

〈論 文〉

핀끝이 절연되었다는 가정하에 삼각핀 해석에서의 오차

강형석* · 김성준*

(1993년 6월 23일 접수)

Errors in the Triangular Fin Analysis under Assuming the Fin Tip is Insulated

Hyung Suk Kang and Sung Joon Kim

Key Words: Fin Tip(핀끝), Forced Analytic Method(강제 해석적 방법)

Abstract

A comparison of the temperature distributions along the wall and center of the fin and the heat loss from the fin, computed assuming the fin tip is insulated and assuming it is not insulated in a triangular fin, is performed by the two-dimensional forced analytic method. When the fin tip is not insulated, a comparison between forced analytic method and analytic method is made in the heat loss and temperature along the fin wall. The value of Biot number varies from 0.01 to 1.0. The root temperature and surrounding convection coefficients of the fin are assumed as a constant. The results are (1) the analysis on the triangular fin assuming the fin tip is insulated does not produce a good value as compared to that of not-insulated case as the non-dimensional fin length decreases and as the value of Biot number increases and (2) the errors between forced analytic method and analytic method are very small, but the former method is better for computer running time and accuracy.

기 호 설 명

- Bi : Biot수 ($=hl/k$)
- h : 핀주위의 열대류계수
- k : 핀의 열전도계수
- l : 핀바닥 두께의 반
- L' : 핀길이
- L : 무차원적인 핀길이 (L'/l)
- Q_{NI} : 강제 해석적 방법을 사용한 핀끝이 절연되지 않았을 때의 열손실
- Q_I : 강제 해석적 방법을 사용한 핀끝이 절연되었을 때의 열손실
- Q_{ANI} : 해석적 방법을 사용한 핀끝이 절연되지 않았을 때의 열손실
- Q_1 : 1차원적으로 해석한 핀끝의 온도가 유한할

때의 열손실

- T : 온도
- T_w : 핀바닥 온도
- T_∞ : 핀주위 온도
- x' : 핀길이를 따른 좌표
- x : 무차원적인 핀길이를 따른 좌표 (x'/l)
- y' : 핀높이를 따른 좌표
- y : 무차원적인 핀높이를 따른 좌표 (y'/l)
- θ : 변형된 온도 ($T - T_\infty$)
- θ_0 : 변형된 핀바닥 온도 ($T_w - T_\infty$)
- λ_n : eigenvalues

1. 서 론

Fin에 대한 1차원적인^(1~4) 해석과 2차원적인^(5~7)

*정회원, 강원대학교 기계공학과

해석이 많이 이루어져 왔다. 1차원적인 해석은 편리하기는 하나 심한 오차를 나타낼수도 있다. (특히 열대류계수가 핀의 열전도계수 보다 상당히 클 때) 일정한 열대류계수를 위하여 핀두께의 반을 기준으로 한 Biot수의 값이 0.1 보다 작아야만 1차원적인 해석의 타당성이 있다. 삼각핀에 대한 1차원적인^(3,8,9) 해석도 많이 이루어지고 있다. 그러나 삼각핀을 1차원적으로 해석할때 핀끝의 경계조건을 세우는데 문제점이 있다. 즉, 여러 열전달 교과서^(10,11)에서도 나타난 바와 같이 삼각핀을 1차원적으로 해석할때 핀끝의 경계조건을 단지 핀끝의 온도가 유한하다고 놓는데 이것으로는 핀끝이 절연되었는지, 절연되지 않았는지를 명확히 알수가 없다. 왜냐하면 핀끝이 절연되었든, 절연되지 않았든 핀끝의 온도는 유한하기 때문이다. 또한 우리들은 핀의 길이가 아주 길때 핀끝을 절연되었다고 가정하고 풀어도 그리 큰 오차가 나지 않는다고만 알고 있다. 본 논문에서는 핀끝이 절연되었을 때와 절연되지 않았을 때의 두가지 경우에 대하여 삼각핀을 2차원적으로 해석하여 핀으로부터의 열손실과 핀중심과 핀벽면을 따른 온도변화를 Biot수와 무차원적인 핀의 길이의 변화에 따라 비교 분석하여 구체적으로 삼각핀에 대한 핀끝의 영향을 보여준다. 또한 Kang과 Look⁽¹²⁾이 삼각핀에 대한 2차원적인 해석으로 강제 해석적 방법과 finite difference method를 비교하여 강제 해석적 방법을 소개하였는데, 본 논문에서는 핀끝이 절연되지 않았을 경우에 대하여 Biot수와 무차원적인 핀의 길이를 변화시키면서 구한 핀벽면을 따른 온도변화와 핀으로부터의 열손실의 측면에서 강제 해석적 방법과 기존의 해석적 방법을 비교하였다. 이러한 비교 분석들을 간단히 하기 위해 핀바닥의 온도와 핀의 열전도계수 그리고 핀주위의 열대류계수를 상수로 가정하고 핀내부에서 열발생은 없다고 본다.

2. 2차원적인 해석

Fig. 1에 있는 삼각핀을 위해, 정상상태에서의 2차원적인 열전도방정식은 식(1)과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

식(1)의 미분방정식을 풀기위해 4개의 경계조건이 필요한데, 핀끝이 절연되었거나 절연되지 않았거

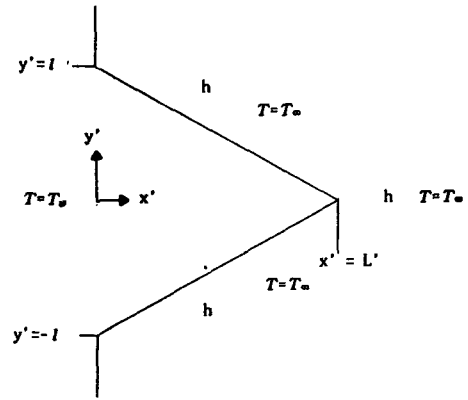


Fig. 1 Geometry of a triangular fin

나, 두 경우 모두 공동으로 필요한 3개의 경계조건들이 식(2)~(4)로 나타내어진다.

$$x=0, \theta = \theta_0 \tag{2}$$

$$y=0, \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

$$-\int_0^L \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=0} dy = Bi \sqrt{L^2 + 1} \int_0^L \theta dy \tag{4}$$

남은 하나의 핀끝에서의 경계조건을 위해 핀끝이 절연되었을 경우에는 식(5)로, 절연되지 않았을 경우에는 식(6)으로 나타내진다.

$$x=L, \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

$$x=L, \frac{\partial \theta}{\partial x} + Bi\theta = 0 \tag{6}$$

여기서, $Bi = \frac{hl}{k}$, $\theta = T - T_\infty$, $\theta_0 = T_w - T_\infty$

$$L = \frac{L'}{l}, x = \frac{x'}{l}, y = \frac{y'}{l}$$

핀끝이 절연되었을 경우 경계조건들 (2), (3), (4) 그리고 (5)를 가지고, 핀끝이 절연되지 않았을 경우 경계조건들 (2), (3), (4) 그리고 (6)을 가지고 식(1)의 미분방정식을 풀면 두 경우 모두 핀안의 온도분포를 식(7)의 형태로 나타낼수 있다.

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n f_1(y) f_2(x) N_n \tag{7}$$

핀내부의 온도분포를 나타내는 식(7)로부터 삼각핀으로부터의 열손실은 두 경우 모두 식(8)로 나타낼수 있다.

$$Q = \int_{-1}^1 \left[-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=0} dy = -2k\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n) f_n N_n \tag{8}$$

여기서,

$$f_1(y) = \cos(\lambda_n y) \tag{9}$$

$$f_2(y) = \cosh(\lambda_n x) + f_n \sinh(\lambda_n x) \tag{10}$$

$$N_n = \frac{4 \sin(\lambda_n)}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} \tag{11}$$

식(8)과 (10)에 있는 f_n 의 값은 핀끝이 절연되었을 경우 식(12)와 (13)으로 나타내지고, 절연되지 않았을 경우 식(14)와 (15)로 표현된다.

핀끝이 절연되었을 경우,

$$f_n = -\tanh(\lambda_n L) \tag{12}$$

$$= \frac{Bi \cdot \sqrt{L^2 + 1} \cdot A_n}{C_n \cdot \sin(\lambda_n) + Bi \cdot \sqrt{L^2 + 1} \cdot D_n} \tag{13}$$

핀끝이 절연되지 않았을 경우

$$f_n = \frac{Bi + \lambda_n \cdot \tanh(\lambda_n L)}{\lambda_n + Bi \cdot \tanh(\lambda_n L)} \tag{14}$$

$$= \frac{Bi \cdot \sqrt{L^2 + 1} \cdot A_n}{C_n \cdot \sin(\lambda_n) + Bi \cdot \sqrt{L^2 + 1} \cdot D_n} \tag{15}$$

여기서,

$$A_n = \lambda_n L \cdot \sinh(\lambda_n) + \lambda_n \cdot \sin(\lambda_n) \tag{16}$$

$$C_n = \lambda_n^2 \cdot (1 + L^2) \tag{17}$$

$$D_n = \lambda_n L \cdot (\cosh(\lambda_n L) - \cos(\lambda_n)) \tag{18}$$

기존의 해석적 방법은 식(12)와 (13) 또는 식(14)와 (15)로부터 모든 eigenvalues 를 구하는 것이나 강제 해석적 방법은 첫번째 eigenvalue(λ_1)을 식(12)와 (13) 또는 식(14)와 (15)로부터 구한 후 나머지 eigenvalues(i.e. $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \dots$)는 식(20)로부터 구한다. 식(20)은 식(19)의 변형된 형태로서, 식(19)은 orthogonality principle을 직접적으로 적용한 식이다.

$$\int_0^1 \cos(\lambda_1 y) \cdot \cos(\lambda_n y) dy = 0 \tag{19}$$

$$\lambda_n = (2\lambda_1 + \lambda_n) - 2(\lambda_1 + \lambda_n) \cdot E_n \tag{20}$$

여기서,

$$E_n = \frac{\tan(\lambda_n)}{\tan(\lambda_1) + \tan(\lambda_n)} \tag{21}$$

3. 결 과

Fig. 2는 무차원적인 핀의 길이의 변화에 따른 핀끝이 절연되지 않았을 경우의 열손실에 대한 핀끝이 절연된 경우의 열손실의 상대오차를 나타낸다. 무차원적인 핀길이, L 은 $Bi=0.01$ 일 때는 0.005부터, $Bi=0.1$ 일 때는 0.1부터 그리고 $Bi=$

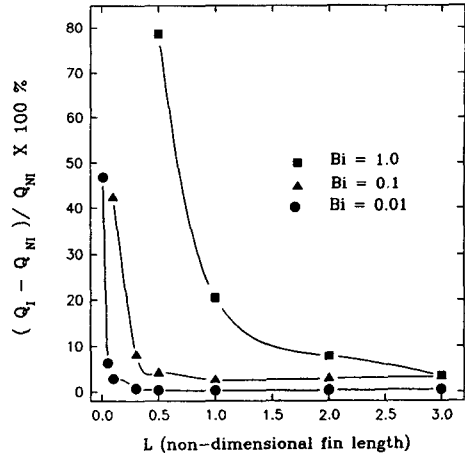


Fig. 2 Relative error versus the non-dimensional fin length

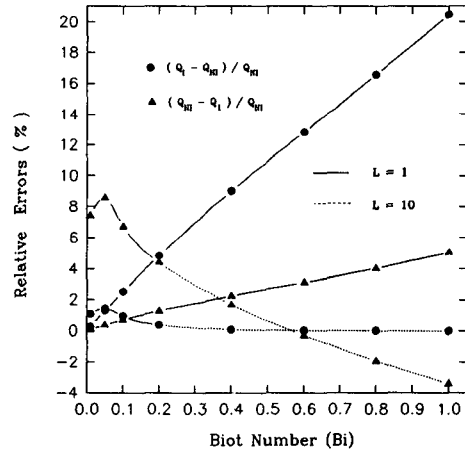


Fig. 3 Relative errors versus the value of Biot number

1.0일 때는 0.5부터 각각 3.0까지 변화시켰다. $Bi = 0.01$ 일 때는 $L=0.5$ 이상에서는 상대오차가 거의 없으며 $L=0.1$ 일 때도 상대오차는 5% 이내이다. $Bi=0.1$ 일 때는 $L=0.3$ 이상부터는 10% 내의 오차를 보이며 $L=0.1$ 일 때는 약 42% 정도의 오차를 나타낸다. $Bi=1.0$ 일 경우 $L=0.5$ 에서 약 80%의 오차를 보이며 $L=2$ 이상부터는 오차가 10% 내로 감소함을 보여준다. 위와 같은 사실은 우리의 보통 주위 환경에서는 Biot수가 0.1 이하로 여겨지기 때문에 실생활에서 삼각핀을 적용할 경우 무차원적인 핀의 길이가 0.5 이상(즉, 실제 핀의 길이가 핀바닥 높이의 1/4 이상)에서는 큰 오차없이 핀의 끝이 절연되었다고 가정해도 무방함을 보

여준다. Fig. 3은 무차원적인 핀의 길이가 각각 1과 10일 때 Biot number를 0.01부터 1.0까지 변화시켜 가며 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되지 않았을 경우의 열손실에 대한 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되었을 경우의 열손실과 1차원적으로 해석한 핀끝의 온도가 단순히 유한하다고 놓았을 경우의 열손실의 상대오차들을 나타낸다. 무차원적인 핀길이 $L=1$ 일 때는 두 경우 모두 Biot number가 증가함에 따라 상대오차는 거의 직선적으로 증가하며 $(Q_{NI}-Q_I)/Q_{NI}$ 의 값이 $(Q_I-Q_{NI})/Q_{NI}$ 보다 더 작은 값들을 나타내며 특히 $(Q_I-Q_{NI})/Q_{NI}$ 의 값은 Biot수가 1.0에 달했을 때 21% 정도가 됨을 보여준다. 핀길이가 핀바닥 두께의 5배인 $L=10$ 일 때는 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되었다고 가정했을 경우의 열손실은 핀끝이 절연되지 않았을 때의 열손실과 큰 차이를 나타내지 않으나 주어진 Biot수의 범위에서 $(Q_{NI}-Q_I)/Q_{NI}$ 의 값은 약 9%에서 -4%로 변화하여 제법 큰 오차를 보여준다. Fig. 4는 $Bi=0.1$ 일 때 상대오차가 40%를 넘을 때의 핀길이 즉, $L=0.1$ 일 때 무차원적인 x 좌표의 변화에 따른 핀끝이 절연되었을 경우와 절연되지 않았을 경우의 핀중심을 따른 무차원적인 온도변화를 나타낸것이다. 핀끝이 절연되지 않았을 경우 x 좌표가 증가함에 따라 핀중심의 온도는 감소하며 $x=0$ 인 곳에서 무차원적인 온도값은 1인데 이것은 경계조건에 부합된다. 그러나 핀끝이 절연되었다고 가정했을 때는 $x=0$ 인 곳에서 무차원적인 온도값은 약 0.988이며 핀중심을 따른 온도값도 x 좌표가

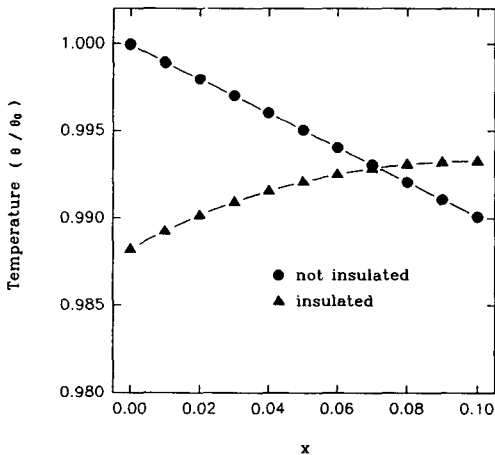


Fig. 4 The variation of non-dimensional fin center line temperature along x for $L=0.1$, $Bi=0.1$

증가함에 따라 같이 증가하는데 이것은 경계조건에 전혀 맞지않음을 보여준다. Fig. 5는 Fig. 4와 같은 경우로 $Bi=1.0$ 일 때 상대오차가 80%에 달하는 $L=0.5$ 일 때 무차원적인 x 좌표의 변화에 대한 핀끝이 절연되었을 경우와 절연되지 않았을 경우에 핀중심을 따른 온도변화를 나타낸다. 핀끝이 절연되지 않았을 때는 핀중심의 온도는 x 좌표가 증가함에 따라 감소하는데 $Bi=0.1$ 의 경우와 비교하면 Biot수가 더 크기때문에 온도의 하강경사가 더 큼을 보여준다. 핀끝이 절연되었을 때는 핀중심의 온도가 x 좌표가 증가함에 따라 처음에는 증가하다가 감소하며 $x=0$ 인 곳에서 무차원적인 온도가 1이 되야하는 경계조건에도 맞지않음을 보여준다. Fig.

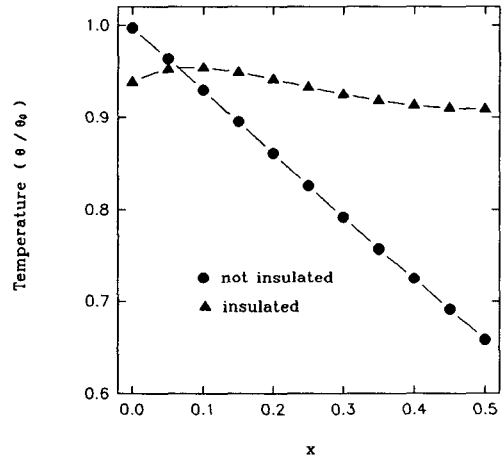


Fig. 5 The variation of non-dimensional fin center line temperature along x for $L=0.5$, $Bi=1.0$

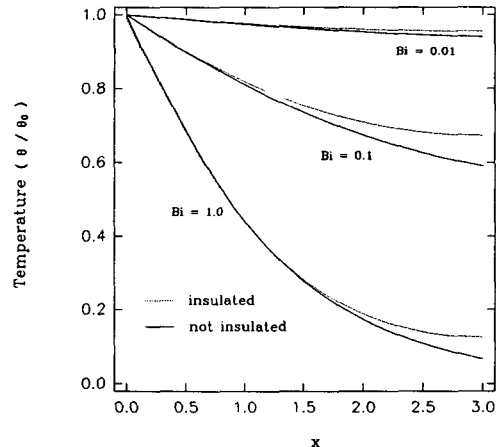


Fig. 6 The variation of non-dimensional fin center line temperature along x for $L=3.0$

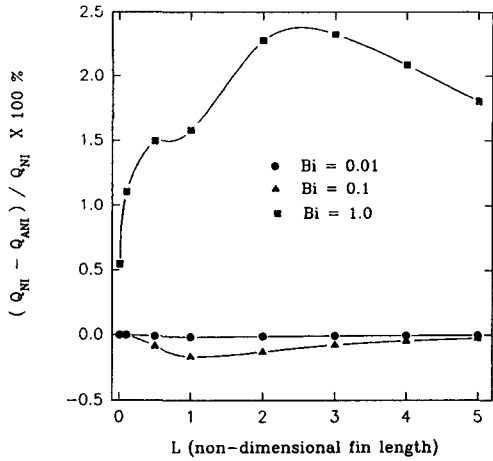


Fig. 7 Relative error of the heat loss by analytic method to the heat loss by forced analytic method as a function of L

6은 세가지 Biot수에 대하여 핀끝이 절연되지 않았을 경우에 대한 핀끝이 절연되었을 경우의 열손실의 상대오차가 약 5% 내에 있는 $L=3$ 일 때의 무차원적인 x 좌표의 변화에 대한 핀중심의 온도변화를 나타낸다. 이 경우 Biot수의 세가지 값 모두에 대하여 핀끝이 절연되었을 경우와 절연되지 않았을 경우 모두 핀바닥의 경계조건에 부합됨을 보여주며 x 값이 증가함에 따라 두 경우의 온도차가 점점 벌어진다. 핀끝에서의 온도는 핀끝이 절연되지 않았을 경우가 절연되었을 경우보다 낮음을 보여준다. Fig. 7은 핀이 절연되지 않았을 경우 세가지 Biot수에 대하여 무차원적인 핀의 길이를 0에서 5까지 변화시켜가며 강제 해석적 방법으로부터 구한 열손실에 대한 기존의 해석적 방법으로부터 구한 열손실의 상대오차를 나타낸다. 상대오차는 핀길이의 변화에 따라 일정한 경향을 보여주지 않으나(특히 $Bi=1.0$ 인 경우), $Bi=0.01$ 인 경우 상대오차는 거의 없으며 $Bi=1.0$ 인 경우에도 2.5%를 넘지 않음을 보여준다. 여기서, $L=5$ 까지만의 상대오차를 구한 이유는 기존의 해석적 방법을 사용했을 경우, 우리들이 사용하는 PC의 basic에서 overflow가 나오기 때문이다. 또한 식의 복잡성으로 인해 eigenvalues의 값을 구할때 computer running time이 2배 이상 걸리며 강제 해석적 방법이 더 정확성을 가진다는 것을 Table 1이 보여준다. Table 1은 무차원적인 핀의 길이가 2일 때 $Bi=0.01, 0.1$ 의 두값에 대하여 핀벽을 따른 무차원적

Table 1 Comparison of non-dimensional fin wall temperature between by forced analytic method and by analytic method for $L=2$

Non-dimensional fin wall temperature (θ/θ_0)				
y	By forced analytic method		By analytic method	
	Bi=0.01	Bi=0.1	Bi=0.01	Bi=0.1
0.0	0.999980	0.999772	0.999483	0.996382
0.1	1.000004	1.000042	0.999537	0.996834
0.2	1.000020	1.000223	0.999655	0.997379
0.3	0.999984	0.999865	0.999749	0.997439
0.4	0.999982	0.999797	0.999780	0.998076
0.5	1.000023	1.000257	0.999809	0.999592
0.6	1.000013	1.000146	0.999948	1.000571
0.7	0.999959	0.999544	1.000245	1.001109
0.8	1.000006	1.000068	1.000585	1.003274
0.9	1.000078	1.000872	1.000717	1.005964
1.0	0.999770	0.997438	1.000379	1.003362

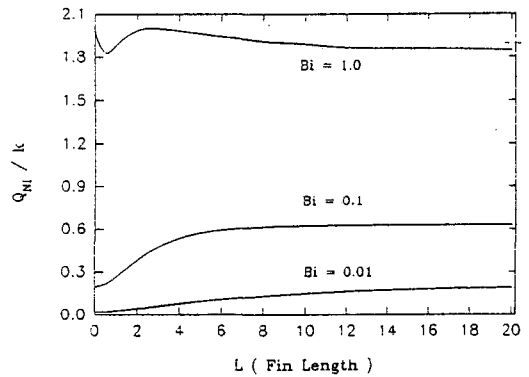


Fig. 8 The heat loss from the tin versus L by the forced analytic method

인 좌표 y 의 변화에 대한 강제 해석적 방법과 기존의 해석적 방법으로부터 구한 온도변화를 나타낸다. 여기서, $L=2$ 는 임의로 선택한 값인데, $L=2$ 는 핀의 길이가 핀바닥의 길이와 같음을 의미한다. 경계조건에서 $x=0$ 일 때 온도(θ/θ_0)는 핀벽에서 모두 1이어야 하는데 두 방법으로부터 구한 온도값을 비교하면 강제 해석적 방법으로부터 구한

온도값이 더욱 1에 가까움을 보여준다. Fig. 8은 무차원적인 핀의 길이를 0에서 20까지 변화시킬때 강제 해석적 방법으로 부터 구한 열손실(Q_{NI}/k)의 변화를 보여준다. $Bi=0.01$ 일 때는 핀의 길이가 증가함에 따라 열손실도 계속 증가하며 $Bi=0.1$ 일 때는 처음에는 빠른 속도로 증가하다가 $L=6$ 정도 부터는 아주 조금씩 증가함을 보여준다. $Bi=1.0$ 일 때는 핀의 길이의 변화에 따라 다소간 열손실이 불규칙하게 변함을 보여주는데 즉, 처음에는 빠른 속도로 감소하다가 $L=0.5$ 정도부터는 빠른 속도로 증가하다 다시 $L=2$ 정도부터는 서서히 감소하는 경향을 보여준다.

4. 결 론

(1) 삼각핀의 경우 우리가 일반적으로 알고 있는 '핀의 길이가 굉장히 길때 핀끝을 절연상태로 생각해도 큰 오차는 없다'는 것과는 달리 핀바닥 길이에 대한 핀의 길이가 너무 짧지만 얇으면 핀끝을 절연상태로 놓아도 큰 오차는 없다. 즉 $Bi=0.1$ 일 때(우리 주위의 보통 환경) 핀의 길이가 핀바닥의 길이의 1/4 정도까지는 약 5% 내의 상대오차 만이 발생하며 특히 $Bi=0.01$ 인 경우 핀의 길이가 핀바닥 길이의 1/20 밖에 안되도 상대오차는 3% 내외이며 약 1/4인 경우만 되어도 상대오차는 거의 0이다.

(2) Look과 Kang⁽¹²⁾이 소개한 강제 해석적 방법이 기존의 해석적 방법보다 정확성에서 더 좋으며 computer running time이나 계산 범위의 측면에서 볼 때 더 나은 방법임을 보여준다.

참고문헌

- (1) Gardner, K. A., 1945, "Efficiency of Extended Surface," *ASME J. of Heat Trans.*, Vol. 67, pp. 621~631.
- (2) Keller, H. H. and Somers, E. V., 1959, "Heat Transfer from an Annular Fin of Constant Thickness," *ASME J. of Heat Trans.*, Vol. 81,

pp. 151~156.

- (3) Burmeister, L. C., 1979, "Triangular Fin Performance by the Heat Balance Integral Method," *ASME J. of Heat Trans.*, Vol. 101, pp. 562~564
- (4) Ünal, H. C., 1988, "The Effect of the Boundary Condition at a Fin Tip on the Performance of the Fin with and without Internal Heat Generation," *Int. J. Heat Mass Trans.*, Vol. 31, pp. 1483~1496.
- (5) Sparrow, E. M. and Lee, L., 1975, "Effects of Fin Base-Temperature Depression in a Multifin Array," *ASME J. of Heat Trans.*, Vol. 97, pp. 463~465.
- (6) Buccini, A. and Soliman, H. M., 1986, "Optimum Dimensions of Annular Fin Assemblies," *ASME J. of Heat Trans.*, Vol. 108, pp. 459~462.
- (7) Look, D. C. Jr. and Kang, H. S., 1991, "Effects of Variation in Root Temperature on Heat Lost from a Thermally Non-Symmetric Fin," *Int. J. Heat Mass Trans.*, Vol. 34, pp. 1059~1065.
- (8) Ullmann, A. and Kalman, H., 1989, "Efficiency and Optimized Dimension of Annular Fins of Different Cross-Section Shapes," *Int. J. Heat Mass Trans.*, Vol. 32, pp. 1104~1110.
- (9) Crawford, M., "Heat Transfer in Trapezoidal Straight Fins with a Periodically Varying Base Temperature," *ASME*, 82-WA/HT-41.
- (10) Chapman, Alan J., 1984, *Heat Transfer*, Fourth ed., Macmillan Publishing Company, New York, Collier Macmillan Publishers, London, pp. 67~69.
- (11) Pitts, Donald R. and Sissom, Leighton E., *Heat Transfer*, Mcgraw-Hill Book Company, 1977, pp. 27~28.
- (12) Kang, H. S. and Look, D. C. Jr., "A Forced Analytical Scheme Applied to a Two Dimensional Fin : An Unsuccessful Venture," *AIAA*, 93-2854.