및 46.0 mm인 경우에 대하여 두께 변형도의 분포를 표시하였다. 컵의 바닥과 플랜지 부위에서는 박막해석과 쉘해석이 서로 비슷한 결과를 보여주고 있으며 특히 컵의 바닥부근에서의 두께 변형도는 두 가지 해석결과 모두 실험결과와 잘 일치하고 있다.

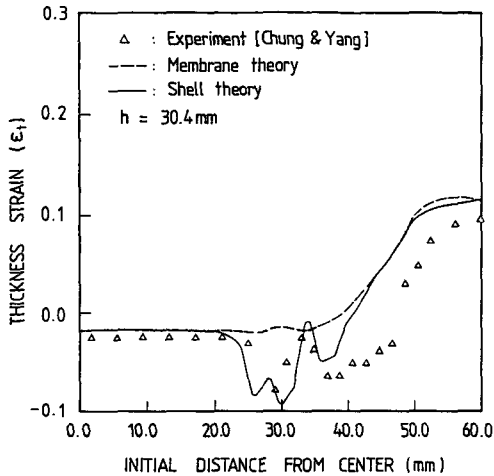


Fig. 6 Comparison of the thickness strain distribution between the computed results and the experiment ($h=30.4$ mm) : deep drawing of a cylindrical cup

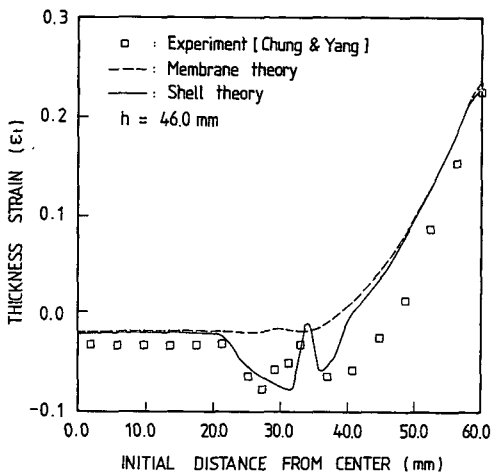


Fig. 7 Comparison of the thickness strain distribution between the computed results and the experiment ($h=46.0$ mm) : deep drawing of a cylindrical cup

그러나 실험에서 나타난 펀치라운드 부근의 벽면이 얇아지는 현상은 박막해석으로는 예측이 안되었으나 쉘해석에서는 잘 예측하고 있다. 대체로 두께 변형도의 예측에 대한 쉘해석의 결과는 박막해석의 결과에 비하여 전영역에 걸쳐 실험과 잘 일치하고 있다. 이러한 양 해석법의 결과의 차이는 굽힘의 영향으로 짐작되며 딥드로잉 공정의 해석에는 쉘해석법의 도입이 필요함을 보여준다.

원형컵 딥드로잉의 해석결과로부터 굽힘의 영향은 드로잉 하중에는 큰 영향을 주지 못하나 두께 변형도의 분포에는 크게 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

3.2 원형블랭크로부터의 정사각형컵의 딥드로잉

정사각형 컵의 딥드로잉은 여타의 유사공정에서 나타날 수 있는 여러가지 변형거동을 모두 나타내고 있어 비축대칭 딥드로잉의 가장 대표적인 공정 중의 하나로 생각할 수 있다. Toh와 Kobayashi (1983)는 박막해석법으로 여러가지 모양의 블랭크로부터 정사각형 컵의 딥드로잉을 강소성 유한요소 해석을 하였고, Yang 등(1990)은 역시 박막요소를 채택한 강소성 유한요소법으로 원형블랭크로부터의 정사각형컵의 딥드로잉을 해석한 바가 있다.

본 연구에서는 원형블랭크로부터 정사각형 컵의 딥드로잉 공정을 각각 박막요소와 쉘요소를 이용한 탄소성 유한요소법으로 해석하고 실험결과와 비교하였다. 실험과 해석에 사용된 공정변수는 다음과 같다.

- 블랭크 직경 90 mm
- 펀치 크기 40 mm×40 mm
- 펀치라운드 반경 5 mm
- 펀치모서리 반경 5 mm
- 다이 개구부 크기 42.5 mm×42.5 mm
- 다이라운드 반경 5 mm
- 다이모서리 반경 5 mm
- Coulomb 마찰계수 $\mu=0.24$: 펀치측
 $\mu=0.12$: 다이측
- 블랭크 가압력 7840 N

Fig. 8은 정사각형컵의 딥드로잉 공정의 개략도를 나타내고 있으며 Fig. 9는 이 공정의 해석에 사용된 유한요소 메쉬로 대칭성, 계산시간 및 계산용량의 관점을 고려하여 구성되었고 쉘해석에서는 박막해석에 사용된 메쉬를 그대로 사용하였으며 두

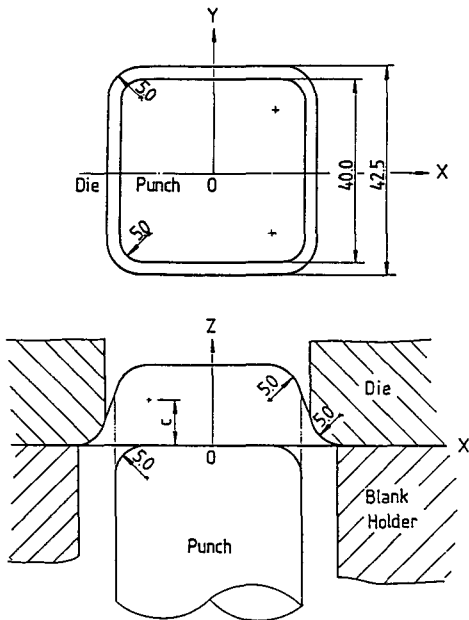


Fig. 8 Geometry of the tooling for deep drawing of a square cup

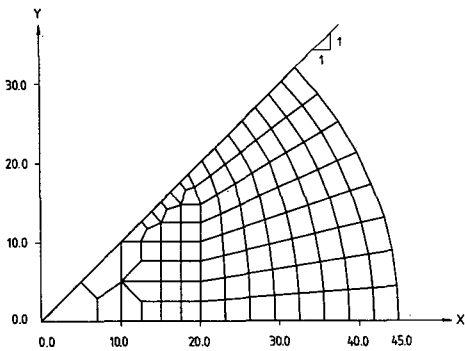


Fig. 9 Finite element meshes used in the analysis of deep drawing of a square cup from a circular blank

계방향으로 3개의 층으로 나누어 해석하였다. 블랭크 가압력은 원형컵의 딥드로잉과 마찬가지로 플랜지의 최외각부에만 가하여진다고 가정하였다. 초기 감속계수를 0.1로 택하여 계산의 진행정도에 따라 적절히 변화하도록 하였으며 5×10^{-5} 의 fractional norm까지 도달하는데 약 10~25번 정도의 반복계산이 필요하였다. 각 증분 스텝당 펀치의 변위는 0.2 mm로 택하여 21 mm까지 펀치를 진행시켰다. 계산에 소요된 시간은 박막해석에서는 SUN 3/110 워크스테이션에서 약 21000 CP 초과 소요되었으며

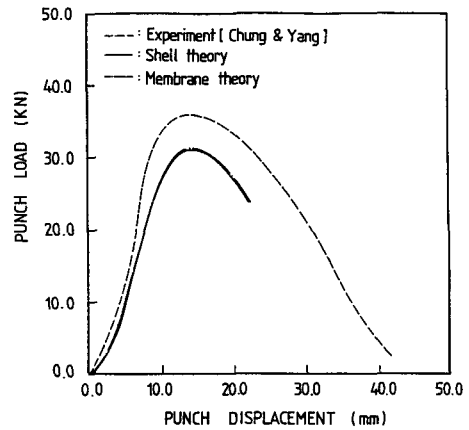


Fig. 10 Comparison of drawing load between the computed results and the experiment : deep drawing of a square cup from a circular blank

셀해석의 경우 CRAY 2S에서 약 5900 CP 초과 소요되었다.

Fig. 10은 펀치변위와 드로잉 하중과의 관계를 나타내고 있다. 박막해석 및 셀해석에서 예측된 드로잉 하중은 실험결과에 비하여 약간 낮게 예측되고 있으나 이러한 차이는 원형컵의 해석에서와 마찬가지로 공정도중 마찰경계조건의 변화와 두께방향의 전단변형을 무시한 점 때문으로 생각된다. 특히 컵의 모서리 부분의 플랜지와 컵의 벽면부위는 압축응력에 의해 수치적인 좌굴현상이 나타났다. 이러한 수치적인 좌굴현상이 발생되면 변형체의 내부에너지는 좌굴이 발생하지 않았을 경우에 비해 크게 떨어지기 때문에 변형에 대한 저항력이 감소되어 해석으로부터 예측된 드로잉 하중이 실험에서 측정된 드로잉 하중에 비하여 크게 저하되는 것으로 생각된다. 수치적인 좌굴현상은 본 연구의 기본적인 가정인 평면응력으로부터 유발된 것으로 생각되며 이 좌굴현상을 줄이기 위하여는 비평면 방향의 응력성분인 두께방향의 전단변형을 고려할 필요가 있다. Fig. 11은 변형후의 플랜지의 윤곽을 실험과 해석결과를 비교한 것으로 해석으로부터 예측된 플랜지의 윤곽은 모두 실험과 잘 일치하고 있다.

Fig. 12에서 Fig. 15는 2가지의 변형단계에 대한 폭방향과 대각선방향의 두께 변형도의 분포를 나타낸 그림이다. 대각선방향의 두께 변형도의 변화는 폭방향의 변화보다 훨씬 크게 나타나고 있다. 폭방향의 두께 변형도 분포로부터 알수 있는 컵의 벽면

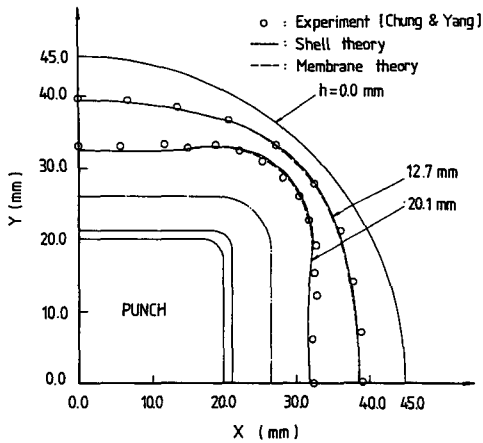


Fig. 11 Comparison of the deformed edge contours between the computed results and the experiment

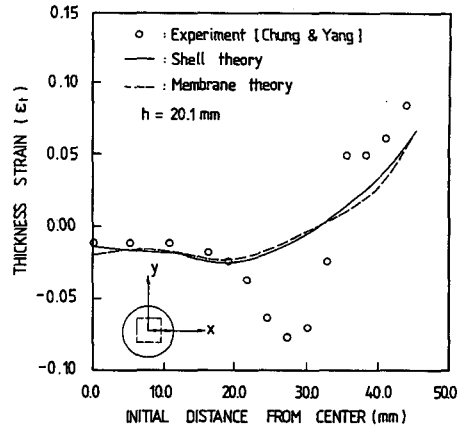


Fig. 13 Comparison of the thickness strain distribution in the transverse direction between the computed results and the experiment ($h=20.1$ mm) : deep drawing of a square cup from a circular blank

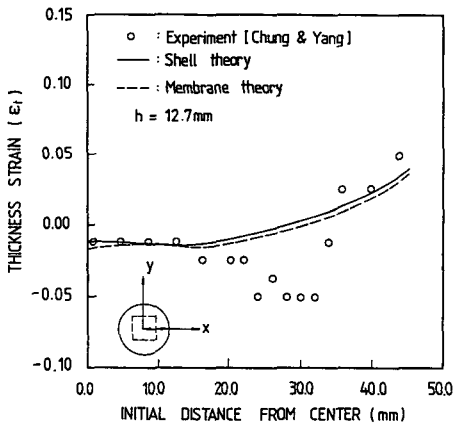


Fig. 12 Comparison of the thickness strain distribution in the transverse direction between the computed results and the experiment ($h=12.7$ mm) : deep drawing of a square cup from a circular blank

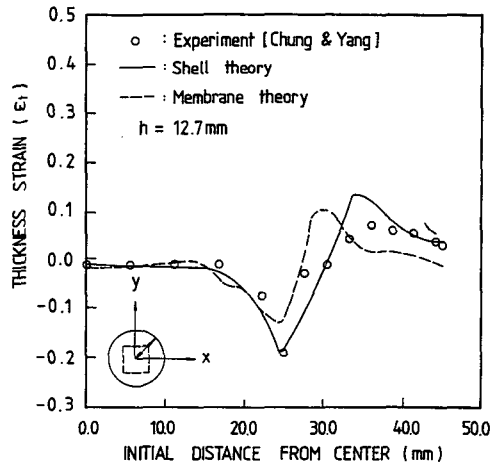


Fig. 14 Comparison of the thickness strain distribution in the diagonal direction between the computed results and the experiment ($h=12.7$ mm) : deep drawing of a square cup from a circular blank

부위의 두께는 박막해석 및 셸해석 모두 실험치보다 크게 나타나고 있다. 이러한 차이는 Fig. 10의 드로잉 하중과도 관계가 있는데 본 해석에서 예측된 드로잉 하중이 실제보다 낮게 예측되었다는 점을 고려하면, 벽면부위에 작용하는 인장응력이 실제보다 낮게 작용하여 두께감소가 적게 일어난 것으로 생각된다. 실제로 딥드로잉 실험시 다이라운드 부근에서의 윤활막이 파손된 흔적과 벽면부근의 플랜지부위의 들림현상(recoil)도 발생되는데 들림

현상이 발생되면 변형영역이 펀치의 바닥과 들림현상이 발생된 구간에 국한되어 변형이 일어나기 때문에 인장변형이 국부적으로 일어나게 되어 두께감소량이 커진다. 딥드로잉 공정은 클리어런스라고 불리는 펀치와 다이사이의 갭이 매우 좁고 또한 다이라운드에서 굽힘반경을 크게 할 수가 없기 때문에 좁은 구간에서 작은 굽힘반경등에 기인하는 두께방향 전단변형의 효과가 특히 변형의 초기에 두드러지게 나타난다. 그러나 본 해석에서는 판두

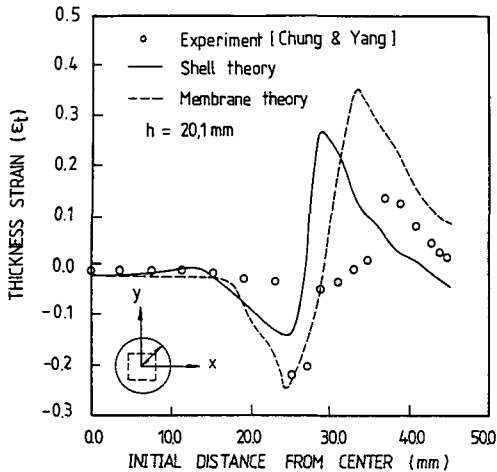


Fig. 15 Comparison of the thickness strain distribution in the diagonal direction between the computed results and the experiment ($h=20.1$ mm) : deep drawing of a square cup from a circular blank

계방향 전단변형을 고려하지 못하기 때문에 변형의 초기부터 수치적인 좌굴현상을 유발하였고 이로 말미암아 변형도의 차이가 나타난 것으로 생각된다. 대각선방향으로의 두께변형도의 분포는 실험과 큰 차이가 있고 박막해석의 결과가 쉘해석의 결과에 비하여 큰 차이를 보여주고 있으나, 이 원인으로는 컵의 모서리 부근에서 약간의 수치적인 좌굴현상이 발생되었기 때문으로 생각된다. 그러나 해석으로부터 예측된 두께방향의 변형도 분포는 벽면 부위를 제외하면 대체적으로 실험결과와 잘 일치하고 있다.

이상의 검토결과 딥드로잉 공정을 보다 정확히 해석하기 위하여는 굽힘의 고려가 매우 중요함을 알 수 있었고 또한 수치적인 좌굴현상을 없애는 것이 중요하며 이를 위하여는 비평면응력 성분의 고려, 즉 두께방향의 전단응력 성분이 고려되어야 함을 알 수 있었다. 그러나 쉘 수식에서 두께방향의 전단응력 성분을 고려하기 위하여는 적절한 탄소성이방성 구성방정식의 표현이 문제점으로 남게 된다.

4. 결 론

딥드로잉 공정의 해석에서의 굽힘의 영향을 조사하기 위하여 원형컵과 정사각형컵의 딥드로잉 공정

을 각각 박막해석법과 쉘해석법으로 해석하였고 해석결과는 기존의 실험결과와의 비교를 통하여 타당성을 조사하였다. 원형컵의 딥드로잉의 경우, 드로잉 하중의 예측은 박막해석과 쉘해석의 결과 모두 실험결과와 대체로 잘 일치하고 있으며 양 해석결과는 비슷하게 나타났다. 그러나 다이라운드 부근의 두께 변형도는 박막해석의 결과는 실험과 큰 차이를 보여주고 있으나 쉘해석은 실험과 잘 일치하는 결과를 보여준다.

정사각형컵의 딥드로잉의 경우, 드로잉 하중은 박막해석 및 쉘해석 모두 실험과 약간의 차이는 있으나 비교적 잘 예측하고 있으며 원형컵의 딥드로잉과 마찬가지로 양 해석의 결과는 큰 차이가 없었다. 그러나 두께 변형도의 경우는 해석결과는 실험결과와 약간의 차이를 보여주고 있으나 이는 본 해석에서 두께방향의 전단변형을 무시하였기 때문에서 기인되는 수치적인 좌굴현상이 발생했기 때문으로 사료된다. 본 연구의 결과로부터 굽힘의 효과가 크게 작용하는 딥드로잉 공정의 해석에는 박막해석법으로는 두께 변형도 분포의 예측에는 한계가 있음을 알았고 딥드로잉 공정의 설계를 위한 보다 정확한 정보를 얻기 위하여는 쉘해석법의 도입이 필요함을 알았다. 또한 본 연구에서 무시한 두께방향의 전단변형이 수치적인 좌굴현상과 관계가 있으며 이에 대한 적절한 고려가 필요함을 알았다.

참고문헌

- (1) Anderson, B. S., 1982, "A Numerical Study of the Deep Drawing Processes," *Numerical Methods in Industrial Forming Processes* (Ed. J. F. T. Pittman et al.) Pineridge Press, Swansea, pp. 709~721.
- (2) Arlinghaus, F. J., Frey, W. H. and Stoughton, T. B., 1985, "Finite Element Modelling of a Stretch-Formed Part," *Computer Modelling of Sheet Metal Forming Process* (Ed. N. M. Wang and S. C. Tang), AIME, pp. 51~64.
- (3) Batoz, J. et al. 3, 1985, "An Efficient Algorithm to Estimate the Large Strains in Deep Drawing," *Proc. NUMIFORM '89 Conf.*, A. A. Balkema, Rotterdam, pp. 383~388.
- (4) Batoz, J. L. et al. 3, 1989, "A Membrane Bending Finite Element Model for Sheet Forming,"

- Proc. NUMIFORM '89 Conf.*, A. A. Balkema, Rotterdam, pp. 389~394.
- (5) Gelin, J. C. and Daniel, J. L., 1989, "A Finite Element Simulation of Sheet Metal forming Processes Using a General non-Flat Shell Element," *Proc. NUMIFORM '89 Conf.*, A. A. Balkema, Rotterdam, pp. 425~430.
- (6) Hambrecht, J. et al. 3, 1989, "Numerical Study of Two-Dimensional Sheet Forming Processes Using Bending, Membrane, and Solid Finite Element Models" *Proc. of the NUMIFORM '89 Conf.*, Balkema, Rotterdam, pp. 451~456.
- (7) Honecker, A. and Mattiason, K., 1989, "Finite Element Procedures for 3D Sheet Forming Simulation," *Proc. NUMIFORM '89 Conf.*, A. A. Balkema, Rotterdam, pp. 457~464.
- (8) Honnor, M. E. and Wood, R. D., 1987, "Finite Element Analysis of Axisymmetric Deep Drawing Using a Simple Two-Noded Mindlin Shell Element", *Numerical Methods for Nonlinear Problems* (Ed. C. Taylor et al.) Pineridge Press, Swansea, pp. 440~449.
- (9) Keck, P. et al. 4, 1989, "Comparison of Different Finite Element Models for the Simulation of Sheet Metal Forming," *Proc. NUMIFORM '89 Conf.*, A. A. Balkema, Rotterdam, pp. 481~488.
- (10) Kim, Y. J. and Yang, D. Y., 1985, "A Rigid-Plastic Finite Element Formulation Considering the Effect of Geometric Change and its Application to Hydrostatic Bulging," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 27, pp. 453~463.
- (11) Lee, C. H., Shim, H. B. and Yang, D. Y., 1988, "Determination of Frictional Coefficient for Sheet Metal Working and its Application to Stretch Forming," *In Proc 6th Congr. Experimental Mechanics and Manufacturers Exhibit*, Portland Oregon, June, pp. 71~79.
- (12) Makinouchi, A., 1987, "A Elastic-Plastic Stress Analysis of U-Bend Process of Sheet Metal," *Advanced Technology of Plasticity* (Editor K. Lange), Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 672~677.
- (13) Makinouchi, A., 1989, "Finite Element Modelling of Draw Bending Process of Sheet Metal," *Proc. NUMIFORM '89 Conf.*, A. A. Balkema, Rotterdam, pp. 327~332.
- (14) Massoni, E, et al. 4, 1987, "A Finite Element Modelling for Deep Drawing of Thin Sheet in Automotive Industry," *Advanced Technology of Plasticity* (Editor K. Lange), Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 719~725.
- (15) Mattiason, K., 1985, "Numerical Simulation of Stretching Processes", *SIMOP-I*, (Editor K. Lange), *Proc. of the 1. Int. Workshop*, Stuttgart, pp. 170~213.
- (16) Mattiason, K. et al. 4, 1987, "Finite Element Simulation of Deep Drawing of Low and High Strength Steel," *Advanced Technology of Plasticity* (Editor K. Lange), Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 657~663.
- (17) Saran, M. and Samuelsson, 1989, "A Elastoplastic Formulation for Numerical Simulation of Sheet Metal Forming Processes," *Proc. NUMIFORM '89 Conf.*, A. A. Balkema, Rotterdam, pp. 45~54.
- (18) Shim, H. B. and Yang, D. Y., 1990, "An Elastic-Plastic Finite Element Analysis on Hydrostatic Bulging of Rectangular Diaphragms by Using Layered Degenerated Shell Elements," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 32 pp. 49~64.
- (19) Stalman, A. P., 1986, "Numerical Simulation of Axisymmetric Deep Drawing Processes by the Finite Element Method," *Workshop Stuttgart*, Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 261~278.
- (20) Tatemani, T. Y., Makamura, Y. and Sato, K., 1982, "An Analysis of Deep Drawing Process Combined with Bending," *Numerical Methods in Industrial Forming Processes* (Ed J. F. T. Pittman et al.) Pineridge Press, Swansea, pp. 687~696.
- (21) Toh, C. H. and Kobayashi, S., 1983, "Finite Element Process Modelling of Sheet Metalforming of General Shapes," *Proc. Int. Symp. Fundamentals of Metal-Forming Technique-State and Trend*, Stuttgart, West Germany, pp. 39~57.
- (22) Wang, N. M. and Budiansky, B., 1978, "Analysis of Sheet Metal Stamping by a Finite Element Method," *J. Appl. Mech.*, *Trans ASME*, 45,

- pp. 73~82.
- (23) Wang, N. M. and Tang, S. C., 1986, "Analysis of Bending Effects in Sheet Forming Operations," *Proc. NUMIFORM '86 Conf.*, Gothenberg, Sweden, pp. 71~76.
- (24) Wang, N. M. and Tang, S. C., 1988, "Analysis of Bending Effects in Sheet Forming Operations," *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 25, pp. 253~267.
- (25) Wifi, A. S., 1976, "An Incremental Complete Solution of the Stretch Forming and Deep Drawing of a Circular Blank Using a Hemispherical Punch", *Int. J. Mech. Sci.*, 24, pp. 23~31.
- (26) Yang, D. Y., Chung, W. J. and Shim, H. B., 1990, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Considering Contact with Initial Guess Generation," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 32, pp. 687~708.