

〈論 文〉

Preconditioning을 이용한 전속도 영역에 대한 압축성 유체유동해석

최 윤 호

(1994년 2월 7일 접수)

A Time-Derivative Preconditioning Method for Compressible Flows at All Speeds

Yunho Choi

Key Words: Time-Marching Algorithm(시간전진법), Time-Derivative Preconditioning (시간항 Preconditioning), Low Mach Number Flow(저 마하수유동), Eigenvalue(고유값), Pseudo-Acoustic Speed(가상음속)

Abstract

Enhancement of numerical algorithms for low speed compressible flow will be considered. Contemporary time-marching algorithm has been widely accepted and applied as the method of choice for transonic, supersonic and hypersonic flows. In the low Mach number regime, time-marching algorithms do not fare as well. When the velocity is small, eigenvalues of the system of compressible equations differ widely so that the system becomes very stiff and the convergence becomes very slow. This characteristic can lead to difficulties in computations of many practical engineering problems. In the present approach, the time-derivative preconditioning method will be used to control the eigenvalue stiffness and to extend computational capabilities over a wide range of flow conditions (from very low Mach number to supersonic flow). Computational capabilities of the above algorithm will be demonstrated through computation of a variety of practical engineering problems.

기 호 설 명

Γ : Preconditioning 행렬	t : 시간
$\bar{\Gamma}$: 최종 형태의 Preconditioning 행렬	x, y : 직교좌표계
Q : 종속변수벡터	u, v : x, y 방향의 속도
Q_v : 점성변수벡터	T : 온도
\tilde{Q} : 비보존형벡터	P : 압력
E, F : 비점성 플럭스벡터	C : 음속
H : 생성항벡터	C' : 가상음속
L : 점성항 미분연산자	M : Mach수
$R_{xx}, R_{xy}, R_{yx}, R_{yy}$: 점성항 Jacobian 행렬	Re : Reynolds수
	Re_s : 스텝높이 기준의 Reynolds수
	Ra : Rayleigh수
	CFL : Courant-Friedrichs-Lewy수

* 정회원, 아주대학교 기계공학과

σ : Von Neumann수

β : 스케일링변수

1. 서 론

압축성 유체에 대한 수치해석방법은 지난 2~30년간 급속히 발전되어 왔으며, 현재 시간전진법(time-marching algorithm)은 압축성 유체의 유동해석에 가장 적합한 방법으로 알려져 있다. 이 방법은 일반적으로 고속의 유체유동, 즉 천음속, 초음속 그리고 극초음속의 계산에 적합하며, 또한 비점성 유동과 실제 응용분야에서 매우 중요한 고 Re수(high Reynolds number) 유동의 계산에서 정확한 수량 예측이 가능하다.^(1,2) 그러나 저속의 유체유동, 일반적으로 Mach수 0.1 이하의 유체유동을 해석함에 있어서는 그 효율성에 문제점이 있는 것 또한 잘 알려져 있다.^(3~7)

모든 전산유체 해석기법에 있어서 가장 중요시되는 점은 그 방법이 광범위한 유체의 유동조건에서 적합한지의 여부이다. 이러한 면에서 시간전진법의 단점은 전술한 바대로 저속의 아음속유동에서 효율적이지 못하다는 점이다. 이러한 시간전진법의 비효율성은 다음과 같은 두 가지 이유에서 비롯된다. 첫째, 저속의 유체유동에서는 압축성유체 지배방정식의 고유값(eigenvalue)들 사이에 큰 차이가 생긴다. (Stiff system of equation) 이 점은 시간전진법에 사용되는 Time step(Δt)을 Mach수에 비례하여 작게하므로 수렴속도에 큰 영향을 미치게 된다. 둘째는 매우 낮은 Mach수에서는 수치해석방법의 마무리오차(round-off error)가 증가되므로 구하는 계산결과에 정확도를 저하시킨다. 이러한 문제점은 점성이 지배하는 유동장의 경우 더욱 심해진다. 이는 점성이 지배하는 유동, 즉 Re수가 작은 유동에 있어서는, Navier-Stokes 지배방정식의 점성항에 대한 시간단계와 비점성항에 대한 시간단계의 차이가 커지기 때문이다. 일반적으로 저속의 압축성 유체유동에 관련된 문제는 대략 다음과 같은 두 가지로 구분할 수 있다. 첫째, 고속의 유체유동에 저속의 유체유동이 포함되는 경우, 예를 들어, 고속의 유동장에 정체점 지역 또는 경계층 지역이 포함되는 유동, 그리고 면적비가 큰 축소-확대노즐에서 목이전의 아음속유동 등이 있다. 둘째, 강력한 열원으로 인하여 밀도변화가 큰 저속

의 유동장의 경우이다. 일반적인 연소실 또는 추진 시스템에 나타나는 화학반응 유동장은 이의 대표적인 예이다. 위와 같은 유동은 대부분의 속도가 저속임에도 불구하고 압축성 유동의 해석방법을 사용하여야 함은 명백하다.

현재 저속의 압축성 유동해석에 대한 연구방법은 대략 두 가지로 대별할 수 있다. 첫째는 Perturbation expansion을 이용한 방법^(3~7)이며, 둘째는 시간항 Preconditioning을 이용하는 방법^(8~13)이다. 전자는 지배방정식의 종속변수에 Perturbation expansion을 적용하여 실제의 음속을 가상음속(pseudo-acoustic speed)으로 대체하여 지배방정식을 변환시키는 방법이다. 저자를 포함한 Merkle 등^(3,7)은 유체의 유동변수에 Mach수의 제곱의 항으로 Perturbation expansion을 적용하여 실제의 음속을 가상음속으로 대체하여 지배방정식의 고유값을 유체의 유동속도와 같은 크기로 조절하였다. 비슷한 방법을 이용한 연구가 Guerra와 Gustaffson⁽⁴⁾에 의해서도 수행되었으며, 이들은 유동변수에 Mach수의 일차항으로 Perturbation expansion을 적용하였다. Rehm과 Baum⁽⁵⁾은 이 방법을 특히 연소 문제에 적용하였으며, McMurtry 등⁽⁶⁾은 Chemical mixing layer에 대한 해석을 위해 이 방법을 이용하여 직접수치모사를 수행하였다. 이 방법은 저속의 압축성유체 유동해석에는 적합한 것으로 인정되고 있고 실제 많은 응용분야에서 적용되고 있다. 그러나 Perturbation expansion의 특성상, 고속의 유체유동에서의 적용 제약으로 인하여 음속이상의 유체유동에는 적합치 못한 것이 이 방법의 단점이다.

후자의 방법은 Navier-Stokes 지배방정식의 시간항에 어떤 특정한 행렬을 곱함으로써 지배방정식의 고유값을 조절하는 방법이다. 이 방법은 전자에 비해 유동의 전 영역에서 유효한 방법이다. Viviand⁽⁸⁾은 Euler 지배방정식으로 대표되는 Hyperbolic system에 적용할 수 있는 Preconditioning방법에 대한 일반적인 법칙을 제안하였으며, Peyret과 Viviand⁽⁹⁾는 이를 다시 Navier-Stokes 지배방정식에도 적용하였다. Turkel⁽¹⁰⁾은 비압축성과 압축성 유체유동 모두에 적용할 수 있는 Preconditioning방법을 연구하였고, 최근에 Storti 등⁽¹¹⁾은 고유값조절에 대한 이론적인 연구를 수행하였는바 그 결과는 Viviand의 결과와 잘 일치하고 있다. 이외에도 Briley 등⁽¹²⁾과, Van Leer

등⁽¹³⁾에 의하여도 Preconditioning방법에 대한 활발한 연구가 진행되고 있다. 그러나 위의 연구는 대부분이 이론적인 측면에서의 연구이며 실질적으로 Preconditioning방법이 실제 계산수행에 얼마나 효율적인지는 밝히지 못했다. 이러한 면에서 본 연구의 목적은 현재 고속의 압축성 유동해석에 널리 사용되고 있는 시간전진법을 개선하여 계산 능력을 저속의 유동영역에까지 확대하고자 함이며, 또한 개발한 해석방법을 여러 실제 응용분야에 적용함으로써 그 효율성을 검증하고자 한다.

2. 지배방정식

Preconditioning방법을 이용한 비정상 2차원 압축성 Navier-Stokes방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Gamma \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = H + L(Q_v) \quad (1)$$

여기서, Γ 는 Preconditioning 행렬이며, Preconditioning의 방법에 따라 다양한 형태를 지닐 수 있다. 예를 들어, 만약 Γ 가 identity matrix가 되는 경우, 원형의 Navier-Stokes방정식을 회복하게 된다. 식(1)에 나타나는 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q &= (\rho, \rho u, \rho v, e)^T \\ E &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e+p)u)^T \\ F &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e+p)v)^T \\ H &= (0, 0, -\rho g, -\rho gv)^T \\ Q_v &= (p, u, v, T)^T \end{aligned} \quad (2)$$

위 식에서 종속변수벡터 Q 와 비점성 플럭스벡터, E 와 F 는 일반적인 형태를 취하며, H 는 중력을 포함하는 생성항 벡터이다. 벡터 Q_v 는 Navier-Stokes방정식에 나타나는 “점성변수”를 표시한다. 위 식에서 Q 대신에 “점성변수” 벡터 Q_v 를 사용하는 이유는 확산항의 구조를 간단하게함으로써 계산의 복잡성이 감소되기 때문이다. 식(2)에 나타나는 모든 변수는 밀도 ρ , 속도성분 u, v , 압력 p , 온도 T , 그리고 부피당 총 에너지 e 를 포함하여 모두 표준기호로 정의되어 있으며, 좌표는 중력이 음의 y 방향으로 작용하도록 설정되어 있다. 생성항벡터의 중력항 ρgv 는 중력에 의한 일을 나타낸다. 식(2)와 더불어, 압력은 다음과 같은 완전 기체방정식으로부터 구할 수 있다.

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right) \quad (3)$$

여기서, γ 는 비열비이다.

점성항의 미분연산자 L 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial}{\partial x} R_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} R_{xy} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} R_{yx} \frac{\partial}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} R_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, $R_{xx}, R_{xy}, R_{yx}, R_{yy}$ 는 각각 점성계수 μ 와 열전도계수 k 를 포함하는 확산계수 행렬이다.

$$\begin{aligned} R_{xx} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\mu & \mu & \nu k \end{bmatrix} & R_{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu \nu & -\frac{2}{3}\mu & \mu k \end{bmatrix} \\ R_{yx} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu & \mu & \mu k \end{bmatrix} & R_{yy} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 \\ 0 & \mu & \frac{4}{3}\mu & \nu k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이 식에서 이차 점성계수를 위하여는 Stokes의 가설을 사용하였다. ($\lambda = -\frac{2}{3}\mu$)

본 연구에서는 시간전진법의 계산능력을 전속도 영역으로 확장하고 또한 수렴속도의 개선을 위하여 시간항 Preconditioning방법⁽⁸⁻¹³⁾을 사용하였다. 이 방법은 전술한 바대로 Navier-Stokes 지배방정식의 시간항에 특정한 행렬을 곱함으로써 고유값의 크기를 조절하는 방법이며, 올바른 Preconditioning의 적용을 위하여 특정행렬은 다음과 같은 조건을 충족시켜야한다.⁽⁷⁾

- (1) 지배방정식의 고유값은 반드시 실수이어야 한다.
- (2) 고유값의 부호는 원 지배방정식의 Eigenvalue 부호와 동일하여야 한다.
- (3) Spectral radii가 같은 크기이어야 한다.
- (4) 지배방정식의 확산항에 대하여 시간역행(time reversal)이 생기지 않도록 한다.

위 조건을 만족시키는 시간항 Preconditioning방법을 개발하기 위하여 본 연구에서 적용한 기본개념은 “점성변수” 벡터 Q_v 를 종속변수벡터로 사용하는 것이다. “점성변수” 벡터에 대한 고찰은 비압축성 유동장 및 Perturbation expansion을 이용한 저속의 압축성 유동장 계산시 사용되는 가상 압축성방법 (artificial compressibility method)^(14,15)으로부터 비롯되었다. 이의 Preconditioning방법에의

적용은 특히 위 조건중 확산항에 대한 조건을 쉽게 만족시키며, 또한 시간항을 쉽게 스케일할 수 있어 비점성항으로부터 같은 크기의 고유값을 얻을 수 있다.

본 연구에서 진행한 Preconditioning방법의 개발 과정은 다음과 같다. 먼저 계산과정을 단순화시키기 위하여, 보존형(conservative form)으로 표시된 식(1)을 비보존형(non-conservative form)으로 전환시킨다. 사용한 비보존형벡터는 표준형태로서 다음과 같다.

$$\tilde{Q} = (\rho, u, v, p)^T \quad (6)$$

이 변환과정은 식(1)에 Jacobian $P^{-1} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial Q}$ 를 곱함으로써 쉽게 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + P^{-1} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) = P^{-1} [H + L(Q_v)] \quad (7)$$

여기서, 편의상 Preconditioning 행렬은 생략하였다.

다음으로 종속변수벡터를 (ρ, u, v, p) 계에서 점성변수벡터 (p, u, v, T) 계로 변환시킨다. 이에 여러가지 방법이 있을 수 있으나, 본 연구에서는 수식의 간편성을 고려하여 다음 방법을 사용하였다. 먼저 에너지방정식으로부터 연속방정식을 뺀다. 이 과정을 통하여 에너지방정식의 시간항에 온도(T)를 도입할 수 있다. (연속방정식의 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 가 완전 기체방정식을 이용하여 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 로 대체된다) 이 과정에 대한 벡터 식은 다음과 같이 sparse 행렬 K_1 을 식(7)에 곱함으로써 얻을 수 있다.

$$K_1 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + K_1 P^{-1} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) = K_1 P^{-1} [H + L(Q_v)] \quad (8)$$

여기서,

$$K_1 = \text{Diag}(1, \rho, \rho, 1),$$

$$\text{비 제로성분}(4, 1) = -\gamma RT$$

다음으로 Chain Rule을 이용하여 종속변수 벡터 \tilde{Q} 를 Q_v 로 대체한다.

$$K_1 K_2 \frac{\partial Q_v}{\partial t} + K_1 P^{-1} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) = K_1 P^{-1} [H + L(Q_v)] \quad (9)$$

여기서, K_2 는 Jacobian $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial Q_v}$ 로 정의된다. 다음으로 식(9)에 $\Gamma_v K_2^{-1} K_1^{-1}$ 를 시간항에 곱함으로써 Preconditioning을 수행한다.

$$\begin{aligned} \Gamma_v \frac{\partial Q_v}{\partial t} + K_1 P^{-1} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) \\ = K_1 P^{-1} [H + L(Q_v)] \end{aligned} \quad (10)$$

Preconditioning 행렬 Γ_v 은 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta M^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ (1-\gamma)0 & 0 & \gamma \rho R \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서, β 는 스케일링변수이며 M 은 Mach수이다. 위 과정을 통하여 구한 비보존형(non-conservative form)의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta M^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho(V.T.) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho(V.T.) \\ \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (k \nabla T) &+ \Phi \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, $V.T.$ 는 식(5)의 점성항을 나타내며, Φ 는 소산항이다. 위 방정식에서 Γ_v 는 연속방정식의 시간항에 가상 압축성개념을 도입하며, 운동량방정식을 그 표준형태로, 에너지방정식을 종래의 온도형태 방정식으로 전환시킬을 볼 수 있다. 따라서 현재의 Preconditioning방법이 확산항에 대하여 시간역행을 초래하지 않음은 명백하다.

마지막으로 보존형(conservative form)의 Navier-Stokes 지배방정식은 식(10)에 PK_1^{-1} 를 곱함으로써 쉽게 얻을 수 있다.

$$\bar{\Gamma} \frac{\partial Q_v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = H + L(Q_v) \quad (13)$$

여기서, $\bar{\Gamma}$ 는 $PK_1^{-1} \Gamma_v$ 로 정의되며 다음과 같다.

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta M^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{\beta M^2} & \rho & 0 & 0 \\ \frac{v}{\beta M^2} & 0 & \rho & 0 \\ \frac{(e+p)}{\rho \beta M^2} - 1 & \rho u & \rho v & \frac{\gamma \rho R}{\gamma - 1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

식(13)의 고유값은 다음과 같다.

$$\lambda(\bar{F}^{-1}A_v) = \left(u, u, \frac{u \left(1 + \frac{\beta M^2}{\gamma RT} \right) \pm c'}{2} \right) \quad (15)$$

여기서, $A_v = \frac{\partial E}{\partial Q_v}$ 이며 가상음속 c' 은 다음과 같이 정의된다.

$$c'^2 = u^2 \left(1 + \frac{\beta M^2}{\gamma RT} \right)^2 + 4\beta M^2 \left(1 - \frac{u^2}{\gamma RT} \right) \quad (16)$$

수렴속도의 개선을 위하여는 위 고유값들을 같은 크기로 조절하여야 한다. 이를 위하여 본 연구에서는 스케일링변수 β 를 조절하였으며, $\beta = k\gamma RT$ 를 선정하였다. 여기서, k 에 대하여는 나중에 다시 설명하기로 하겠으나, k 값의 크기가 0(1)인 경우, β 는 가상음속 c' 을 입자속도(u)의 크기로 만들어 고유값들의 크기를 거의 같은 값으로 유지시킨다. 또한 아음속유동의 경우 3개의 고유값은 양, 나머지 1개의 고유값은 음의 값을 항상 유지시키며, Mach수가 1에 다가감에 따라 고유값은 물리적으로 타당한 값 ($u, u, u+c, u-c$)을 회복하게 된다. 초음속유동에 대하여는 Preconditioning 행렬에 나타나는 M^2 의 항을 1로 고정시킴으로써 원 고유값($u, u, u+c, u-c$)을 유지하여 식(13)은 Preconditioning이 적용되지 않은 종래의 압축성 유동 방정식과 동일한 특성을 가진다.

3. 저 Re수 유동에서의 수렴속도 조절

본 연구에서 개발한 Preconditioning방법의 특성을 보기 위하여 수치안정성 해석을 수행하였으며 그 결과 비점성유동을 포함하여 모든 Re수 또는 Peclet수 유동에 대하여 안정함을 볼 수 있었다. 새로운 Preconditioning방법은 비점성 유동 및 고 Re수 유동의 경우, 천음속에서의 시간전진법의 안정성 특성과 거의 동일하며, 따라서 매우 효율적인 수렴속도를 예측할 수 있다. 그러나 저 Re수(유동의 경우($Re=50$ 이하), 안정성 특성은 Amplification factor가 1에 다가감을 볼 수 있었으며, 따라서 수렴속도가 다시 느려짐을 예측할 수 있다. 이와 같은 저 Re수 유동에서의 안정성 특성 대한 이유는 Viscous time step변수(앞으로는 Von Neumann number라 부른다.) $\sigma = \nu \Delta t / \Delta x^2$ 를 고찰함으로써 알 수 있다. 저 Re수 유동에서, 시간단계를 CFL number만을 이용하여 조절하는 것은 Von Neumann number를 매우 크게 증가시켜 수렴속도

를 감소시키게 된다. 그러므로 효율적인 수렴을 위하여는 CFL number와 Von Neumann number를 동시에 같은 크기로 조절하여야 한다. CFL number와 Von Neumann number의 동시 조절은 앞 절에서 언급한 스케일링변수 k 를 적절히 선정함으로써 얻을 수 있다. 변수 k 는 비점성유동에서는 고유값을 같은 크기로 조절하기 위하여 1을 사용하며, 반면에 저 Re수 유동에서는 이 변수를 CFL number와 Von Neumann number를 동시에 조절하기 위하여 사용한다. 본 연구에서는 최적의 수렴속도를 얻기 위하여, CFL number와 Von Neumann number의 크기를 약 0(1)의 값으로 유지하였다.

비점성유동에 있어서의 시간단계는 다음과 같은 일반적인 정의에 의한 CFL number를 사용하여 결정한다.

$$CFL = \frac{\{u(1+kM^2)+c'\}\Delta t}{2\Delta x} \quad (17)$$

저 Re수 유동에서의 적절한 시간단계 변수는 Von Neumann number이므로, 식(17)과 Von Neumann number의 정의를 이용하여 다음과 같이 k 에 대한 식을 유도할 수 있다.

$$k = \frac{\alpha(\alpha-1)}{M^2 \left(\alpha - 1 + \frac{\gamma RT}{u^2} \right)} \quad (18)$$

여기서, α 는 $CFL / \sigma Re_{ax}$ 이며, Re 는 Cell Reynolds number($u\Delta x/\nu$)이다. 이 식에서 CFL Number와 Von Neumann number의 크기를 0(1)의 값을 선정하고 주어진 유동조건으로부터 다른 변수의 값을 계산함으로써, 스케일링변수 k 를 계산할 수 있다. 일반적으로 광범위한 Re수 영역의 계산시, 변수 k 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$k = \text{Max} \left[1, \frac{\alpha(\alpha-1)}{M^2 \left(\alpha - 1 + \frac{\gamma RT}{u^2} \right)} \right] \quad (19)$$

4. 수치해석기법

올바른 Preconditioning방법은 외재적기법 또는 내재적기법에 모두 적용시킬 수 있으며, 모두의 수렴속도를 향상시킨다. 본 연구에서는 최근에 압축성 유동장 계산에 보편적으로 사용되는 내재적 기법을 통하여, Preconditioning 방법의 영향을 보고자 하였다. 본 연구에 사용할 수치해석기법은 식

(13)의 시간항에 대하여 Euler의 내재적기법을 사용하고, 공간항에 대하여 중심차분법을 사용하였다. 형성되는 대수식에 대한 효율적인 계산을 위하여는 Douglass-Gunn⁽¹⁶⁾의 근사분해(approximate factorization)를 사용하였으며, 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\left[S + \Delta t \left(\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} R_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] S^{-1} \cdot \left[S + \Delta t \left(\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} R_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \Delta Q_v = -\Delta t R \quad (20)$$

여기서, R 은 식(1)의 정상상태에서의 잔여항이며 다음과 같이 표시된다.

$$R = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} - L(Q_v) - H$$

또 A , B 와 D 는 벡터 E , F 와 H 의 Jacobian이고 행렬 $S = \bar{\Gamma} - \Delta t D$ 로 정의된다. 식(20)에는 중심차분법에 의한 진동을 제어하기 위하여 외재적으로 처리한 4차의 인공감쇄항을 추가하였다. 식(20)의 해를 구하기 위하여는 일반적인 Block tri-diagonal inversion 절차를 이용하였다. 현재의 식은 종래의 근사분해를 사용하는 수치기법과 거의 동일하며, 단지 Preconditioning 행렬의 계산만을 뿐이므로 추가계산에 소요되는 계산 비용을 거의 무시할 수 있다.

5. 경계조건

어떤 수치해석기법에서도 경계조건의 올바른 설정은 수치해 뿐만 아니라 수치해석기법의 수렴속도에도 크게 영향을 미치므로 매우 중요하다. 본 연구에서는, 일반적으로 사용하는 유동변수의 외삽대신, 더욱 물리적으로 의미있는 특성곡선해법(method of characteristics)을 근간으로 하는 경계조건⁽⁷⁾을 유입구와 유출구에 적용하였다. 이 방법을 사용하는 경우, Preconditioning이 적용된 Navier-Stokes 방정식에서 나타나는 가상음파(pseudo-acoustic wave)의 전파특성을 반영하기 위하여는 Preconditioning 행렬이 이 경계조건 수행시 반드시 포함되어야 한다.

특성곡선해법을 적용하는 절차는 다음과 같다. 먼저 Jacobian $\Gamma^{-1}A$ (또는 $\Gamma^{-1}B$)의 Left eigenvector로 구성되는 행렬 M^{-1} 를 식(20)에 곱함으로써 특성방정식들을 구한다. 다음으로 특정한

경계지역에서 사용 가능한 특성방정식만을 추출하기 위하여 선택(selection) 행렬 L 을 특성방정식들에 곱한다. 이 과정은 다음과 같은 식으로 표시할 수 있다.

$$LM^{-1} \left[S + \Delta t \frac{\partial A}{\partial x} \right] S^{-1} \cdot \left[S + \Delta t \left(\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} R_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \Delta Q_v = -\Delta t LM^{-1} R \quad (21)$$

위 식에서 선택 행렬 L 은 경계조건에 따라 달라진다. 아음속유동 유입구인 경우, $L = \text{Diag}(0, 0, 0, 1)$ 을 사용한다. 이 식중 0이 아닌 요소는 $(u-c')$ 에 대응하는 특성방정식이 사용됨을 뜻하며, 0 요소에 대하여는 경계에 맞는 물리적으로 의미있는 조건이 추가되어야 한다. 본 연구에서는 정체압력, 정체온도, 유동각도(v/u) 조건을 사용하였다. 유출구에서도 역시 위와 같은 방법을 사용한다. 다만, 아음속유동인 경우, 선택 행렬 $L = \text{Diag}(1, 1, 1, 0)$ 가 되며, 이 중 0 인 요소에 대하여는 일정 압력조건을 부과하고, 초음속유동의 경우 선택 행렬 L 은 Identity matrix가 되므로, 다른 경계조건이 필요없다. 고체벽면에서의 경계조건으로는 점착 조건($u=v=0$), 수직 압력구배조건($\partial p / \partial n = 0$), 일정온도 또는 단열조건이 문제에 따라 사용되었다. 대칭축은 대칭조건을 감안하여 일반적인 계산영역 점으로 처리하였다.

6. 계산결과 및 검토

이상과 같이 개발한 방법을 사용하여 여러가지 실제 응용분야의 해석을 수행하였다. 대표적인 문제로서 후향 스텝위의 유동, 면적 비가 큰 축소-확대 노즐내의 유동, 그리고 사각형 밀폐공간내의 자연대류 등의 해석을 수행하여 그 결과를 실험치 또는 다른 수치해석결과와 비교하였다. 또한 이들 문제에서 Preconditioning을 사용한 경우와 사용하지 않는 경우의 수렴속도를 비교함으로써 Preconditioning방법의 효율성을 평가하였다.

6.1 후향 스텝위의 유동장

첫번째 문제로 후향 스텝위의 유동장을 고려하였다. 본 연구에서 사용한 스텝형상은 Armaly 등⁽¹⁷⁾의 실험에서 사용한 것과 동일하며, H형 밀집격자계(121×61)를 사용하였다. 덕트의 길이와 폭은 각각 15 cm와 1 cm이며, 스텝의 높이는 0.5 cm이

다. 입구의 Mach수는 5×10^{-3} 이다. Armaly의 실험결과에 의하면 스텝높이를 기준으로 하는 Re_s 수 200이상의 경우 삼차원 유동현상이 나타나므로 본 연구에서는 Re_s 수 200 이하만을 고려하였다. 또한 본 문제는 비압축성 지배방정식을 이용하여 계산할 수 있지만, Preconditioning을 이용한 압축성 지배

방정식을 사용하여 그 효율성을 보고자 하였다. Fig. 1은 Semi-Log선도에서 Re_s 수 25, 50, 100에 대한 수렴특성을 보여준다. Preconditioning을 사용하였을 때, $Re_s=50$ 에서는 1 Order의 $\Delta Q/Q$ 가 떨어지기 위하여는 약 160번의 시간단계가 필요한 것을 볼 수 있다. 나머지 경우에도 비슷한 수렴속도를 관찰할 수 있으며, 따라서 본 문제의 경우 수렴특성은 Re_s 수에 무관하다 하겠다. 반면에 Preconditioning방법을 사용하지 않는 경우 수렴속도는 매우 느리며 1 Order의 $\Delta Q/Q$ 가 떨어지는데 약 5000 Step이 필요하다. 따라서 Preconditioning을 사용하는 경우 수렴속도를 약 30배 향상시키는 것을 볼 수 있다. Fig. 2는 유동방향의 속도분포를 나타내며, Re_s 수의 증가에 따라 후향 스텝하류

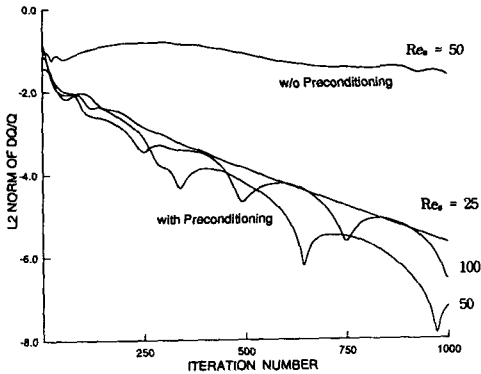


Fig. 1 Convergence rates with and without preconditioning method for flow over the backward facing step, CFL=10, $\sigma=2$

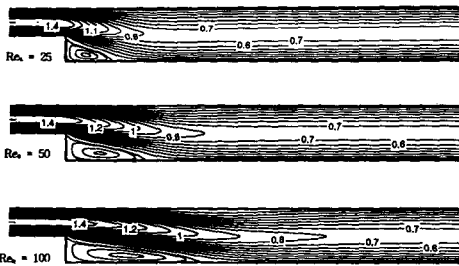


Fig. 2 Streamwise velocity contours for flow over the backward facing step with $Re_s=25, 50, 100$

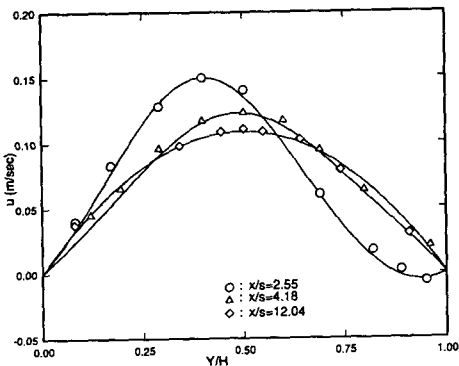


Fig. 3 Comparison of streamwise velocity profile with experimental data by Armaly et al⁽¹⁷⁾ at $Re_s=50$ for $x/s = 2.55, 4.18, 12.04$

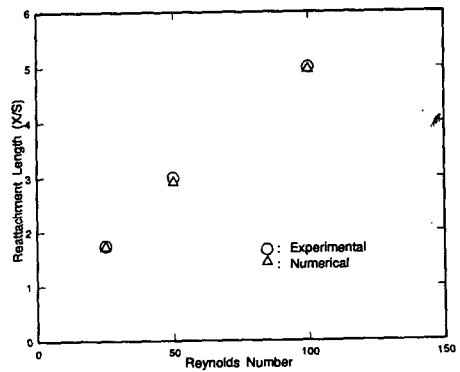


Fig. 4 Comparison of reattachment length with experimental data by Armaly et al⁽¹⁷⁾ for $Re_s = 25, 50, 100$

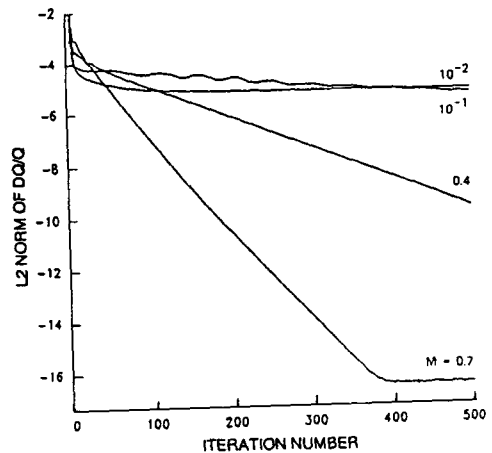


Fig. 5 Convergence rates for various Mach numbers without using preconditioning method

의 재순환영역 크기가 확장함을 볼 수 있다. 수치 해석 결과의 검증을 위해 Fig. 3과 Fig. 4에 속도 분포와 재부착길이를 Armaly 등⁽¹⁷⁾의 실험결과와 비교하였다. 각각의 경우 매우 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

6.2 축소-확대 노즐내의 유동장

두번째 문제는 축소-확대 노즐내의 유동장 해석을 고려하였다. 먼저 압축성 유체유동 해석시 시간 전진법의 Mach수에 따른 수렴특성을 예시하고자 한다. Fig. 5는 비점성의 이차원 노즐유동을 해석한 경우의 수렴속도를 보여주고 있다. (입구 대 목의 면적비: $AR=1.1$) 수렴속도는 Mach수가 작아짐에 따라 현저히 감소하고 있는 것을 볼 수 있다. $M=0.7$ 인 경우 Machine accuracy에 도달하기 위하여는 380 Step 정도가 필요하지만 Mach수가 작아질수록 수렴속도가 감소하여 $M=0.01$ 의 경우는 거의 수평선을 이루고 있는 것을 볼 수 있다. 이 경우 수렴선도를 외삽하여 보면 Machine accuracy에 도달하기 위하여는 10만번 이상의 Step이 필요하게 되며 따라서 실제 계산에 응용하기에는 거의 비실제적인 숫자라 할 수 있겠다. Fig. 6은 Preconditioning방법을 이용한 경우 $M=10^{-4}$ 의 수렴 선도를 보여준다. ($M=10^{-1} \sim 10^{-5}$ 에 대한 추가 계산 역시 동일한 수렴선도를 보여준다) Fig. 5와 비교시 수렴속도는 현저히 향상되었으며, 따라서 Preconditioning방법이 Mach수에 무관하게 천음속 영역에서 관찰할 수 있었던 수렴속도를 회복하게 하는 것을 볼 수 있다. Fig. 7은 본 계산에 의한 등 Mach수 선도이다.

$AR=100$ 의 노즐에 대한 계산을 추가로 수행하였다. 이 문제는 고속의 유체유동에 저속의 유체유동이 포함되는 대표적인 경우이다. 노즐 상반부에 91×41 격자계를 사용하였으며, 경계층을 포착하기 위하여 격자를 벽면에 고도로 밀집시켰다. 목적경을 기준으로 하는 Re수는 9×10^5 이다. Fig. 8은 Preconditioning을 사용한 경우와 사용하지 않은 경우의 수렴속도를 비교한다. Preconditioning을 사용하지 않은 경우 $\Delta Q/Q$ 를 1 Order 떨어뜨리기 위하여는 약 1000 Step이 필요하지만, Preconditioning을 사용하는 경우 70 Step이 필요하다. 따라서 Preconditioning 방법이 수렴속도를 약 14배 향상시키는 것을 볼 수 있다. Fig. 9는 본 계산에 의한 등 Mach수 선도이다. 큰 노즐 면적비로 인

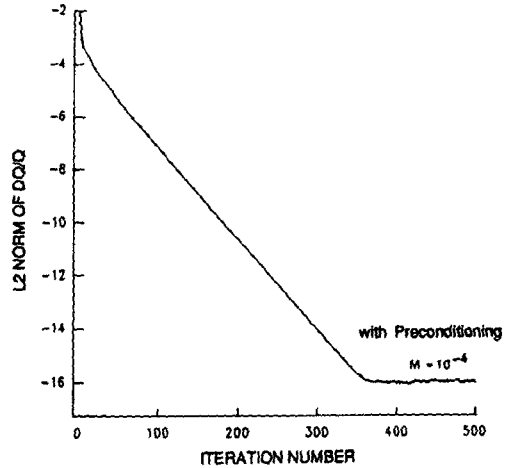


Fig. 6 Convergence rates with preconditioning method for $M=10^{-4}$ ($\Delta M=2 \times 10^{-6}$)

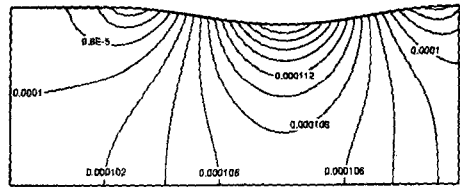


Fig. 7 Mach number contours in a nozzle ($AR=1.1$) with inlet Mach number 10^{-4}

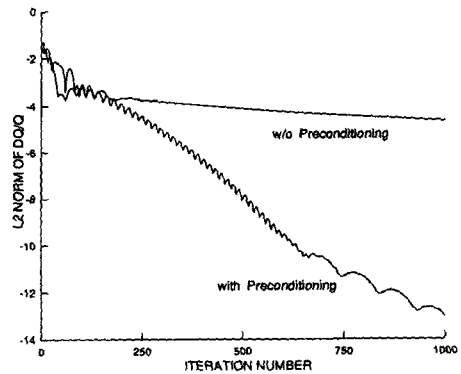


Fig. 8 Convergence rates with and without preconditioning method in a nozzle ($AR=100$)

해 입구에서는 매우 낮은 아음속(약 $M=0.005$) 유동이 되며 출구에서는 초음속유동이 된다. 본 문제에 관해 한 가지 특기할 점은 전체유동장 중 노즐 입구의 저 Mach수 영역에서는 이미 Preconditioning을 통하여 고유값의 크기가 잘 조절되었지만,

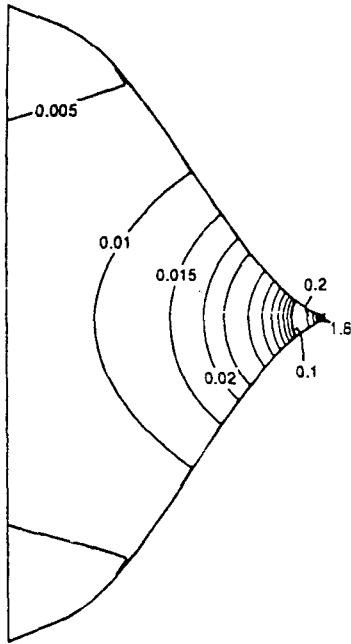


Fig. 9 Mach number contours in a nozzle (AR=100)

특히 목부근의 천음속영역 ($M=1.0$)에서는 지배방정식의 고유값의 차이가 여전히 크다. 그러나 이와 같은 천음속영역의 고유값의 차이는 그림에서 보다시피 수렴특성에 거의 영향을 미치지 않는 것 같으며 그 이유는 아마도 천음속영역의 크기가 전체 유동영역의 크기에 비해 작기 때문일 것으로 생각된다.

6.3 사각형 밀폐공간내의 자연대류

세번째 문제로 사각형 밀폐공간내의 자연대류에 의한 유동장을 계산하였다. 고려한 형상은 매우 간단한 구조로 사각형이며, 상하면은 단열되고, 좌측면은 온도 T_h 로 가열, 우측면은 T_c 로 냉각된다. 본 문제는 지난 수세기 동안 자연대류의 전형적인 문제로서 많은 연구가 있어왔으며, 대부분의 경우 비압축성 지배방정식과 함께 Boussinesq의 가정⁽¹⁸⁾을 이용하여 계산되어 왔다. 그러나 잘 알려져 있다시피 Boussinesq의 가정을 적용할 경우, 계산시 허용되는 수직벽 사이의 온도 차이는 제한되며 그 크기는 매우 작다. 그러나 보일러, 핵반응로, 소각로 등과 같이 강한 열원이 존재하는 실제 공학적 응용문제의 해석에 있어서는 벽사이의 온도 차이가 매우 크므로, Boussinesq가정을 이용하지 않는 압

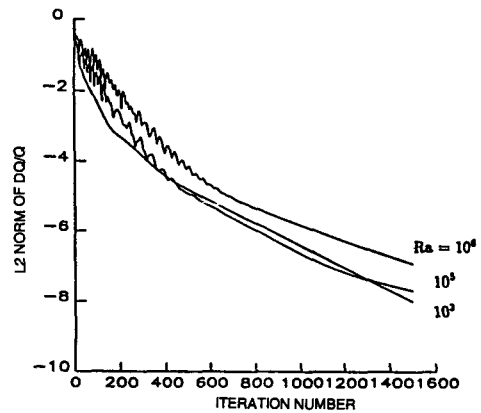


Fig. 10 Convergence rates with preconditioning method in a thermally driven cavity for $Ra=10^3, 10^5$ and 10^6

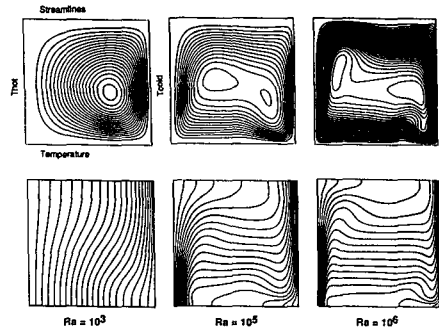


Fig. 11 Streamline and temperature contours in a thermally driven cavity for $Ra=10^3, 10^5$ and 10^6

축성 지배방정식을 사용하여야 한다. 따라서 본 문제는 강력한 열원으로 인한 밀도 변화가 큰 저속의 유동장의 대표적인 예라 할 수 있다. 본 문제는 Ra 수 (Rayleigh number), 가로 세로 형상비 (aspect ratio), 온도차 변수 ($\epsilon=(T_h - T_c)/(T_h + T_c)$)에 따라 복잡한 유동형상을 보여 주는 것으로 알려져 있다. 본 연구에서는 $\epsilon=0.6$ 에 대하여 세 가지 Ra 수 $10^3, 10^5, 10^6$ 의 경우를 고려하였다. 또 가로 세로 형상비는 1이며, 점성 및 열전도계수는 Sutherland법칙을 사용하였다. 사용한 격자제는 등간격이며 91×91 이다. Fig. 10은 Preconditioning을 이용한 경우의 수렴특성을 보여준다. 모든 경우에 수렴속도는 거의 같으며 1 Order의 $\Delta Q/Q$ 가 떨어지는 데 약 300 Step이 소요됨을 볼 수 있다. Preconditioning을 이용하지 않은 경우에는 수렴에 실패하였다.

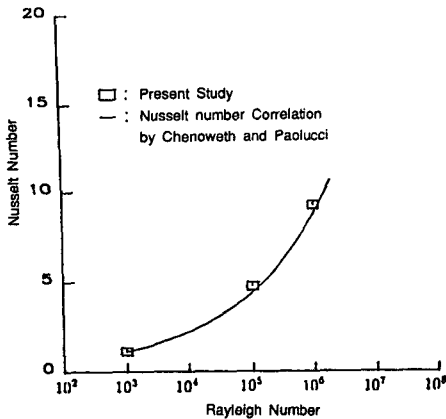


Fig. 12 Comparison of Nusselt number with a correlation by Chenoweth and Paolucci⁽¹⁹⁾

Fig. 11은 $Ra=10^3, 10^5, 10^6$ 에 대한 유선(streamline)과 등온도분포를 보여준다. 일반적으로 이와 같은 해는 Boussinesq가정을 이용하는 경우에는 밀폐공간내의 중심에 대하여 대칭적인 결과를 나타내는 것으로 알려져 있다. 그러나 그림에서 보듯이 현재의 결과는 이와 매우 다르며 비대칭적인 결과를 보여준다. 세 가지 경우 모두, 유동장의 기본 형태는 재순환 유동이며, 이 재순환 유동은 수평 온도구배($\partial T/\partial x$)에 기인한다. $Ra=10^3$ 에서는 수평 온도구배가 전유동장에 대하여 음(-)의 부호를 지니며 주유동장은 시계방향으로 회전하는 유동장이다. $Ra=10^5, 10^6$ 에서는 주유동장에 2개의 이차 회전유동장이 중첩되어 있다. 이차 회전유동장은 Ra 수가 높은 경우 벽주위에 경계층이 급격히 형성되어 수평 온도구배가 반대부호가 되므로 나타난다. 또 Ra 수가 증가함에 따라 이차 회전유동장의 중심이 벽면쪽으로 이동하는 것을 볼 수 있다. 수치 결과의 정확도를 검증하기 위하여 Fig. 12에 Chenoweth와 Paolucci⁽¹⁹⁾의 Nusselt수 관계식과 비교하였으며 매우 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

7. 결 론

초저속의 아음속유동으로부터 초음속유동에 걸친 광범위한 속도영역에 대한 압축성 유체유동해석을 위하여 Preconditioning방법을 개발하였다. 이 Preconditioning방법의 기본 개념은 점성변수벡터를 주 종속변수벡터로 사용하는 것이다. 이 주 종속변수를 이용함으로써, 비점성유동에 대하여는 고

유값들을 거의 같은 크기로 조절할 수 있었고, 점성이 지배하는 유동에 대하여는 확산항에 대하여 시간역행을 방지할 수 있었다. 또한 지배방정식의 시간항에 적절한 스케일링변수를 사용함으로써 CFL number와 Von Neumann number의 크기를 동시에 조절하여 수렴속도를 현저히 향상시킬 수 있었다. 마지막으로 여러가지 응용문제를 통하여 Preconditioning방법의 계산능력을 검증하였다. 그 결과 수렴속도는 Mach수에 따라 2배로부터 수만 배의 향상이 있었다.

후 기

본 연구는 1993년도 한국과학재단의 핵심연구과제 및 1992년도 아주대학교 연구비 지원으로 수행되었기에, 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Beam, R. M. and Warming, R.F., 1976, "An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic System in Conservation Law form," *Journal of Computational Physics*, Vol. 22, pp. 87~110.
- (2) Briley, W. R. and McDonald, H., 1977, "Solution of the Multi-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equation by a Generalized Implicit Method," *Journal of Computational Physics*, Vol.24, pp. 372~397.
- (3) Merkle, C. L. and Choi, Y.-H., 1985, "Computation of Low Speed Flows with Time Marching Procedures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 25, pp. 293~311.
- (4) Guerra, J. and Gustaffson, B., 1986, "A Numerical Method for Incompressible and Compressible Flow Problems with Smooth Solution," *Journal of Computational Physics*, Vol. 63, pp. 377~397.
- (5) Rehm, R. G. and Baum, H. R., 1978, "The Equations of Motion for Thermally Driven, Buoyant Flows," *Journal of Research of National Bureau of Standards*, Vol. 83, pp. 297~308.
- (6) McMurtry, P. A., Jou, W. H., Riley, J. J., and

- Metcalf, R. W., 1986, "Direct Numerical Simulations of a Reaction Mixing Layer with Chemical Heat Release," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 6, pp. 962~970.
- (7) Choi, Y.-H., 1988, *Computation of Low Mach Number Compressible Flow*, Ph.D. Thesis, The Pennsylvania State University.
- (8) Viviani, H., 1985, "Pseudo-Unsteady Systems for Steady Inviscid Flow Calculation," *Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics*, F. Angrand et al, ed., SIAM, pp. 334~368.
- (9) Peyret, R. and Viviani, H., 1985, "Pseudo-Unsteady Methods for Inviscid or Viscous Flow Computation," *Recent Advances in the Aerospace Sciences*, C. Casci, Ed, pp. 41~71.
- (10) Turkel, E., 1987, "Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations," *Journal of Computational Physics*, Vol. 72, pp. 277~298.
- (11) Storti, M. A., Baumann, C. E. and Idelsohn, S. R., 1990, *A Preconditioning Mass Matrix to Accelerate the Convergence to the Steady Euler Solutions Using Explicit Schemes*, II WCCM, Stuttgart.
- (12) Briley, W. R. and McDonald, H. and Shamroth, S. J., 1983, "A Low Mach Number Euler Formulation and Application to Time-Iterative LBI Schemes," *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 10, pp. 1467~1469.
- (13) Van Leer, B., Lee, W. T. and Roe, P., 1991, "Characteristic Time-Stepping or Local Preconditioning of the Euler Equation," *AIAA Paper* 91~1552.
- (14) Merkle, C. L. and Athavale, M., 1987, "Time-Accurate Unsteady Incompressible Flow Algorithms Based on Artificial Compressibility," *AIAA Paper* 87~1137.
- (15) Rosenfeld, M., Kwak, D. and Vinokur, M., 1988, "A Solution Method for the Unsteady and Incompressible Navier-Stokes Equations in Generalized Coordinate Systems," *AIAA Paper* 88~0719.
- (16) Douglas, J. and Gunn, J. E., 1964, "A General Formulation of Alternating Direction Methods-Part I Parabolic and Hyperbolic Problem," *Numerische Mathematik*, Vol. 6, pp. 428~453.
- (17) Armaly, B. F., Durst, F., Pereira, J. C. F. and Schonung, B., 1983, "Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 127, pp. 473~496.
- (18) Kayes, W. M. and Crawford, M. E., 1980, *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York.
- (19) Chenoweth, D. R. and Paolucci, S., 1986, "Natural Convection in an Enclosed Vertical Air Layer with large Horizontal Temperature Differences," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 169, pp. 173~210.