財務管理硏究 第十一卷 第一號(1994. 6), 73-96

Chaos 모형을 이용한 한국 주식시장의 비선형 동태적 특성에 관한 연구

金暎圭* · 裵在鳳**

〈요 약〉

본 연구는 비선형적 제반 특성을 종합적으로 반영하는 chaos모형을 우리 나라의 종합 주가지수 수익률의 시계열 자료에 적용하여 주식 수익률의 비선형적 행태를 실증적으로 분석하였다.

실증분석의 결과, 종합 주가지수 수익률은 내재차원이 14이고, 상관차원이 5에서 6 사이인 chaos적 특성을 갖고 있다는 것을 알 수 있었다. 또한 상관차원이 5에서 6 사이라는 것은 우리 나라 주식시장에 영향을 미치는 주요 변수가 약 6개라는 것을 의미한다. 특히 리야푸노프 지수에 의한 분석 결과는 주별 및 일별 수익률에서 이들 값이 공히 양의 값에 수렴하고 있어 우리 나라 주식 수익률은 이상한 끌개(strange attractor)를 갖는 chaos적 행태를 보인다고 결론 지울 수 있다. 콜모고로프 엔트로피에 의한 분석 결과는 주별 수익률 및 일별 수익률의 경우에 모두 0.25 ± 0.05의 유한한 값으로 나타나고 있으며, 또한 이들 일별 및 주별 양 수익률이 유사한 값을 보이고 있어 서로 유사한 chaos적 특성을 갖고 있다는 것을 알게 되었다.

I. 서 론

김영규 및 배재봉(1994)의 연구 결과와 같이 우리 나라 주식시장의 주식 수익률 간에 비선형적 종속성이 존재한다면, 과연 어떠한 비선형 주식 수익률 결정 모형이 우리 나라 주식시장에 적합할 것인지를 규명해 볼 필요성이 있다. 본 연구는 이러한 노력의 일환으로서 전통적인 자본시장 모형인 선형 확률 모형 대신에 비선형 결정 모형(chaos) 모형을 도입하여 우리 나라 주식시장의 주식 수익률 결정과정을 실증적으로 검토하고자 한다.[1)]

Lucas(1978)는 주식 가격 P_t가 아래와 같은 균형 자산 가격 결정 과정을 통하여 결정된다고 하였다.[2)]

* 성균관 대학교 교수

** 안진 회계법인 공인 회계사

1) 우리 나라 주식시장의 비선형적 종속성에 관한 연구는 김영규 및 배재봉, "한국 주식 수익률의 시계열적 종속성에 관한 연구," 재무연구, 제 2호, 1994.를 참조할 것.

2) 일반적인 자산가격 결정 균형 모형은 Lucas, R. E., "Asset Prices in an Exchange Economy",

$$P_t = h(X_t) \tag{1}$$

$$X_t = f(X_{t-1}, \mu_t) \tag{2}$$

단; X_t는 주식의 상태 변수 벡터,

μ_t는 랜덤 변수의 벡터

만약 식(1)과 식(2)에서 함수 "h"와 "f"가 비선형 함수라면, 주식 가격 P_t는 비선형적 과정을 거쳐서 결정된다고 볼 수 있다. 그리고 위와 같은 주식 수익률 생성과정의 일반적인 모형은 비선형 모형이며 선형 모형은 비선형 모형의 특별한 경우가 될 것이다.[3)]

Lucas가 설정한 주식 수익률의 비선형적 생성과정을 설명하고자 하는 접근 방법은 크게 chaos 유형의 비선형 결정론적인 접근방법과 ARCH 유형의 비선형 확률적 접근방법으로 구분할 수 있다. 본 연구의 주요 방법론인 chaos적인 접근방법은 chaos의 본질적인 특성에 따라 랜덤하게 보이는 현상을 결정론적으로 설명하고자 하는 접근방법이며, 비교적 최근인 1980년대 중반 부터 재무론 분야에 chaos 모형이 도입되기 시작하였다.

Chaos 모형을 이용한 연구방법이 재무론 연구에서 새로운 연구 방법론으로 부각된 것은 다음과 같은 이유 때문이다. 자본시장의 균형이 내재적으로 동태적이고 불안정하다는 생각은 지난 수십 년간의 경기변동론 및 재무론 연구에서 거의 무시되어 왔다. 그 대신 시장균형 모형의 주된 논리는, 자본시장은 외부의 충격이 없이 안정적인 성장 과정을 거치도록 균형상태를 이루고 있으며 일시적인 균형상태로부터의 이탈은 랜덤하게 주어지는 외부 충격 때문에 일어난다는 것이다. 그러나 최근의 연구결과에 의하면 시장균형 조건은 외부의 경제적 충격이 없이도 내재적인 현상으로 인해 심한 변동을 보이는 것으로 나타나고 있다.[4)]

Chaos 모형은 자기 생성적(self-generating)이고 계속적으로 변동하는 비선형 동태적인 과정을 설명할 수 있는 모형으로서, 시장 균형조건이 내재적으로 변동하는 현상을 설명할 수 있다.

CAPM을 비롯한 전통적인 재무이론이 대개 균형상태의 달성 가능성과 투자자들의 정

conometrica 46 : 1978, pp 1429~1445.를 참조할것.

3) Scheinkman과 Weise(1986)에 따르면 비선형성 가정은 완전 자본시장 가설 을 포기한다는 것을 의미한다. 즉 모든 투자가 들이 합리적 기대 가설의 관점에서 가격결정 구조에 대해 정확히 알고 있다면 주가는 비선형적인 Lucas의 균형 자산가격 결정 모형에 따라 결정될 것이며 이때 주식 수익률의 확률적 변동은 선형성을 가정할 경우보다 적어질 것이다. 실제로 Scheinkman과 Weise(1986) 연구결과에 따르면 만약 자산가격 결정 모형이 선형 모형이라면 비이성적으로 높은 위험 회피자를 가정하지 않는 한 주식 수익률의 변동성을 보상하기에는 상대적으로 너무 높은 위험 프리미엄이 필요하다고 한다.

4) Lorenz(1989, pp5-15)를 참조할 것. 내생적인 변동(endogeneous fluctuation)으로 인한 시장 균형 모형은 Boldrin & Woodford(1990)을 참조할 것.

태적 의사결정의 가정에 입각하여 이론화되고 또 검증되고 있다. 그러나 자본시장내의 불균형 상태는 항상 존재하며 각 투자자들의 투자 의사결정이 과거에 인식된 경험에 의존하고 서로 영향을 미친다고 가정해 볼 때 기존의 재무이론은 그 한계점을 가질 수 밖에 없다. Chaos 모형은 균형상태의 달성 불가능성이나, 동태적 의사결정을 고려하는 비선형 모형이며 시간을 한개의 변수로 취급하여 시간에 의한 피이드백 효과를 분석할 수 있는 모형이다. 그리고 chaos 모형은 급격한 주가 변동 현상과 같은, 내재변수의 불안정성이 지수적으로 확대되어 나타나는 이례적 현상을 설명할 수 있다.[5]

상기한 바와 같이 이론적인 발전이나 경제성 측면에서는 선형 모형 보다 다소 뒤떨어지지만 적용상의 특수성이나 포괄성에 있어 강점을 지닌 비선형 모형을 주식시장에 적용한 연구는 아직까지 우리 나라에 있어 극히 한정적으로 적용되고 있을 뿐이다. 우리 나라 주식시장을 대상으로한 비선형 모형의 부분적 적용은 주로 주식 수익률 분포의 정규 분포성 및 안정성 검정, ARCH 유형의 분산성 연구에 초점을 맞추고 있다.[6] 그러나 이와 같은 제한적 연구들은 주식 수익률의 비선형적 특성에 대한 부분적인 분석에 불과한 실정이고 본격적인 비선형 모형의 도입은 아직도 미흡한 실정이다.

본 연구는 다음과 같이 구성되어 있다. II에서는 chaos 모형에 대한 정의, 주요 특성 및 검정 기법이 요약되며 재무론 분야에 chaos 모형을 도입한 선행연구들이 요약된다. III에서는 우리 나라 주식시장에 chaos적 특성이 존재하는지 여부에 대한 실증 분석 결과가 제시된다. 마지막으로 IV에서는 본 연구의 결과를 요약하고 미래의 연구 방향을 제시한다.

II. Chaos적 접근방법

1. Chaos 모형에 대한 정의 및 주요 특성

가장 간단한 Chaos 모형이 식(3)과 같은 텐트 맵이다. 텐트 맵에서 X_t 시계열은 초기치 X_0 값을 0과 1 사이의 값이라 할 때 식(3)에 따라 산출된다.

$$X_t = 2X_{t-1}, \text{ 단; } X_{t-1} < 0.5$$
$$X_t = 2(1 - X_{t-1}), \text{ 단; } X_{t-1} \geq 0.5 \quad (3)$$

5) 주가의 폭락 현상은 흔히 어떤 특정한 경제사건의 발생이 없이도 주가의 상승 또는 하락 기대에 대한 투자자들의 심리동요에 의한 집단적 혼란에 의해 발생할 수 있다.

6) 우리 나라 주식시장의 주식 수익률 분포에 대한 연구는 성삼경과 안진철(1986), 김대훈과 이상빈(1992) 등의 연구가 있으며 ARCH를 이용한 분산성에 관한 연구는 배재봉(1993), 조담(1994) 등의 연구가 있다.

위 식(3)에서 보면 X_t는 X_{t-1}의 비선형 함수이다. 텐트 맵은 몇 가지의 중요한 특성을 가지고 있다. 첫째는 $\{X_t\}$는 t가 무한대에 접근할때 [0, 1]에서 일양 분포(uniformly distributed) 형태를 띤다. 둘째는 초기치 X_0 측정 시에 발생한 오차는 X_t를 예측할 때에 지수적으로 확산되어 나타난다. 세째는 X_t가 식(3)식에 따라 결정론적으로 정해지나 자기상관 계수가 0이어서 무작위한 과정으로 보인다. 넷째 X_t의 시계열적인 변화과정을 보면 X_t 값이 점차적으로 작은 값씩 변화하다가, 예를 들어 $X_{t-1} = 0.5$에서 갑자기 큰 폭으로 변화할 수 있다.

위와 같은 chaos 모형은 무작위한 것처럼 보이나 실제로는 비선형적으로 결정론적인 과정으로 정의되며 일반적인 chaos 모형 또는 chaos map은 다음과 같이 정의된다.

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots\cdots) \tag{4}$$

식(4)에서 X_t는 스칼라이거나 벡터일 수 있으나 f(·)는 비선형 함수이어야 한다. 또한 f(·)는 시계열 상에서 한개 이상의 안정적 균형점인 이상한 끌개(strange attractor)를 갖고 있어야 하며 초기조건과 무관한 성질을 가져야 한다.[7]

Chaos 모형의 첫번째 특성은, 식(5)와 같이 초기치 X_0를 관측하는 과정에서 정확한 값 a에 대하여 ε만큼의 측정오차가 발생했을 경우, 연속된 시계열에 대한 예측치는 초기 상태로부터 특정 기간 t가 증가할 수록 지수적으로 증가한다.

$$X_0 = [a-\varepsilon, a+\varepsilon], \varepsilon > 0 \tag{5}$$

따라서 예측치 X_t는 t가 무한대 또는 장기화될수록 정확한 값을 파악하지 못하고 [0, 1]과 같이 일정한 범위 안에 있다는 것만을 알 수 있을 뿐이다. 이것이 의미하는 것은 만약 초기값 X_0에 대해 무한대로 정확히 알고 있다면 X_t는 완전하게 예측가능할 것이나, 현실적으로 초기값 측정 시에 측정오차가 존재할 것이므로 X_t를 정확히 예측하는 것은 불가능하다는 것을 의미한다.

두번째 특성은 chaos 모형에서 시계열 X_t는 일정한 규범성을 갖는 결정론적 시스템으로부터 생성된 것임에도 불구하고 무작위 하게 보이는 것이다. 즉 평균이 0이고 공분산이 안정적인 시계열 {X(t)}에서, 시계열 {X(t)}가 IID(Independently Identically Distributed)인 경우 r차 자기 공분산 함수($\varphi_{xx(r)}$)는 0이다.[8] 이 경우 시계열은 무작위성을 보이며 과거 정보

7) 이상한 끌개는 시계열에서 일시적인 균형점으로 정의된다. 비선형 체계하에서는 이상한 끌개가 한개 이상으로 정의된다. 보다 상세한 설명은 H.W.Lorenz(1989)를 참조할 것.

에 기초하여 미래 값을 예측할 수 없다. 그러나 과거정보와 미래예측 간에 일정한 패턴을 가정한 chaos 모형에서도 역시 자기 공분산이 0임에 비추어 볼 때 모든 r 〉 0에 대해 $\varphi_{xx}(r)=0$인 사실이 반드시 과거 정보에 근거한 미래 예측이 불가능하다는 것을 의미하지는 않는다.

세번째 특성은 안정적 균형이 시계열 자료에 존재하는지를 리야푸노프(Lyapunov) 지수를 통해 측정 가능하다는 것이다.[9] 예를 들어 리야푸노프 지수 값이 음(−)의 값을 가질 경우에는 한 점으로 주어지는 안정적 균형이 존재함을 의미하며, 0의 값을 가질 경우 범위 형태로 결정되는 균형대가 존재한다는 것이며, 양(+)의 값을 가질 경우 복수의 균형이 존재한다는 것이다.

네번째 특성은 매개변수의 작은 변화가 동태적 모형의 장기적 변화에 극적으로 영향을 미쳐 큰 변동을 초래할 수 있다는 것이다. Chaos 모형에서 시계열의 장기 행태는 갈래질(bifurcation)을 통한 주기배증 과정을 거치며, 또한 특정 임계점 이상인 경우에는 간헐적인 안정적 균형이 존재하고, 특정점의 집합이 발생할 확률이 높은 규칙성 있는 혼돈을 계속한다.[10]

2. Chaos 모형 검정 기법

Chaos 모형을 검정하기 위한 표준적인 기법은 상관차원(correlation dimension), 리야푸노프 지수(Lyapunov exponent), 및 콜모고로프 엔트로피(Kolmogorov entropy) 등이 있다. 이하에서는 위 검정기법의 의미를 검토하고 보다 상세한 검정과정은 부록에서 검토하였다.

상관 차원은 시스템의 특성을 몇 개의 요인으로 정의할 수 있는 가를 의미하는 것으로 Grassberger 및 Procaccia(1983)에 의해 제시된 개념이다. 어떤 시스템이 m차원 위상 공간에서 chaos적인 특성을 보이는 경우에, 끌개(attractor)내에 있는 두개의 점은 기간이 지남에 따라 근접하게 될 것이고 분석 기간을 무한대로 할 경우 chaos 시스템 상의 점들은 끌개에 집중될 것이다.

즉 chaos 시스템의 경우 차원 m이 늘어날수록 상관 차원은 특정 값에 수렴하게 되며, m

8) r차 자기 공분산 함수는 모든 정수 값 r에 대해 $\varphi_{xx(r)} = E[X_t, X_{t-r}]$로 정 의된다.

9) Lyapunov 지수는 $L = \lim_{t\to\infty} (\log(\|DF^t(x)\cdot v\|)/t)$로 정의된다. 여기에서 $F^t(x)$는 초기조건 x로 부터 시작하여 F를 t번 반복한 값이며, D는 미분 함수, ‖‖는 norm, v는 방향벡터이다. 보다 자세한 내용은 부록을 참조할 것.

10) 주기란 어떤 시스템이 원래의 상태로 돌아오는 데 걸리는 기간이다. 갈래질은 안정적 균형이 새로운 두 개의 균형으로 분기하는 현상을 말하며 갈래질 이 시작되는 어떤 임계값을 지나면 원래의 상태로 돌아오는 데 두배 이상 의 시간이 걸리는 것이 주기 배증 과정이다.

이 증가함에 따라 상관 차원이 계속 증가한다면 자유도가 무한대인 확률적 과정으로 정의할 수 있다. 따라서 상관 차원을 통하여 분석 대상 시스템이 비선형적 결정 시스템인지 확률적 시스템인지를 구분할 수 있다.

리아푸노프 지수는 초기 조건에의 민감성 즉 시간이 지남에 따라 chaos 모형의 예측력이 감소해가는 정도를 측정하는 지수이다. 양의 리아푸노프 지수는 차원 공간상에서 근접한 점들의 발산 정도를 의미하고 음의 리아푸노프 지수는 근접한점 들이 수렴하는 정도를 의미한다. 즉 리아푸노프 지수는 근접한 초기 점들이 멀어지거나 가까워지는 속도를 표시한다. 이러한 리아푸노프 지수의 특성에 따라 어떠한 시스템이 chaos적인 특성을 갖기 위해서는 가장 큰 리아푸노프 지수가 양의 값을 가져야한다.

상관 차원이 시스템의 복잡성을 측정하는데 비하여 엔트로피는 정보량을 측정하여 시간적인 종속성을 측정한다. 예를 들어 초기 상태에서는 구별할 수 없었던 두 점이 시간이 지남에 따라 구분 가능하게 될 경우 엔트로피는 얼마나 빨리 구분 가능하게 되는지를 측정한다. 정보에 대해 비 탄력적인 시스템인 경우 콜모고로프 엔트로피(K)는 0이고 IID인 확률 시스템인 경우 $K=\infty$이며 결정론적 시스템인 경우 $0 < K < \infty$이다.

3. 재무론 분야에의 Chaos 모형의 도입

Chaos 이론의 재무론 분야에의 도입은 1980년대 후반부터 몇몇의 학자에 의해 시작되고 있으나 아직 충분한 연구가 이루어지지 않고 있다. 주식 수익률에 명백한 비선형적 과정이 존재한다는 것이 Hinich & Patterson(1985)에 의해 보고된 후 Ashley & Patterson(1986), Hinich & Patterson (1988), Scheinkman & Lebaron(1989), 및 Hsieh(1991) 등의 후속 연구가 있어왔다. 이하에서는 실증분석 결과를 중심으로 하여 비선형 모형 또는 chaos 모형을 자본시장에 도입한 주요한 연구를 살펴보겠다.

1)Hinich & Patterson(1988)

Hinich & Patterson(1988)은 bispectrum 방법을 사용하여 주식 수익률의 선형적 및 비선형적 행태를 분석하였다.[11] 다우 존스 산업 평균(DJIA) 지수를 구성하는 30개 주식중 15개 주식을 대상으로 CRSP 자료를 표본 자료로 선정하고, 분석 기간은 1978년 9월 1일부터 1981년 8월 31일까지로 하였다. 이 기간동안 발생한 모든 거래중 상하로 20$ 이상의 급격한 주가변동을 보인 거래를 제외하고, 15분 단위 및 일별 수익률을 계산하고 시계열 자료의 비선형성 및 정규성(Gaussianity)을 분석하였다.

15분 단위의 주식 수익률은 실증분석한 결과 5% 유의 수준에서 모든 주식에서 선형성

11) bispectrum은 3차 누적함수의 이중 Fourier 변환과정으로 정의된 두 빈도 를 갖는 복소수 함수이다.

가설이 기각되었다. 또한 주식 수익률의 정규성 여부를 검정한 결과는 정규성 가설을 기각하여 주식 수익률 분포가 정규분포를 보이지 않음이 입증되었다. 일별 수익률에서는 개별 주식 수익률 15개의 시계열중에서 3개의 경우에서 시계열의 선형성을 기각하지 못하였다. 일별 수익률에 대해서 시차 1, 2, 3, 4, 5, 6일로 시계열 상관계수를 추정한 결과는 시차 1일과 2일에서 3개의 주식만이 2 표준편차 이상의 의미 있는 자기상관성을 보이고 있다.

자기상관성이 약하다는 결과는 기존의 자본시장 이론에서 IID 가정을 지지하는 것으로 해석될 수 있으나 실제로는 비선형적 종속성이 존재함으로 인해 IID가설이 성립되지 않을 가능성이 있음을 그들은 지적하였다. 결론적으로 DJIA 주식 수익률 중에서 대부분의 수익률 분포가 정규분포가 아니며 비선형적 특성을 갖고 있음을 그들은 발견하였다.

2) Scheinkman & Lebaron(1989)

Scheinkman & Lebaron(1989)은 CRSP의 1960년대 중반부터 5200개 일별 수익률과 1226개 주별 수익률을 분석대상으로 하였다. 그들은 주식 수익률의 비선형 모형으로써 chaos 모형을 가정하고, 주별 수익률 및 일별 수익률의 잔차에 대하여 상관차원(correlation dimension)을 계산하였다. 그들은 주별 수익률의 상관차원은 내재차원(embedding dimension) 13에서 안정적인 경향을 보이고 있으며, 주별 수익률은 상관차원 5.7인 낮은 차원의 chaos 모형을 따르고 있다고 주장하였다. 이에 반하여 랜덤화한 시계열 자료의 상관차원은 내재차원 보다는 작으나 계속 증가하고 일정한 점에 수렴하지 않는 등 무작위한 현상을 보이고 있음을 발견하였다. 결론적으로 그들은 CRSP 주별 수익률에는 일정한 규칙 즉 chaos적인 특성이 존재한다고 주장하였다.

일별 수익률의 검정에 있어서도 연속되는 날짜 간에 강한 상관성이 존재한다는 가정 하에서 선형적 특성을 제거한 후, 잔차의 비선형적 특성을 관찰하기 위해 주별 수익률의 경우와 같은 방법을 그들은 적용하였다. 일별 수익률의 상관차원은 내재차원 20에서 안정적이고 그 수치는 5.9이었다. 그들은 이러한 낮은 수치의 상관차원은 과거의 일별 및 주별 주식 수익률을 이용할 경우 chaos 모형의 적용을 통해 결정론적으로 미래의 주식 수익률을 예측하는 것이 가능함을 보여 주고 있다고 주장하였다. 또한 상관차원의 근사값이 6임으로 인해 CRSP의 경우 6개 정도의 요인이 주식 수익률 생성과정에 영향을 미치고 있다고 그들은 해석하였다.

또한 그들은 비선형 모형의 대표적 모형인 ARCH 모형의 유용성을 검정하기 위하여 임으로 ARCH 모형을 설정하고 그 잔차에 대해서 비선형성을 검정하였다. 검정결과는 ARCH에 의한 효과를 제거했음에도 주별 수익률에는 chaos적인 비선형성이 존재함을 보이고 있다.

3) Hsieh (1991)

Hsieh(1991)는 1963년부터 1987년까지 CRSP의 주별과 일별 주가지수 수익률을 분석하였다. 그는 주가지수 수익률 계산의 기초자료로서 가치가중 지수(value weighted index), 균등가중 지수(equally weighted index), 기업규모에 따라 10개 군으로 가치가중한 지수 및 S&P 500 지수를 사용하였다. 주된 분석으로 Hsieh는 주식수익률 생성과정이 IID인지 여부를 검정하였으며 IID가 기각된 경우 그 원인을 분석하였다. IID 기각 원인으로는 주식수익률의 안정성, chaos적인 비선형성, ARCH류의 비선형성 등이 고려되었다.

실증분석 결과에 의하면 주식 수익률의 분포가 leptokurtic한 특성을 보였으며, BDS 통계적 방법을 이용한 IID 검정결과는 주가지수 수익률이 IID라는 가설을 기각하였다.

그는 IID를 기각시키는 하나의 원인으로서 주식 시장이 낮은 차원의 chaos적인 행태를 보인다는 가설을 설정하였다. 3차 모멘트 검정 방법을 이용한 결과는 3차 모멘트가 "0"이라는 가설을 기각하지 못하였으며 chaos적 행태가 존재할 가능성이 제시되었다. 그러나 주식 수익률의 조건부 평균이 chaos 과정을 따른다고 가정하고, 조건부 평균을 비모수 회귀분석(nonparametric regression) 방법에 의해 직접 추정하고 그 예측능력을 랜덤워크 모형과 비교한 결과에 따르면 랜덤워크를 가정한 경우 보다 예측오차가 개선되지 않았다. 따라서 그는 주식 시장에는 조건부 평균변화가 없는 것으로 해석하고 있으며 chaos적 특성이 없는 것으로 해석하였다.

그는 IID를 기각시키는 또다른 원인으로서 이분산성을 고려하였다. 이분산성 검정을 위하여 EGARCH 모형을 채택하였으며 EGARCH에 의한 잔차 시계열에 대하여 BDS 검정을 하였다. 그 결과 BDS 통계량이 원래 시계열 자료 보다 상당히 감소하고 있음을 보여 주식 시계열 자료에 ARCH적 특성이 있음을 보였다.

4) 기타 자본시장에서의 연구

Frank & Stengos(1989)는 1970년대 중반부터 1980년대 중반에 이르기까지 금과 은 선물시장의 수익률을 분석하였다. 연구결과는 전통적인 통계적 방법으로는 마팅게일 가설을 기각할 수 없었으나 상관차원 및 콜모고로프 엔트로피를 사용한 chaos적인 방법을 통해서는 마팅게일 가설을 기각하였다. 즉 그들은 금과 은의 수익률 생성과정이 상관차원이 6과 7 사이의 수치를 가지는 비선형 chaos과정임을 보였다.

이상의 연구결과와 같이 chaos 모형과 같은 비선형 모형을 통하여 주식 수익률의 생성과정을 기존의 white-noise 모형보다 더 효율적으로 설명할 수 있다는 것은 획기적인 사실이다. 전통적인 자본시장 이론은 주로 white-noise 모형의 타당성 검정에 초점을 맞추어 왔으며 주식 수익률은 경제적 의미에서 예측이 곤란하다는 것이 일반적인 견해 이다.[12] 그러

나 chaos와 같은 주식 수익률의 비선형 동태 모형은 주식 수익률의 시계열 상관성을 내포하고 있는 것으로 주식 수익률의 과거 자료에 의한 예측가능성 및 경제적으로 초과수익을 얻을 수 있는 규칙을 개발할 수 있음을 의미한다.

III. 실증분석

1. 표본 자료 및 검정 절차

본 연구는 주식 수익률의 비선형 동태적 특성 문제를 분석하기 위하여, 시장 전체의 가격지수로부터 계산된 주별 수익률 및 일별 수익률을 기본적인 검정표본으로 이용하였다. 시장 주가지수 대용치로는 시가 총액식 종합 주가지수를 이용하였다.

표본 기간은 검정의 소 표본 편의를 최소화하기 위하여 신평-KAIST 수익률 데이터 베이스로부터 1980년 1월 5일부터 1992년 6월 30일까지(거래일 수로는 3655일, 647주)기간을 설정하였다. 또한 주가지수 수익률은 연속형 수익률인 자연대수 수익률로 계산되었다.

Lorenz(1989, pp 14~28))는 chaos적 특성에 관한 실증분석을 위하여 다음과 같은 분석단계를 제시하고 있으며 본 연구에서도 같은 단계를 거쳐 우리 나라 주식 수익률에 관한 실증분석을 수행하였다.

첫째, 상관차원 D(m)을 계산한다. 만약 상관차원이 높게 나타난다면, 주식 수익률 생성과정이 근사적으로 랜덤하다고 할 수 있으며 chaos적 과정에 따라 주식 수익률 생성과정이 움직인다는 가설을 기각한다. 현실적으로 상관차원이 10이상으로 나타날 경우 이용 가능한 재무적 자료의 한계성 및 chaos 모형의 설정이 어려우므로 확률모형에 의한 분석이 보다 효율적이다.

둘째, 상관차원 D(m)이 낮게 나타난 경우에는 리야푸노프 지수 및 콜모고로프 엔트로피의 근사치 K_2를 계산한다. 만약 가장 큰 리야푸노프 지수가 양(+)의 값을 갖거나 K_2 값이 유한한 양의 값에 수렴한다면 주식 수익률 생성과정이 chaos과정을 따른다고 결론 지울 수 있다.

2. 상관차원의 계산

상관차원은 Grassberger 및 Procaccia(1983)가 개발한 GP도표에서 ln $C_m(\varepsilon)$와 ln(ε)간의 기

12) 주식 수익률의 예측가능성을 다룬 많은 논문중 최근의 일부 논문은 장기적으로는 주식 수익률을 예측하는 것이 가능함을 지지하고 있다. 이와 관련된 논문으로는 Fama & French(1988), Poterba & Summers(1987) and Conrad & Kaul(1988) 등이 있다.

울기가 일정해질 때 그 기울기를 의미한다. 따라서 상관차원을 계산하기 위하여 Epsilon와 내재차원 m을 결정하여야 한다. 내재차원 m은 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 및 25값을 설정하였다. 내재차원을 25까지만 설정한 이유는 25차원 이상을 설정할 경우에는 자료의 크기가 줄어 들어 추정량의 편의가 일어날 가능성이 있으며 콜모고로프 엔트로피가 텐트 맵과 같은 chaos 맵에서 0으로 편의 하는 것이 시작되기 때문이다.

ε를 설정할 때의 문제점은 만약 ε값이 너무 크다면 너무 많은 시계열 자료를 포함하여 $C_m(\varepsilon) = 1$이 되어 주식 수익률 생성과정을 제대로 분석할 수 없으며, ε값이 너무 작다면 노이즈가 제한된 자료에 포함될 가능성이 크다는 것이다. ε의 최소값은 랜덤 노이즈를 고려하여 랜덤 노이즈가 표준편차의 15%미만이 되도록 설정하였다[13] 따라서 ε값은 0.5σ 이상의 값을 선정하였다. 또한 본 연구는 자기회귀 모형으로 선형성을 제거한 후의 잔차에 대하여 상관차원을 계산하였다. 그 이유는 연구의 목적이 주식 수익률의 비선형 동태적 특성을 분석하는 것으로 선형적 효과를 제거하기 위한 것이다.

주별 수익률 자료는 주별 및 일별 수익률을 나누어 분석하였으며 분석 과정은 먼저 GP 도표 등을 통하여 $\ln C_m(\varepsilon)$와 $\ln(\varepsilon)$간의 궤적을 검토하고 각 수익률에 대한 상관차원을 계산하였다. 또한 비교 모형으로서 랜덤한 특성을 갖는 수익률 자료는 Scheinkman 및 Lebaron(1989)의 Shuffling방법을 통하여 산출하였고 이렇게 산출된 랜덤한 자료와 원래 시계열 자료의 상관차원을 비교 분석하였다.

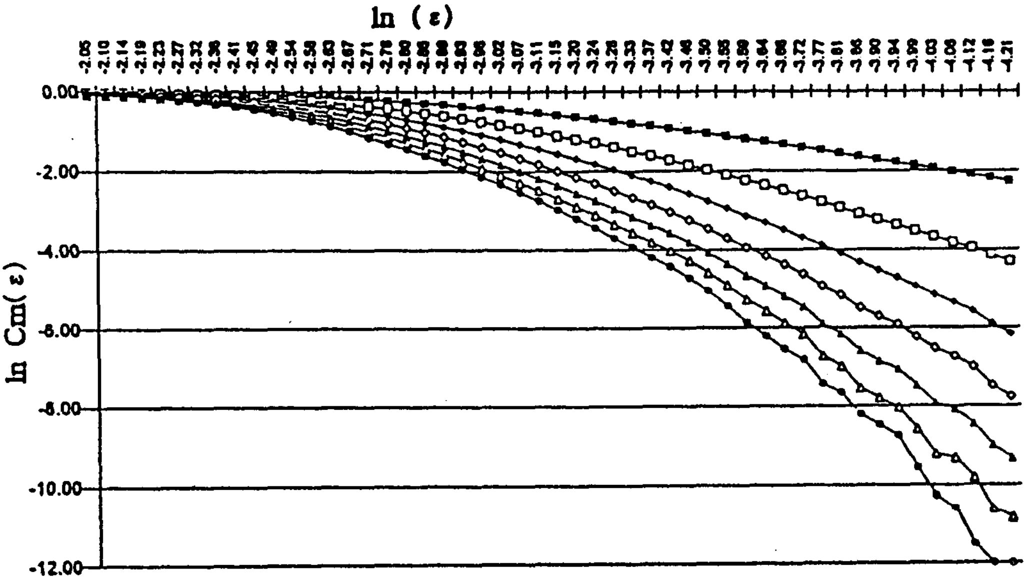
1) 주별 수익률 분석 결과

종합 주가지수의 주별 수익률을 대상으로 내재 차원을 변경시켜 가면서 0.5σ이상의 ε에 대응한 상관적분(correlation integral) $C_m(\varepsilon)$를 계산하고 이를 자연대수화한 둘 사이의 관계가 [그림 1]에 나타나 있다.

[그림 1]에서 가장 위에 나타난 자료 또는 선은 내재차원이 가장 낮은 $m = 2$인 경우이고 내재차원이 올라갈수록 순차적으로 아래에 표시되어 가장 낮은 선이 내재차원이 가장 높은 $m = 25$인 경우이다. 그 이유는 시계열 자료에서 내재차원이 높을수록 주어진 ε에 대하여 Sup-Norm으로 계산되는 근접해 있는 자료수가 적어지기 때문이다. 또한 기울기 변화가 내재차원이 낮을수록 내재차원이 높은 경우보다 완만하다. [그림 1]에서 보면 $\ln C_m(\varepsilon)$

13) Chaos적 모형을 연구할때 랜덤 노이즈에 의한 영향을 제거하는 것이 중요한 문제이다. 이에 대한 연구로 Ben-Mizarachi, Grassbeger 및 Procaccia(1984)의 연구가 있다. 만약 랜덤 노이즈가 (-a, a) 사이에 일양분포되어 있다고 가정한다면 랜덤 노이즈의 표준편차는$(\sqrt{3}/6)\varepsilon$이며 ε값은 a보다 큰값으로 설정되어야 한다. 예를들어 본연구가 설정한 값은 0.5σ이므로 랜덤 노이즈의 표준편차는 0.144σ로서 본 시계열 표준편차의 14% 정도를 랜덤 노이즈로 고려한 것이다.

[그림 1] ln Cm(ε)와 ln(ε) 관계



는 ln(ε)에 따라 내재차원에 상관없이 기울기가 완만해지면서 일정한 점에 수렴하고 있기 때문에, 랜덤인 경우에는 내재차원이 증가할수록 수렴하지 않고 계속 증가한다는 사실과 비교하면 주별 수익률에 chaos적 특성이 존재함을 알 수 있다.[14)]

본 연구에서는 상관차원이 안정성을 보이는 차원을 구하기 위하여 [그림 1]에서 선형 구간을 설정하고 [표 1]과 같이 각 내재차원 별로 대표적인 기울기를 회귀분석 방법에 의하여 구하였다.

〈표 1〉에서 보는 바와 같이 상관차원은 5와 6사이에 수렴을 하고 있다. 즉 내재차원을 14부터 25까지 증가시켜도 기울기 값은 거의 변하지 않는다. 이러한 결과는 다음에 제시

14) 상관차원은 다음 식과 같이 계산되는데 chaos 모형에서는 내재차원 m의 증가에 상관없이 안정적인 유한한 값에 수렴을 하나 랜덤한 자료에서는 m이 증가함에 따라 일정한 율로 계속 증가한다.

$$D_{(m)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \{lnCm(\varepsilon)/|ln\varepsilon|\} \qquad (6)$$

상관차원은 시계열 자료를 설명할 수 있는 요인의 수로 정의된다. 주식 수익률의 상태 백터를 1부터 ∞까지의 과거 수익률의 내재차원 m에 따라 결정되는 벡터로 정의한다. 이때 상관차원은 특정 요인에 따라 상태 벡터가 stretching하거나 folding하여 모든 상태 벡터를 일정한 거리 ε범위(궁극적으로 0)내에 위치시키는 요인의 수이다. 따라서 주식 수익률이 랜덤워크를 보인다면 일정한 패턴으로 영향을 미치는 요인의 수는 ∞가 될 것이며 상관차원은 ∞가 될 것이다.

〈표 1〉 주별 수익률의 상관 차원

내재 차원	상관 차원 기울기
2	1.10
4	2.04
6	2.82
8	3.52
10	4.10
12	4.58
14	5.05
25	5.18

하는 랜덤화된 자료로부터 계산된 상관차원과 비교하면 보다 그 차이가 명확해 질 것이다.

Sheinkman 및 Lebaron(1989)은 랜덤한 시계열 자료 구성을 위하여 shuffling방법을 제시하였다. Shuffling 방법은 반복추출을 가능하게 하면서 원시 시계열 자료로부터 같은 개수의 자료를 랜덤으로 추출하여 시계열 자료를 재구성하는 방법이다. 이때 만약 원래 시계열 자료가 chaos적 특성을 갖고 있다면 chaos에 관련된 특성이 파괴되어 재구성된 자료가 원시 자료보다 더 랜덤할 것이며, 만약 원시 시계열 자료가 chaos적 특성이 없이 랜덤하다면 chaos에 관련된 특성이 파괴되지 않아 재구성된 자료에서도 상관차원이 변하지 않을 것이다. 30번에 걸쳐 shuffling방법에 의하여 자료를 재구성하고 상관차원을 계산한 결과가 〈표 2〉에 나타나 있다.

〈표 2〉에서 보는 바와 같이 재구성된 자료의 상관차원은 원래 자료보다 크게 나타나고 있다. 또한 완벽하게 랜덤한 자료의 상관차원은 내재차원의 수와 같게 나타나므로 종합 주가지수 주별 수익률은 상관차원 5 와 6 사이의 chaos적 특성을 갖고 있다고 볼 수 있다.

지금까지 상관차원 계산시 이용한 자료는 선형 변환 과정을 거친 잔차를 이용한 분석이었다. 만약 주별 수익률이 결정론적 chaos과정을 거쳐 생성된다면 선형 변환을 거친 잔차 자료의 상관차원은 선형변환을 거치지 않은 원시 시계열 자료와 같은 상관차원을 가질 것이다. 이러한 점에 착안하여, 잔차를 이용한 상관차원과 원시 시계열 상관차원을 내재차원 14에서 비교한 결과가 〈표 3〉에 나타나 있다.

〈표 3〉에서와 같이 상관차원은 잔차 자료와 원시 자료간에 큰 차이가 없으므로 Brock (1986)등이 제시하는 잔차 검정 방법상 문제가 없다.

이상의 결과를 종합하면 종합 주가지수 수익률은 내재차원이 14 이상에서 안정적인 상

〈표 2〉 Shuffling 방법에 의한 상관 차원
(내재 차원 14의 경우)

구 분	상 관 차 원
원시 자료	5.05
재구성 자료	
최대	11.30
평균	9.19
최소	7.45

〈표 3〉 잔차 검정

구 분	상 관 차 원
원시 자료	6.44
선형 변환	
추세 제거	5.05
1차 미분	5.47

관차원을 보이고 있고 내재차원 25 까지 적은 변화율로 증가하고 있다. 또한 주식 수익률은 상관차원이 5에서 6사이인 chaos적 특성을 보이고 있어, 우리 나라 주식시장에 영향을 미치는 주요 변수는 약 6개의 변수이며 6개 변수에 의한 비선형 모형으로 주식 수익률 생성과정을 설명할 수 있다.

2) 일별 수익률 분석결과

일별 수익률 분석 역시 주별 수익률 분석과 같은 방법을 적용하였으며 상관차원이 안정적 경향을 보이는 내재차원 10이상에 대하여 〈표 4〉 및 〈표 5〉와 같은 결과를 얻었다.

일별 수익률 역시 Brock(1986)의 잔차 검정 및 shuffling방법에 의한 랜덤한 자료와 비교하여 유의적인 차이를 보이고 있으며 이는 일별 수익률에서도 주별 수익률과 같은 chaos적 비선형성을 보이고 있음을 의미한다.

주별 수익율과의 차이는 상관적분 $C_m(\varepsilon)$와 ε간의 수렴성 검정에서 주별 수익률보다 ε값이 큰 부분에서 수렴하고 있는데 이는 일별 수익률에 주별 수익률 보다 랜덤한 노이즈가 많기 때문이다. 일별 수익률은 랜덤한 노이즈의 포함으로 주별 수익률 보다 상관차원이 약간 크게 나타나고 있으나, 주별 수익률과 마찬가지로 5와 6 사이의 상관차원을 갖고 있는 것으로 나타나고 있다.

〈표 4〉 일별 수익률의 상관 차원

내재 차원	상관 차원 기울기
10	4.65
11	4.91
12	5.15
13	5.40
14	5.66
25	5.67

〈표 5〉 상관 차원의 잔차 및 Shuffling 검정

구　　분	상관 차원
원시 자료	6.98
추세 제거 자료	5.66
Shuffling 자료 (평 균)	10.32

3. 리아푸노프 지수 추정

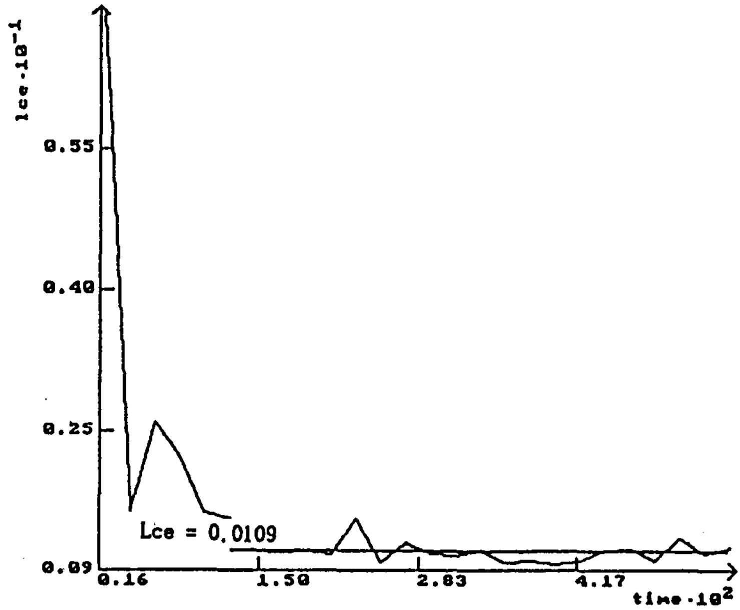
이론적으로 볼때 리아푸노프 지수는 어떠한 매개변수를 선택하여 추정하더라도 항상 일정한 값을 보이나, 현실적으로 주식 수익률 시계열 자료에는 chaos적 특성이외에 다른 여러가지 특성이 존재할 가능성이 있으므로 실제 자료에 의한 chaos 모형 검정 시에는 가장 큰 리아푸노프 지수(L_1)가 일정한 점에 수렴하는지를 평가하여야 한다. 본 연구에서는 Wolf(1985) 방법에 따라 가장 큰 리아푸노프 지수가 일정한 양(+)의 값에 수렴하는 지를 검정하였다.[15]

주별 수익률의 가장 큰 리아푸노프 지수(L_1) 추정 결과는 [그림 2]와 같다.

[그림 2]에서 보면 L_1은 일정한 양의 값 0.0109에 근사적으로 수렴하고 있으므로 우리 나라 주별 주식 수익률은 chaos적 특성을 갖고 있다. 주별 주식 수익률은 일주 당 약 0.0109 비트 비율로 주식 수익률 예측력을 상실 하고 있으며 1/0.0109 즉 92주 후에는 모든

15) 리아푸노프 지수 추정을 위한 매개변수 값은 내재차원은 상관차원 6보다 큰 값인 7부터 25까지 변화시키고, 근접성 평가를 위한 최대거리는 시계열 자료 범위의 10%, 최소거리는 최대거리의 10%, 전개 기간(evolution time)은 접힘(folding)이 포함하지 않고 펼침(streching)을 포함할 수 있는 충분한 기간인 20 이상을 선택하였다.

[그림 2] 주별 수익률 리아푸노프 지수(L_1)



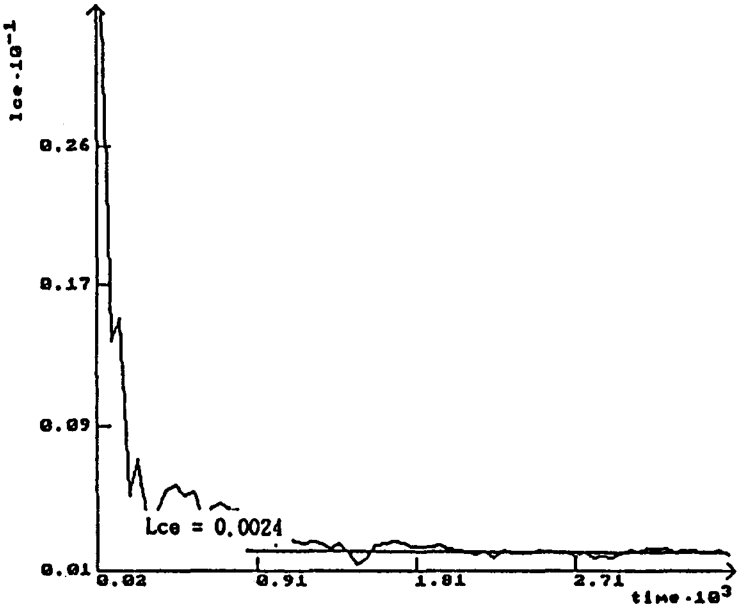
주식 수익률 예측 효과가 없어 진다.[16] 또한 주식 수익률의 평균 회귀(mean reverting)이론의 관점에서 해석하면 주식 수익률이 기본적 가치에 회귀하는데 약 92주 이상이 소요 된다.

일별 수익률의 가장 큰 리아푸노프 지수(L_1) 추정 결과는 [그림 3]과 같다.

[그림 3]에서 보면 L_1은 일정한 양의 값 0.0024에 근사적으로 수렴하고 있으므로 우리 나라 일별 주식 수익률 역시 주별 수익률과 마찬 가지로 chaos적 특성을 갖고 있다. 일별 주식 수익률은 일일당 약 0.0024 비트 비율로 주식 수익률 예측력을 상실 하고 있으며 417일 후에는 모든 주식 수익률 예측 효과가 없어 진다. 일별 수익률 자료에는 주별 수익률 보다 노이즈가 포함될 가능성이 많아 정보의 지속 효과가 더 짧게 나타나고 있다.

16) 리아푸노프 지수는 Shannon(1963) 등이 개발한 정보 이론에서 주로 사용되는 것으로 Shannon은 시스템의 불확실성을 bit(컴퓨터 공학에서 1 bit는 8 binary digits임) 단위로 측정된 엔트로피로 파악하고 있다. 만약 리아푸노프 지수가 0.05라면 매기간 0.05 bit씩 예측력을 상실하고 있으며 현재 정보에의한 효과를 1 bit 정확도로 예측하였다면 1/0.05 기간 후에는 정보효과가 없어짐을 의미한다.

[그림 3] 일별 수익률 리아푸노프 지수(L_1)



〈표 6〉 콜모고로프 엔트로피 추정

구 분	콜모고로프 엔트로피
주별 수익률	0.25 ± 0.05
일별 수익률	0.24 ± 0.03
Shuffling	
주별 수익률	1.53 ± 0.41
일별 수익률	1.49 ± 0.37

4. 콜모고로프 엔트로피 추정

콜모고로프 엔트로피의 근사치 K_2를 Grassberger 및 Procaccia(1984)가 제시한 다음 식을 이용하여 계산하였다.

$$K_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{m \to \infty} \lim_{N \to \infty} \ln \left(\frac{C_{m(\varepsilon)}}{C_{m+1(\varepsilon)}} \right) \tag{7}$$

콜모고로프 엔트로피는 초기에 구분 불가능했던 두점이 정보가 축적됨에 따라 특정수준을 초과하여 구분가능하게 되는 속도를 의미한다. 즉 K_2값이 낮을 수록 분석 대상이 되는 시계열 시스템이 좀 더 예측가능한 시스템임을 의미한다. 따라서 만약 시계열 자료가 완전한 랜덤이라면 $K_2 = \infty$일 것이고 만약 완벽하게 평할된 시계열 자료에서는 $K_2 = 0$일 것이며 chaos적 특성을 갖고 있다면 $0 < K_2 < \infty$일 것이다.

종합 주가지수 수익률의 콜모고로프 엔트로피를 구하고, Shuffling자료와 대비한 결과가 〈표 6〉에 제시되어 있다.

콜모고로프 엔트로피는 주별 수익률 및 일별 수익률의 모두다 0.2~0.3 사이의 유한한 값을 나타내고 있다. 콜모고로프 엔트로피가 유한한 값을 가지고 있기 때문에 주별 및 일별 수익률 생성과정은 chaos 과정이라고 추정할 수 있다. 또한 양 수익률이 유사한 값을 보이고 있어 두 시계열 자료는 유사한 chaos적 특성을 갖고 있음을 알 수 있다. shuffling자료와 비교를 하면 shuffling후 시계열 자료는 안정적인 콜모고로프 엔트로피 치를 보여주고 있지 않으며 작은 ε값 및 내재차원 변화에 대해 극히 민감한 특성을 보이고 있다.

IV. 요약 및 결론

1970년대부터 시작되어 1980년대 중반까지 상당한 발전이 이루어진 비선형 시스템 이론 또는 비선형 동태 이론은 1980년대 중반부터 경제학 및 자본시장 이론 분야에 도입되기 시작하였다. 특히 chaos적 비선형 시스템 이론에 대한 관심이 점차 고조되어 왔으며, 비선형 모형의 대표 모형인 chaos 모형은 그것의 여러 특성 때문에 자본시장 연구 분야에 그 응용이 점차 확대되고 있다.

우리 나라에서도 주식 수익률 생성과정의 비선형 구조에 대한 연구가 활발히 진행되어 왔다. 그러나 우리 나라에서의 연구는 주로 주식 수익률 분포의 정규 분포성 검정 및 안정성 검정, ARCH 유형의 분산성 연구, 비선형 측면에서 해석이 가능한 주식시장의 과잉반응 연구 등에 초점이 맞춰져 비선형성을 나타내는 대표적 모형의 적용에는 많은 한계를 지녀왔다. 본 연구는 비선형적 제반 특성을 종합적으로 반영하는 chaos모형을 우리 나라의 종합 주가지수 수익률의 시계열 자료에 적용하여 주식 수익률의 비선형적 행태를 실증적으로 분석하였다.

실증분석의 결과, 종합 주가지수 수익률은 내재차원이 14이고, 상관차원이 5에서 6사이인 chaos적 특성을 갖고 있다는 것을 알 수 있었다. 또한 상관차원이 5에서 6사이라는 것은 우리 나라 주식시장에 영향을 미치는 주요 변수가 약 6개라는 것을 의미한다. 특히 리

야푸노프 지수에 의한 분석 결과는 주별 및 일별 수익률에서 이들 값이 공히 양의 값에 수렴하고 있어 우리 나라 주식 수익률은 이상한 끌개(strange attractor)를 갖는 chaos적 행태를 보인다고 결론 지울 수 있다. 콜모고로프 엔트로피에 의한 분석 결과는 주별 수익률 및 일별 수익률의 경우에 모두 0.25 ± 0.05의 유한한 값으로 나타나고 있으며, 또한 이들 일별 및 주별 양 수익률이 유사한 값을 보이고 있어 서로 유사한 chaos적 특성을 갖고 있다는 것을 알게 되었다.

이상의 분석 결과를 종합하면, 우리 나라 주식 수익률의 시계열적 형성과정은 chaos 과정을 따른다고 말할 수 있다. 주식 수익률이 비선형적 결정 모형인 chaos 과정을 따른다는 것은 기존의 약형 효율적 시장 가설이나 선형 모형에 기초한 CAPM 등의 자산가격결정모형을 무작정으로 사용하여 연구의 결론을 유도하고자 하는 작업이 원천적으로 오류를 지닐 수 있음을 시사한다. 그렇다면 향후에는 자본시장과 관련된 제 가설이나 이론을 검정함에 있어 비선형적 종속성 검정 방법에 근거한 효율적 시장 가설 검정과 비선형 자산가격결정모형에 대한 연구가 더욱 활발히 진행되어야할 것이다.

부록. Chaos 모형 검정 기법

1. 상관 차원(correlation dimension)

두개의 점 X^i_m 및 X^i_m 중 하나에 중심을 두고 직경이 ε인 원을 그렸을 때 다른 점을 포함하게 되면 두 개의 점은 공간적으로 상관되어 있다고 볼 수 있다.[17] 따라서 끌개 내의 모든 점의 비선형 위상 공간에서의 상관성은 식(1)과 같이 정의할 수 있다.

$$C(\varepsilon, m) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^2} \sum_{i,j=1}^{T} H(\varepsilon - \|Xm^i - Xm^j\|) \tag{1}$$

단, $\| \ \|$ = 유클리디안 놈.

T = m-history로 구성된 X^t_m의 시계열 수

H = 아래와 같은 Heaviside 함수

$$H(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \text{ 일때} \\ 0, & y \leq 0 \text{ 일때} \end{cases}$$

C(ε, m)을 상관 적분이라 하며 상관 차원은 다음과 같이 정의된다.

$$D(m) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{lnC(\varepsilon, m)}{ln\varepsilon} \tag{2}$$

상관 적분 C(ε, m)은 m-history 벡터의 m에 의해 좌우되며 m의 변화에 따른 상관 차원의 변화는 위 식에 따라 식(3)과 같이 정의된다.

$$ln\, C(\varepsilon, m) = D(m) \cdot ln\varepsilon \tag{3}$$

2. 리야푸노프 지수

리야푸노프 지수를 설명하기 위하여 [그림 1]의 원내에 초기 점들의 집합을 고려한다.

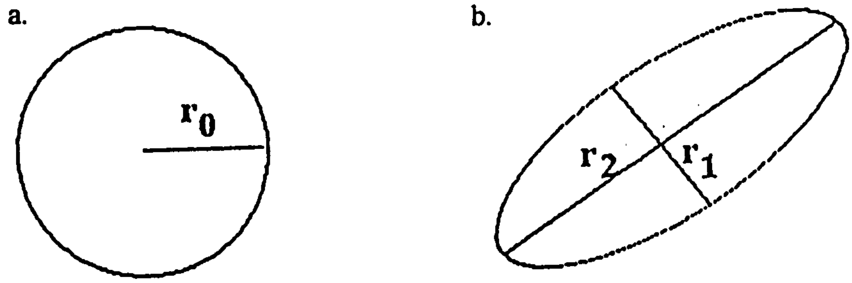
17) X^i_m, 및 X^i_m는 시계열 $\{X^t_m\}^T_{t=1}$ 중의 2개의 점이며 X^i_m는 다음과 같이 m-history를 갖는 m차원 벡타이다.

$X^T_m = (X_T, X_{T-1}, \cdots, X_{T-m+1})$

$X^{T-1}_m = (X_{t-1}, X_{T-2}, \cdots, X_{t-m})$

$X^m_m = (X_m, X_{m-1}, \cdots, X_o)$

〈그림 1〉 초기 점들의 집합



이때 $r_1 = u_1 \cdot r_0$로 표시할 수 있으며 $r_2 = u_2 \cdot r_0$ 혹은 식(4)와 같이 표시할 수 있다.

$$\mu_i = \frac{r_i}{r_o};\ 단\ i = 1, 2 \tag{4}$$

접힘과 펼침을 N번 반복한 후에는 $r_i = \mu_i^N r_o$ 또는 식(5)와 같은 대수함수 형태로 표시할 수 있다.

$$l_n\mu_i = \frac{1}{N}\ ln\frac{r_i}{r_o} \tag{5}$$

$$l_n\mu_i = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ ln\frac{r_i}{r_o} \tag{6}$$

식(6)과 같이 $N\to\infty$에 대해 극한값이 존재할 때 μ_i를 리야푸노프 수라 하고 대수함수 형태인 $\lambda_i = \ln\mu_i$를 리야푸노프 지수라 한다. 위상 공간의 특성에 따라 수많은 리야푸노프 지수가 존재하며 λ_i ; $i = 1, \cdots, n$을 리야푸노프 스펙트럼이라 한다.

식(6)에서 보면 리야푸노프 지수를 구하기 위하여 r_i / r_0를 구해야 한다. 이를 위하여 식(7)과 같이 n 차원에 mapping을 한 이산형 시계열 자료를 고려한다.

$$X_{t+1} = f(X_t),\ X \in R^n \tag{7}$$

두 개의 근접한 초기점 X_0 및 X_0'에 대해 1차 반복 후 두 점 X_1과 X_1'의 차이는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$X_1 - X_1' = f^{(1)}(X_o) - f^{(1)}(X_1') \tag{8}$$

$$\approx = \frac{df^{(1)}(X_0)}{dx}\ \delta X_0 \quad \text{(선형적 근사치)}$$

$$\text{단, } \frac{df^{(1)}X_0}{dx} = Jacobian \text{ 매트릭스 } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial X_n} \end{pmatrix} \tag{9}$$

또한 N번 반복후 두 점의 차이는 다음과 같이 표시된다.

$$X_N - X'_N = f^{(N)}(X_0) - f^{(N)}(X'_0) \tag{10}$$

$$\approx = \frac{df^{(n)}(X_0)}{dx}\quad \delta X_0$$

$J^{(N)}$은 $n \times n$ 메트릭스이므로 n eigen 값이 존재하고 eigen 값을 $\wedge_i^N$ 으로 하고 $\wedge_i^N \geq \wedge_2^N \geq \cdots \wedge_n^N$ 이 되도록 재정리하면 리야푸노프 지수는 식(11)과 같이 정의된다.

$$\lambda_i = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N}\ ln\,(\wedge_i^T) \tag{11}$$

연속형 시계열 자료에 대해서도 유사한 방법으로 식(12)와 같이 리야푸노프 지수를 유도할 수 있다.

$$\lambda_i = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\ ln\,(\wedge_i^T) \tag{12}$$

$$\text{단, } T \in R$$

3. 콜모고로프 엔트로피(kolmogorov entropy)

콜모고로프 엔트로피는 다음과 같이 순서로 계산한다.

첫째, 위상 공간을 길이가 ε인 미세한 입방체로 분할하여 C_i ; $i=1, \cdots n$ 즉 n개의 입방체를 형성한다.

둘째, 최초의 측정치 $X_{(t1)}$과 다음 측정치 $X_{(t2)}$의 간격을 τ라는 일정한 간격으로 구분한다. 즉 $(t_1+\tau), (t_1+2\tau), \cdots (t_2)$

세째, 최초의 측정치 $X_{(t1)}$이 $(t_1+\tau)$기간에 C_1에 있고 $(t_1+2\tau)$에 C_2에 있고 (t_2)에 C_n에 있을 결합 확률을 $\varphi C_1, \cdots, C_n$으로 표시한다.

넷째, 이때 콜모고로프 엔트로피는 식(13)과 같이 정의된다.

$$K = -\lim_{e\to\infty}\lim_{T_2\to\infty}\lim_{\tau\to o}\frac{1}{t_2\tau}\sum_{C}\varphi_{C_1,\cdots,C_n}\ln\varphi_{C_1,\cdots,C_n} \tag{13}$$

식(13)의 해는 확률($\varphi C_1,\cdots,C_n$)을 모르면 구할 수 없으므로, Grassberger 및 Procaccia는 상관 적분의 엔트로피를 이용하여 다음과 같은 엔트로피 K의 근사치를 제시하였다.

$$K_2 = \lim_{m\to\infty}\lim_{e\to\infty}\frac{1}{\tau}\ln\frac{C^m(\varepsilon)}{C^{m+1}(\varepsilon)} \tag{14}$$

단; $C^m(\varepsilon)$는 내재 차원이 m인 시계열의 상관 적분

이때 항상 $K_2 \le K$이다.

참 고 문 헌

김대훈 · 이상빈, "한국 주식 수익률의 분포에 관한 실증적 연구", 재무연구, 제2호, 1989, 12.

김영규 · 배재봉, "한국 주식수익률의 시계열적 종속성에 관한 연구", 재무연구, 제2호, 1994.

배재봉, "한국 주식수익률의 비선형 동태적 특성에 관한 연구", 성균관 대학교, 박사 학위 논문, 1993.

성삼경 · 안진철, "한국 주식가격 변동의 안정 파레시안 분포 가설의 검정", 경영학 연구, 제15권, 제2호, 1986, 2.

조 담, "주식 수익률의 조건적 이분산성에 관한 실증연구", 재무연구, 제1호, 1994.

Asheley, R., Patterson, D., and Hinich, M., "A Diagnostic Test for Nonlinearity and Serial Dependence in Time Series Fitting Errors," *Journal of Time Series Analysis* 7 (1986), 165～178.

Ben-Mizrachi, A., Procaccia, I., and Grassberger, P., "Characterization of Experimental (Noisy) Strange Attractors," *Physical Review* 29 (1984), 975～977.

Boldrin, M., and Woodford, M., "Equilibrium Models Displaying Endogeneous Fluctuations and Chaos," *Journal of Monetary Economics* 25 (1990), 189～222.

Brock, W. A., "Distinguishing Random and Deterministic Systems," *Journal of Economic Theory* 40 (1986), 168～195.

________., Hsieh, D. A. and LeBaron, B., *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence,* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1991.

Conrad, J., and Kaul, G., "Time Variation in Expected Returns," *Journal of Business* 61 (1988), 409～425.

Fama, E., and French, K., "Permanent and Temporary Components of Stock Prices," *Journal of Political Economy* 96 (1988), 246～273.

Frank, M., and Stengos., "Measuring the Stranges of Gold and Silver Rates of Return," *Review of Economic Studies* 56 (1989), 553～568.

Grassberger, P., and Procaccia, I., "Measuring the Strangeness of Strange Attractors," *Physica 9D* (1983), 189～208.

Hinich, M. J., and Patterson, D. M., "Evidence of Nonlinearity in Daily Stock Returns," *Journal of Business and Economic Statistics* 3 (Jan. 1985), 69~77.

________________, "Evidence of Nonlinearity in the Trade by Trade Stock Market Return Generating Process," Barnett, V., A., Geweke, J., and Shell, K., eds *Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*, 1988, 383~409.

Hsieh, D., "Chaos and Nonlinear Dyanamics: Application to Financial Markets," *Journal of Finance* XLVI, No 5 (Dec. 1991), 1839~1877.

Lorenz, H. W., *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer-Verlag, 1989.

Lucas, R. E., "Asset Prices in an Exchange Economy," *Econometrica* 46 (1978), 1429~1445.

Peters, E., *Chaos and Order in the Capital Markets*, John Wiley & Sons Inc, 1991.

Poterba and Summers, L., "Mean Reversion in Stock Prices: Evidence and Implications," *Journal of Financial Economics* 22 (1987), 27~59.

Scheinkman, J., and LeBaron, B., "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," *Journal of Business* 62 (1989), 311~337.

________ **and Weiss, L.**, "Borrowing Constraints and Aggregate Economic Activity," *Econometrica* 54 (Jan. 1986), 23~45.

Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., and Vastano, J. A., "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series," *Physica 16D* (July 1985), 285~317.