

軸系振動理論과 適用

釜山水産大學校
工科大学 機關工學科
教授 文德弘

1. 머리말

동력기관의 축과 추진기축으로 구성되는 선박용추진축계에 나타나는 진동은 비틀림진동, 종진동, 횡진동 등이 있으며, 이들의 연성진동 또한 문제가 되고 있다.

이 중 축계비틀림진동문제는 거의 1세기에 걸쳐 많은 연구자들에 의해 수많은 연구 결과들이 보고되었고, 그 결과 축계의 기본 설계단계에서부터 비틀림진동문제를 고려하고 피로파괴의 위험성을 예측할 수 있게 되었다. 또한 비틀림진동으로 인한 위험속도가 사용회전수의 범위를 벗어나게할 수 없을 경우 안전운전을 위한 여러가지 적절한 대책이 강구되어 왔다. 그러나, 현재 선박용 주기관으로 가장 많이 채용되고 있는 디젤기관에 있어, 에너지변환을 위한 구조상, 비틀림진동의 발생을 피할 수가 없고, 추진축계 각부에서의 에너지 손실 즉, 감쇠량을 정확히 파악하는 것이 곤란한 경우가 많으므로, 아직 까지도 이에 관한 연구가 진행되고 있다.

비틀림진동은 축계자체의 재질 및 형상 등에 의해 정해지는 고유진동수와 실린더 내의 가스폭발압력에 의한 주기적토크로 유발되는 강제진동으로 대별할 수 있고, 이들이 서로 동조할 경우, 진동의 진폭이 급격히 증가해

서 위험한 상태에 이르게 된다.

그 외 종진동, 횡진동 등도 동시에 발생하나 다음 기회에 소개하기로 하고, 본고에서는 디젤기관과 추진기를 연결하는 추진축계의 비틀림진동의 계산과 실측에 관해 기술하고자 한다.

2. 비틀림고유진동수 및 고유모드의 계산

축계의 비틀림고유진동수의 계산에는 Hozer의 축차근사법, 전달매트릭스법, 유한요소법 등 여러가지 방법이 있으나, 여기서는 전달매트릭스법을 이용하기로 한다.

해석대상의 추진축계는 피스톤, 연접봉, 크랭크기구, 플라이 휠을 비롯하여 추력축, 중간축, 프로펠러축, 프로펠러 등으로 구성되는 복잡한 구조로 되어 있어 실제 축계 그대로 진동계산을 행하기는 곤란하다. 따라서, 실축계를 원래의 축과 동일한 비틀림강성을 갖는 등가장(等價長)과 집중질량으로 구성된 등가탄성계(等價彈性系)로 모델화해서 계산을 행하는 것이 보통이다.

추진축계를 등가장과 집중질량으로 이루어진 등가탄성계를 모델화하고, 전달매트릭스법을 적용해서 고유진동수 및 고유모드를 구한다.

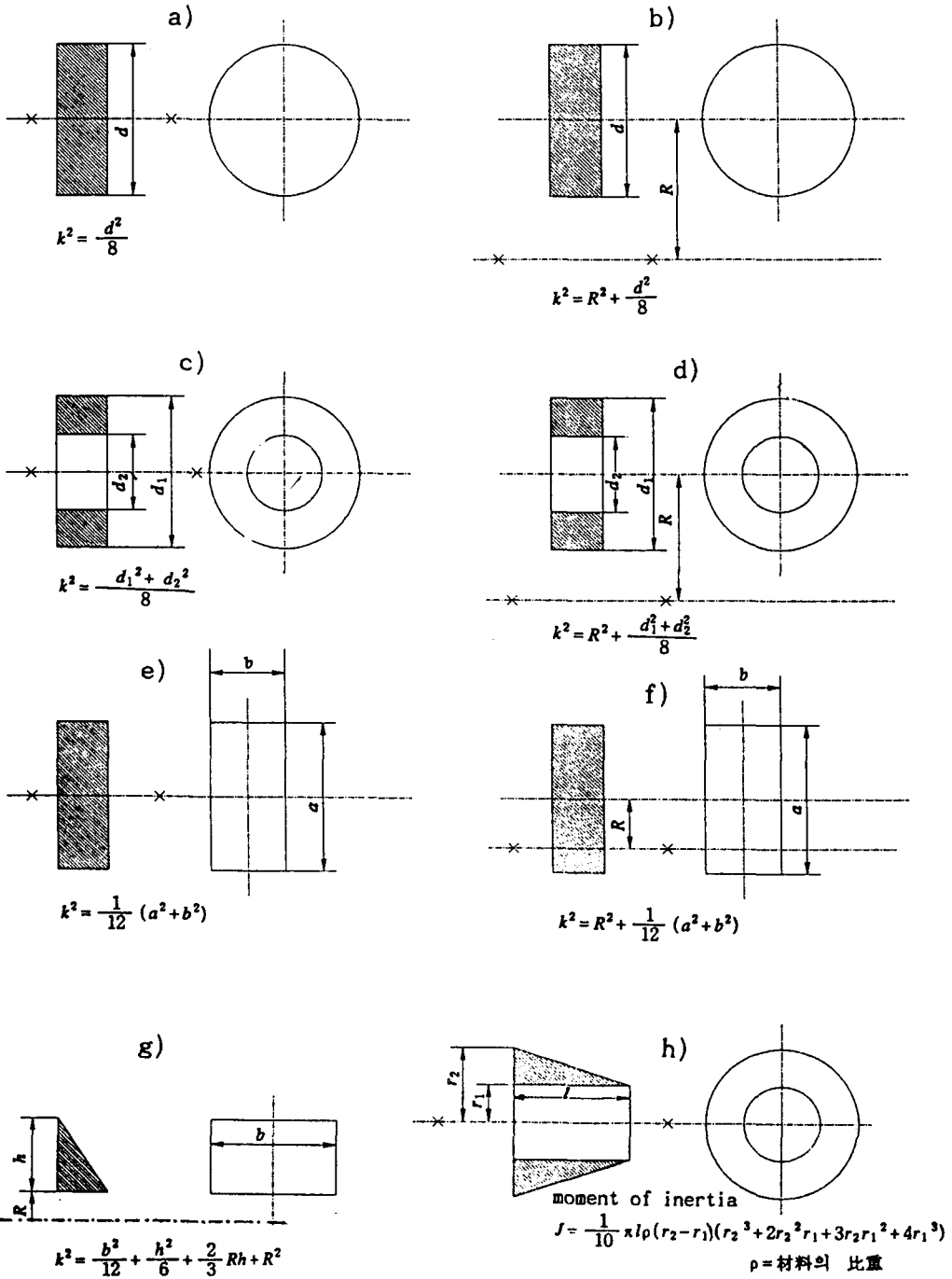


그림 1 간단한 形狀을 한 物體의 回轉半徑

2-1. 축계의 등가질량

피스톤, 연접봉, 크랭크축의 중량물은 각 실린더의 중심선 상, 축계의 다른 중량물은 부착된 위치의 중앙점에, 그리고 축 중심선에서 $r=1\text{cm}$ 인 위치에 질량이 집중한 것으로 환산하고 이 값이 축중심선에 관한 관성모멘트 J 와 같도록 한다.

축둘레의 회전반경을 k , 회전반경이 k 인 질량을 M , 반경 $r=1\text{cm}$ 일 때 환산질량 즉 상당질량을 m 이라 하면,

$$J = Mk^2 \quad [1]$$

$r = 1 \text{ cm}$ 일때

$$J = Mk^2 = mr^2 = m \quad [2]$$

따라서, 회전반경 k 와 질량 M 을 알면, 관성모멘트 J 가 계산되고 상당질량 m 이 구해진다.

가) 간단한 형상을 갖는 단면의 회전반경

그림 1은 여러가지 축이나 중량물 중 비교적 간단한 형상의 단면에 대한 회전반경을 나타내고 있다. 질량 M 만 계산하면 식(2)에 의해 상당질량 m 을 알 수 있다.

나) 플라이 휠(fly wheel)의 상당질량

그림 2는 플라이 휠을 나타낸 것으로 그림에서 각 부분의 관성모멘트를 I_1, I_2, I_3, I_4 라 하고 중공원판으로 간주해서 계산하면,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2) b_1 \frac{\rho}{g} \times \frac{(d_1^2 + d_2^2)}{8} = \frac{\pi b_1 \rho}{32g} (d_1^4 - d_2^4) \\ I_2 &= \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_3^2) b_2 \frac{\rho}{g} \times \frac{(d_2^2 + d_3^2)}{8} = \frac{\pi b_2 \rho}{32g} (d_2^4 - d_3^4) \\ I_3 &= \frac{\pi}{4}(d_3^2 - d_4^2) b_3 \frac{\rho}{g} \times \frac{(d_3^2 + d_4^2)}{8} = \frac{\pi b_3 \rho}{32g} (d_3^4 - d_4^4) \\ I_4 &= \frac{\pi}{4}(d_4^2 - d_5^2) b_4 \frac{\rho}{g} \times \frac{(d_4^2 + d_5^2)}{8} = \frac{\pi b_4 \rho}{32g} (d_4^4 - d_5^4) \end{aligned} \quad [3]$$

이므로, 플라이 휠 전체의 상당질량 m_r 는

$$m_r = J_r = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

이다. 여기서 ρ 비중량으로 주철인 경우 0.0072kg/cm^3 , 철강인 경우 0.0078kg/cm^3 이다.

중량모멘트 $GD^2(\text{kg} \cdot \text{cm}^2)$ 으로 주어지는 경우, 다음 식으로 관성모멘트를 계산할 수 있다. 단, 여기서 G 는 플라이 휠의 중량, $D=2k$ =회전직경이다.

$$m_r = J_r = Mk^2 = \frac{G}{g} \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{GD^2}{4g} \quad [4]$$

다) 프로펠러의 상당질량

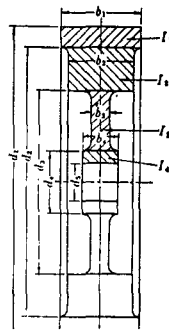


그림 2 플라이 휠

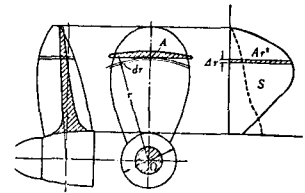


그림 3 프로펠러

① 프로펠러의 상당질량

그림 3에 있어서 축심 O 를 중심으로 하는 임의 반경 r 인 위치에서 단면적을 Acr^2 으로 하고 미소부분 Δr 의 관성모멘트 ΔIb 를 구한다.

$$\Delta Ib = \frac{A \Delta r \rho}{g} r^2 \quad [5]$$

식 [5]를 프로펠러 뿌리에서 프로펠러 끝까지 적분하면 프로펠러 1개의 관성모멘트 Ib 를 구할 수 있다.

$$Ib = \frac{\rho}{g} \int_{r_{\text{Root}}}^{r-R} Ar^2 dr = \frac{\rho}{g} \sum_{r_{\text{Root}}}^R Ar^2 \Delta r = \frac{\rho}{g} \times S$$

여기서 S 는 각 단면적에 각각의 r^2 을 곱한 값을 반경에 대해 그린 곡선과 좌표축을 포

합하는 면적이다. 반경방향으로 분할 수를 증가할 수록 정도가 좋다.

여기서 날개 수를 n 이라 하면, 날개의 상당질량 m_b

$$m_b = J_b = n I_b \quad [6]$$

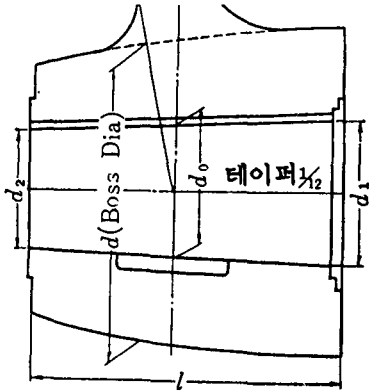


그림 4 프로펠러 보스

② 보수부의 상당질량

그림4에서 보스직경 d 는 평균직경에 가까우므로 테이퍼부의 평균직경 $d_0 = (d_1 + d_2) / 2$ 를 사용해서

$$m_b' = J_b' = \frac{\pi \rho l}{4g} (d^2 - d_0^2) \times \frac{(d^2 - d_0^2)}{4g} = \frac{\pi \rho l}{32g} (d^4 - d_0^4) \quad [7]$$

로 계산하고, 만약 축의 중량도 함께 고려하면,

$$m_b' = J_b' = \frac{\pi \rho l d^4}{32g} \quad [7]'$$

여기서 ρ 는 표 1과 같다.

표1 프로펠러 재료의 비중량 (kg/cm³)

망간 청동	0.0083
고력황동주물	0.008405
니켈, 일미늄황동	0.00765
알미늄황동	0.0075
주 철	0.0072

③ 물의 부가질량

프로펠러는 물속에서 회전하므로 부가수

(附加水)의 영향으로 관성모멘트가 증가한다. 이 양은 프로펠러와 선체의 구조에 의해 변하므로 이론적으로 정할 수는 없고, 대략 공기 중에서의 관성모멘트에 약 25% 정도 관성모멘트를 증가시켜 물속에서의 관성모멘트로 간주하는 것이 보통이다.

라) 축질량의 고려

진동계산에서 축자신의 질량은 관성모멘트에 미치는 영향이 작으므로 무시하고 있으나 축경이 크고 무거우면 당연히 고려하여야 한다.

지금 1단을 고정된 큰 축의 끝에 J_1 의 질량이 붙어 있는 그림 5와 같은 축계에서 축질량에 의한 관성모멘트를 무시하였을 때와 이것을 고려하였을 때의 값을 비교하면 다음 표 2와 같이 된다.

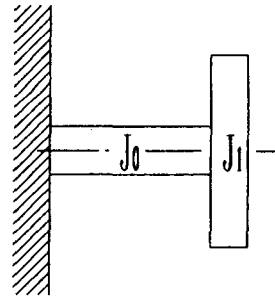


그림 5 1단을 고정된 축의 비틀림진동

표2 축의 관성모멘트의 영향

J_0/J_1	f_2/f_1	오차% (+)	v (수정계수)
0.025	0.992	0.3	0.158
0.050	0.993	0.7	0.222
0.100	0.983	1.7	0.311
0.125	0.979	2.1	0.346
0.250	0.960	4.0	0.480
0.500	0.923	8.0	0.653
0.750	0.891	11.0	0.771
1.000	0.861	14.0	0.861

표2에서 k_1 를 축의 비틀림스프링상수라 하면

f_1 = (축의 질량을 무시하였을 때의

$$\text{진동수}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{J_1}} \text{ cps}$$

f_2 = (전관성모멘트를 포함하였을

$$\text{때의 옳은 진동수}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{J_0}} \text{ cps}$$

위의 표에서 알 수 있는 바와 같이 축자신의 무게에 의한 관성모멘트가 축에 부가되어 있는 질량의 관성모멘트의 20분의 1이하이면 고유진동수의 변화는 1% 이하이다. 일반적으로 이 범위내로 되는 경우가 많으므로 대개의 경우 축질량은 무시하나 좀더 계산정도를 높이기 위해서는 축의 관성모멘트의 1/3을 가산하여 주면된다. 이 관계는 절이 축 고정단에 있을 때만 성립하므로 그림 6과 같은 2절점계에서는 먼저 축질량을 무시하였을 때의 절의 위치를 구하고

$$l_1 = l \times \frac{J_2}{J_1+J_2}, \quad l_2 = l \times \frac{J_1}{J_1+J_2}$$

이 l_1 과 l_2 의 길이를 갖는 축의 관성모멘트의 1/3을 각각 가산한 값을 J_1 과 J_2 라 하면

$$J_1' = J_1 + \frac{J_0}{3} \left(\frac{J_2}{J_1+J_2} \right), \quad J_2' = J_2 + \frac{J_0}{3} \left(\frac{J_1}{J_1+J_2} \right)$$

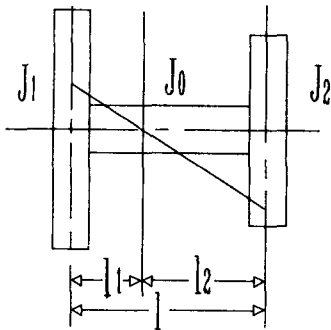


그림 6 2절점계의 비틀림 진동

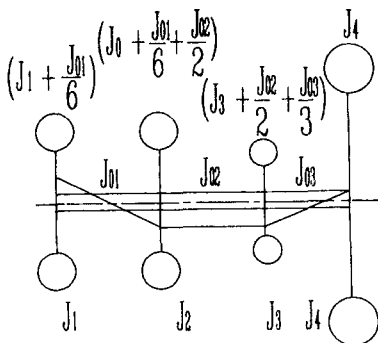


그림 7 다절점계의 비틀림 진동

또한 다절점계에 있어서의 일례를 그림 7에 보인다. 이 경우에 처음 절은 J_1 과 J_2 의 중앙에 있고 두째번의 절은 J_4 의 근처에 있는 경우이다. J_2 와 J_3 는 절의 단위로부터 멀고 같은 위상을 진동하고 있으므로 $J_{02}/2$ 를 가산한다.

축경 200mmφ이상의 대형선박의 중간축, 프로펠러축의 관성모멘트는 1절진동에는 영향을 미치지 않으나 2절진동에는 수%정도 영향을 미치므로 1/2정도를 플라이 휠과 프로펠러에 가산하는 경우가 많다.

마) 피스톤, 연접봉 및 크랭크축의 상당질량

그림 8에 있어 A_0 로 부터 측정 한 피스톤 변위를 S , 크랭크반경과 각도를 r 과 θ , 연접봉의 길이를 l , $\lambda = r/l$ ($\approx \frac{1}{3} \sim \frac{1}{5}$) 피스톤의 속도와 가속도를 v 와 a , 크랭크회전각속도를 ω 라 하고 ω 가 일정하다고 하면

$$S \approx r \{ (1 - \cos\theta) + (\lambda/4)(1 - \cos 2\theta) \} \quad [8]$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \approx \omega r \{ \sin\theta + (\lambda/2)\sin 2\theta \} \\ = \frac{2\pi n r}{60} \{ \sin\theta + (\lambda/2)\sin 2\theta \} \quad (n = \text{rpm}) \quad [9]$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{dv}{d\theta} \approx \omega^2 r \{ \cos\theta + \lambda \cos 2\theta \} \quad [10]$$

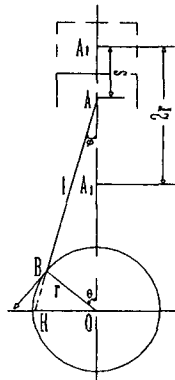


그림 8 피스톤 크랭크

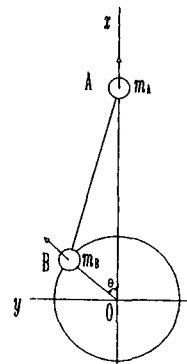


그림 9 단실린더기관의 관성력

지금 m_p 를 피스톤부의 질량이라 하면 여기에 작용하는 관성력 F_p 는 식[10]에 의하여

$$F_p = -m_p \omega^2 r (\cos\theta + \lambda \cos 2\theta) \quad [11]$$

상식은 그림 8의 식 s좌표를 기본으로 하여 구한 것이며, 행정선상 0로 향하는 관성력을 +로 한다. 지금 그림 9와 같이 x, y 좌표를 취하고 ox 방향으로 향하는 힘을 +로 한다. 이와 같이 하여 표현한 관성력을 X_p 라하면

$$X_p = m_p \omega^2 r (\cos\theta + \lambda \cos 2\theta) \quad [12]$$

연접봉은 소단 A, 대단 B에 m_1, m_2 의 집중질량이 작용하는 상당력학계로 바꾸어 놓을 수 있고, m_1 에 의한 관성력은

$$X_{r1} = m_1 \omega^2 r (\cos\theta + \lambda \cos 2\theta) \quad [13]$$

m_2 에 의한 관성력, 즉 원심력은 x, y 방향의 성분을 생각하여

$$X_{r2} = m_2 \omega^2 r \cos\theta, \quad Y_{r2} = m_2 \omega^2 r \sin\theta \quad [14]$$

다음에 크랭크편의 질량을 m_{cp} 라 하면, 이것에 의한 원심력은

$$F_{cp} = m_{cp} \omega^2 r$$

크랭크암의 질량을 m_{ca} , 크랭크축 중심선부터 암중심까지의 거리를 r_{ca} 라 하면, 크랭크암의 원심력은

$$F_{ca} = 2m_{ca} \omega^2 r_{ca}$$

따라서, 그림 10의 크랭크전체에 작용하는 원심력은

$$F_c = F_{cp} + F_{ca} = \omega^2 (m_{cp}r + 2m_{ca}r_{ca}) \quad [15]$$

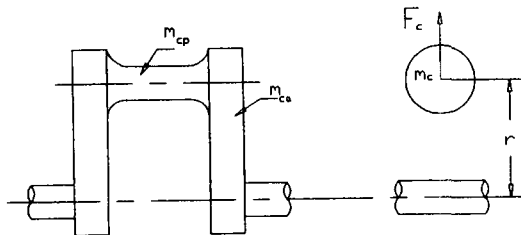


그림 10 크랭크의 등가질량

지금

$$m_{cr} = m_{cp}r + 2m_{ca}r_{ca} \quad [16]$$

라 놓으면

$$F_c = m_c \omega^2 r \quad [17]$$

로 되고, 이 x, y 방향성분은

$$X_c = m_c \omega^2 r \cos\theta, \quad Y_c = m_c \omega^2 r \sin\theta \quad [18]$$

식[16]의 m_c 를 크랭크의 상당질량이라 한다.

이상을 종합하면 왕복질량에 의한 관성력은

$$\left. \begin{aligned} X_A &= X_p + X_{r1} = m_A \omega^2 r (\cos\theta + \lambda \cos 2\theta) \\ m_A &= m_p + m_1 \end{aligned} \right\} \quad [19]$$

그림 8의 s좌표를 이용하는 경우에는 관성력은 부호를 바꾸어서

$$F_A = -m_A \omega^2 r (\cos\theta + \lambda \cos 2\theta) \quad [20]$$

또한 회전질량에 의한 관성력은

$$\left. \begin{aligned} X_B &= X_c + X_{r2} = m_B \omega^2 r \cos\theta \\ Y_B &= Y_c + Y_{r2} = m_B \omega^2 r \sin\theta \\ m_B &= m_c + m_2 \end{aligned} \right\} \quad [21]$$

이상과 같이, 왕복기관의 운동부질량은 왕복질량 m_A 와 회전질량 m_B 의 2부분으로 나눌 수 있다. 지금 m_A 의 등가질량 m_A' 를 생각하고, 이 m_A' 는 크랭크편의 위치에 있는 것이라 하면, m_A 의 운동에너지와 m_A' 의 운동에너지는 같아야 한다. 즉 m_A 의 정도를 v 라하면

$$\frac{1}{2} m_A' (\omega r)^2 = \frac{1}{2} m_A v^2 \quad [22]$$

상식에 식(9)의 v 를 대입하면

$$\begin{aligned} m_A' &= m_A (\sin\omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t)^2 = m_A \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda}{2} \cos\omega t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cos 2\omega t - \frac{\lambda}{2} \cos 3\omega t - \frac{\lambda^2}{8} \cos 4\omega t \right) \quad [23] \end{aligned}$$

식(23)의 등가질량은 크랭크각에 따라 변함을 알 수 있다. 때문에, 크랭크 1회전에 대한 평균치 $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} m_A' d(\omega t)$ 를 취하고, 이

것을 등가질량이라 하면 식(23)으로부터

$$m_A' = \frac{m_A}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{4}\right) \quad [24]$$

이것을 회전부질량에 합하면, 한개의 피스톤, 연접봉, 크랭크에 대한 상당질량 m_{pc} 즉, 전질량관성모멘트 J_{pc} 는

$$m_{pc} + J_{pc} = (m_B + m_A') r^2 = \left(m_B + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{4}\right) m_A\right) r^2 \quad [25]$$

로 되고, 이것이 등가질량의 관성모멘트이다.

위에서 연접봉의 소단부 및 대단부의 질량 m_1 과 m_2 는, 연접봉 중량의 1/3을 소단 즉, 왕복운동부에, 2/3를 대단, 즉, 회전운동부에 배분하므로써 구할 수 있고, (1/3~2/5, 2/3~3/5)의 배분을 하는 경우도 있다. 실제로는 동일한 2개의 저울에 연접봉의 양단을 걸치고 배분된 중량을 각각 소단, 대단에 측정한다.

2-2 계축의 등가장과 비틀림스프링상수

직경 d , 길이 l , 또한 횡탄성계수가 G 인 끈고 등근축의 비틀림스프링상수 K 는

$$K = \left(\frac{\pi d^4}{32}\right) \frac{G}{l} = I_p \frac{G}{l} \quad [26]$$

여기서 I_p 는 극단면2차모멘트이다.

같은 비틀림강성을 갖는 직경 D_0 인 축으로 취환하였을 경우의 길이, 즉 등가장(equivalent length)을 L 이라 하면

$$K = \left(\frac{\pi d^4}{32}\right) \frac{G}{l} = \left(\frac{\pi D_0^4}{32}\right) \frac{G_{rad}}{L} \quad [27]$$

의 관계로부터 $G = G_{rad}$ 이면

$$L = l \frac{D_0^4}{d^4} \quad [28]$$

실제의 계산에 있어서는 환산축으로서

$$G_{rad} I_p = 10^{10} \text{ kg-cm}^2 \quad [29]$$

되는 축으로 놓으면 상이한 진동계의 비교나, 고유진동수의 계산등에 편리하다. 이 경우에 있어 환산축으로 보통 은강제 크랭크축재를 취하고 $G=830,000 \text{ kg/cm}^2$ 라 하면

$$\frac{\pi}{32} D_0^4 = 12050 \text{ cm}^4$$

즉, $D_0 = 18.716742 \text{ cm} \approx 18.7 \text{ cm}$

되는 축으로 취환된다.

여러가지 축재료에 대한 G 의 값은 표3과 같다.

표 3 축재료에 대한 G 의 값

재 료	횡탄성계수 G (kg/cm ²)	연장에 대한 비
니켈크롬강	약 850,000	0.976
주철	" 484,000	1.716
청동	" 415,000	2
고력 황동봉	" 350,000	2.37

가) 축의 형상에 따른 등가장

외경 D , 내경 d , 길이 l 의 중공축(그림 11)에 대해서 등가장 L 은

$$L = \frac{l}{\left(\frac{D}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d}{D_0}\right)^4} \quad [31]$$

로 주어지며, 또한 양단의 직경이 D_1, D_2 이며 길이 l 의 테이퍼 축(그림 12)에 대해서는

$$L = \frac{l}{3} \frac{1}{\frac{D_2}{D_0} - \frac{D_1}{D_0}} \left\{ \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^3 - \left(\frac{D_0}{D_2}\right)^3 \right\} \quad [32]$$

이다. 또한 그림 13의 여러가지 상이한 직경을 갖는 축에 대해서는 G 가 일정하다고 보면

$$L = \sum_{i=1}^n l_i \left(\frac{D_0}{D_i}\right)^4 \quad [33]$$

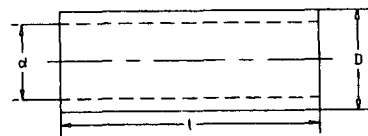


그림 11 중공원형축

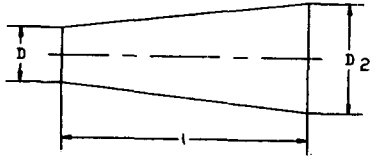


그림 12 테이퍼축

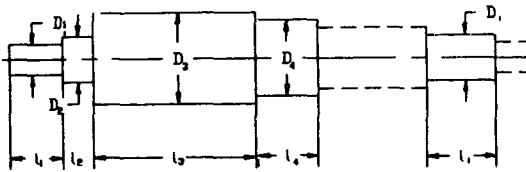


그림 13 단이 있는 축

키홈을 갖는 축은 비틀림에 대한 유효단면을 홈의 깊이 만큼 줄인 직경을 갖는 축으로 보고 계산하는 경우와 키가 완전히 끼워져 있는 것으로 보고 실제의 직경 d로 계산하는 경우가 있다. 가열하여 끼운 슬라이브는 축과 일체로 되어 있다고 보고 계산한다.

나) 크랭크축의 등가장

크랭크축의 탄성계수에 대해서는 이것을 이론적으로 엄밀하게 구하는 것이 곤란하기 때문에 보통은 실험결과를 가미한 반이론식이나 경험식을 이용한다.

① 이론적으로 유도한 식

② Jeon의 식 : 그림 14에서 단위비틀림모우멘트(kg-cm)에 의한 비틀림각 f_{θ} (rad), 즉 영향계수는 다음과 같이 구해진다.

$$f_{\theta} = \frac{1}{GJ_p} \left(l - \frac{4Rb}{n l} \frac{f_{\theta}\phi}{f_{\theta\psi}} \right) + \frac{2}{EJ_x} \left(R - \frac{R^2}{n l} \frac{f_{\theta}\phi}{f_{\theta\psi}} \right)$$

여기서

$$f_{\theta\phi} = \frac{\beta l(1-2\gamma)}{6EJ} + \frac{2bR(1+\gamma)(l-\beta R)}{GJ_p l^2} + \frac{R\beta}{GJ_p l^2} \{ a \{ l - (1+\gamma)a \} + (a-l) \{ l r - (1+\gamma)a \} \} + \frac{R^2(\gamma+1)(3l-2\beta R)}{3EJ_x l^2}$$

$$f_{\theta\psi} = \frac{l}{3EJ} \{ 1 + \gamma(\gamma-1) \} + \frac{2bR^2(1+\gamma)^2}{gJ_p l^2} + \frac{R}{gJ_y l^2} + \{ \{ l - (1+\gamma)a \}^2 + \{ l r - (1+\gamma)a \}^2 \} + \frac{2R^3(1+\gamma)^2}{3EJ_x l^2}$$

$$\beta = \frac{\frac{2Rb}{lGJ_p} + \frac{R^2}{lEJ_x}}{\frac{l}{3EJ} + \frac{2bR^2}{l^2GJ_p} + \frac{R\{a^2 + (l-a)^2\}}{l^2GJ_y} + \frac{2R^3}{3l^2GEJ_x}}$$

$$\gamma = \frac{\frac{l}{6EJ} - \frac{2Ra(a-l)}{GJ_y l^2} - \frac{2R^3}{3EJ_x l^2} - \frac{2bR^2}{GJ_p l^2}}{\frac{l}{3EJ} + \frac{2bR^2}{GJ_p l^2} + \frac{R\{a^2 + (l-a)^2\}}{l^2GJ_y} + \frac{2R^3}{3l^2EJ_x}}$$

(34)

J=저널 또는 크랭크핀의 단면 2차모멘트

Jp=저널 또는 크랭크핀의 극단면 2차모멘트

Jx, Jy, Jz=X, Y, Z 축에 관한 크랭크암의 단면 2차 모멘트

n은 인접 크랭크와의 접속각에 의하여 결정되는 값이며 보통 $n = \frac{3}{2}$ 을 취한다.

비틀림스프링상수는 $K=1/f_{\theta}$ 로써 구하여지며 이 결과를 식(27)에 대입하여 등가장을 구할 수 있다.

③ Timoshenko의 식 : 그림 15에 보이는 크랭크축에 대하여 등가장을 다음과 같이 계산한다.

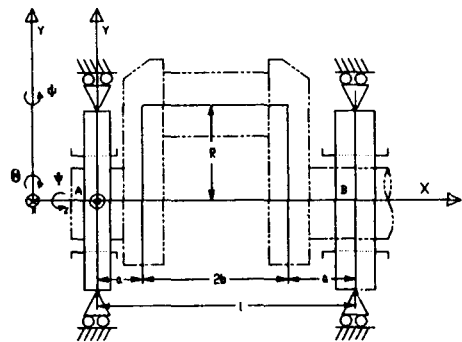


그림 14 단일 크랭크 드로우의 등가계

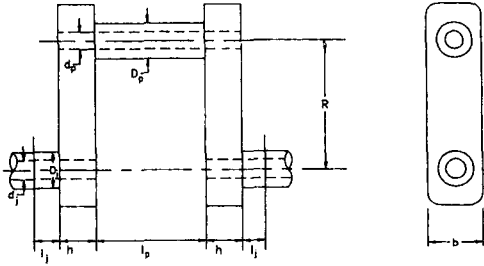


그림 15 단일크랭크 드로우의 치수

(A) 양단이 자유롭게 지지된 경우 : 베어링의 틈이 충분히 큰 상태에서 크랭크축이 비틀어졌을 때, 양지지단에서 축이 자유롭게 움직인다고 생각하면 비틀림각은 저널과 핀의 비틀림 및 크랭크암의 휨으로 이루어진다.

$$L = \frac{2l_j}{\left(\frac{D_j}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0}\right)^4} + \frac{l_j}{\left(\frac{D_p}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0}\right)^4} + \frac{3\pi}{4} \frac{G}{E}$$

$$\frac{R}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4}\right)} = \frac{(2l_j + 0.9h)}{\left(\frac{D_j}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0}\right)^4} + \frac{(l_j + 0.9h)}{\left(\frac{D_p}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0}\right)^4} + 0.93 \frac{R}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4}\right)} \quad [35]$$

단, $D_0 = 18.7(\text{cm})$, $G = 8.3 \times 10^5(\text{kg/cm}^2)$, $E = 2.1 \times 10^6(\text{kg/cm}^2)$

(B) 양단이 베어링에 의해 구속된 경우:

$$L' = \frac{(2l_j + 0.9h)}{\left(\frac{D_j}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0}\right)^4} + \frac{(l_p + 0.9h)}{\left(\frac{D_p}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0}\right)^4} \left(1 - \frac{R}{k}\right) + 0.93 \frac{R}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4}\right)} \left(1 - \frac{R}{2k}\right)$$

여기서,

$$k = \frac{\frac{R(l_p+h)^2}{4C_a} + \frac{l_p R^2}{2C_p} + \frac{l_p^3}{24B_p} + \frac{R^3}{3B_a} + \frac{1.2}{G} \left(\frac{l_p}{2F_p} + \frac{R}{2F_a}\right)}{\frac{l_p R}{2C_p} + \frac{R^2}{2B_a}}$$

$$C_a = \frac{b^3 h^3 G}{3.6(b^2 + h^2)} \quad : \text{크랭크암을 양변이 각각}$$

b, h의 장방형의 봉이라 생각하였을 때의 비틀림강성

$$C_p = G I_p + \frac{(\pi D_p^4 - d_p^4)}{32} G \quad : \text{크랭크핀의 비틀림강성}$$

$$B_a = E I_a = \frac{hb^3}{12} E \quad : \text{크랭크축에 직각인 평면 내에 있어서의 크랭크암의 굽힘강성}$$

$$B_p = \frac{\pi(D_p^4 - d_p^4)}{64} E \quad : \text{크랭크핀의 굽힘강성}$$

F_p, F_a : 크랭크핀과 크랭크암의 단면적

운전 중의 등가장은 $(L+L')/2$ 의 평균치를 취하면 비교적 실측치에 잘 접근한다.

② 경험적으로 유도한 식

그림 15에 의하여 등가장을 구하는 실험식은 다음과 같은 것이 있다.

㉞ Carter의 식

$$L = \frac{2l_j + 0.8h}{\left(\frac{D_j}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0}\right)^4} + \frac{0.75l_p}{\left(\frac{D_p}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0}\right)^4} + \frac{1.5R}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4}\right)} \quad [37]$$

㉟ Geiger의 식

$$L = \frac{2l_j + 0.4h}{\left(\frac{D_j}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0}\right)^4} + \frac{l_p + 0.4h}{\left(\frac{D_p}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0}\right)^4} + \frac{0.91(R - ZD_j)}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4}\right)} \quad [38]$$

단, Z 는 $\frac{b}{D_j} \cdot \frac{R}{D_j}$ 에 의하여 정하여지는 정수로서 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\frac{b}{D_j} = 1.6 \sim 1.63, \frac{R}{D_j} = 1.2 \sim 0.92 \text{일 때} \quad Z = 0$$

$$\frac{b}{D_j} = 1.49, \frac{R}{D_j} = 0.84 \text{일 때} \quad Z = 0.4$$

$$\frac{b}{D_j} = 1.33, \frac{R}{D_j} = 1.07 \text{일 때} \quad Z = 0.3$$

㊱ Ker Wilson의 식

$$L = \frac{(2l_j + 0.4D_j)}{\left(\frac{D_j}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0}\right)^4} + \frac{l_p + 0.4D_j}{\left(\frac{D_p}{D_0}\right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0}\right)^4} + \frac{R \cdot 0.2(D_j + D_p)}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4}\right)} \quad [39]$$

㊤ Tuplin의 식

$$L = \frac{2 l_j + 0.15 D_j}{\left[\left(\frac{D_j}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0} \right)^4 \right] \left[1 - \left(\frac{d_j}{D_j} \right)^4 \right]} + \frac{l_p + 0.15 D_p}{\left[\left(\frac{D_p}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0} \right)^4 \right] \left[1 - \left(\frac{d_p}{D_p} \right)^4 \right]} + \frac{(2h - 0.15 D_j - 0.15 D_p)}{\left(\frac{b}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0} \right)^4} + \left(\frac{0.065 D_p}{h} + 0.58 \right) \frac{R}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4} \right) + \frac{0.016}{\left(\frac{h^2 b}{D_0^4} \right)}} \quad [40]$$

㊤ Schlaefke의 식

$$L = \frac{2 l_j + h}{\left(\frac{D_j}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0} \right)^4} + \frac{l_p + h}{\left(\frac{D_p}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0} \right)^4} + 0.773 \frac{R}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4} \right)} \quad [41]$$

㊤ Seelmann의 식

$$L = 2 \{ K (l_1 + l_2 + l_3) + (l_3 + l_4) \}$$

$$l_1 = \frac{G}{E} \frac{R}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4} \right)} \quad l_2 = 0.225 h \left[\left(\frac{D_p}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0} \right)^4 + 1 \right] \quad [42]$$

$$l_3 = \frac{l_p}{2 \left[\left(\frac{D_p}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0} \right)^4 \right]} \quad l_4 = l_j$$

㊤ Heldt의 식

$$L = \frac{2 l_i + 0.4 h}{\left(\frac{D_j}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0} \right)^4} + 1.096 \frac{l_p}{\left(\frac{D_p}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0} \right)^4} + \frac{3.424}{\pi} \frac{R}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4} \right)} \quad [43]$$

㊤ Jackson의 식

$$L = \frac{2 l_j + 0.27 D_j}{\left(\frac{D_j}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0} \right)^4} + \frac{l_p + 0.27 D_p}{\left(\frac{D_p}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0} \right)^4}$$

$$\times \left[1 + \frac{0.07 (l_p + 0.27 D_p)}{R^2} \right] + \frac{1.867}{\pi} \frac{R}{\left(\frac{hb^2}{D_0} \right)} \quad [44]$$

㊤ BICERA의 식

$$L = \frac{2 l_j}{\left(\frac{D_j}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0} \right)^4} + \frac{l_p}{\left(\frac{D_p}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0} \right)^4} + \frac{0.07 l_p^3}{R^2 \left[\left(\frac{D_p}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0} \right)^4 \right]} + \frac{2KR}{\frac{hb^3}{D_0^4}} \quad [45]$$

단. 크랭크암계수 $2K = 11.58 \times \frac{hb^3}{RD_j^4} + 0.439$

㊤ Mitsubishi-Nagasaki의 식

$$L = 2 \left(l_j + \frac{D_j}{\xi} \right) \frac{1}{\left(\frac{D_j}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_j}{D_0} \right)^4} + \left(l_p + \frac{4D_p}{\eta} \right) \frac{1}{\left(\frac{D_p}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d_p}{D_0} \right)^4} + 0.9 \left(R - \frac{2}{3} \frac{D_j + D_p}{\pi} \right) \frac{1}{\left(\frac{hb^3}{D_0^4} \right)} \quad [46]$$

단. $\xi = \eta = 5$ 조립식 크랭크

$\xi = \eta = 6$ 일체식 크랭크

$\xi = 5, \eta = 6$ 반조립식 크랭크 (핀은 크랭크 암과 일체)

상기 식들에서 구한 L을 식[27]에 대입하여 비틀림 스프링상수 K를 구한다.

상기식의 사용결과에 의하면 대체로 다음과 같은 특성을 갖는다.

※ 저, 중속, 대형기관 : Geiger, Mitsubishi-Nagasaki, Seelmann 식

※ 저, 중속, 중형기관 : Seelmann, Schlaefke, Carter, Tuplin, Ker Wilson, BICERA, Heldt의 식

※ 고속, 소형기관 : Schlaefke, Carter, Tuplin, Heldt의 식 (다음호)