

## 증가하는 스트레스에서의 최적가속수명시험<sup>†</sup>

### Optimum Progressive-Stress Accelerated Life Test<sup>†</sup>

윤원영\*, 정성기\*

Won Young Yun\* and Sung Gi Jung\*

#### Abstract

This paper considers the optimal design of accelerated life test in which the stress is linearly increased. It discusses the special case when the life distribution under constant stress follows an exponential distribution and the accelerated equation satisfies the inverse power law. It is assumed that cumulative damage is linear, that is, the remaining life of test units depends only on the current cumulative fraction failed and current stress(cumulative exposure model).

The optimization criterion is the asymptotic variance of the maximum likelihood estimator of the log mean life at a design stress. The optimal increasing rate is obtained to minimize the asymptotic variance. Table of sensitivity analysis is given for the prior estimators of model parameters.

#### 1. 서 론

사용 조건에서 제품에 대한 신뢰도가 높기 때문에 일반적인 수명시험으로 고장 데이터를 얻기 곤란한 경우, 빠른 시간내에 제품의 수명에 대한 정보를 얻을 필요가 있을때 수명에 영향을 주는 스트레스—예를 들면, 온도, 전압, 압력, 진동, 부하 또는 이들의 조합등—를 사용 조건 보다 더 가혹한 조건으로 변화시켜 수행하는 것이 가속수명시험이다. 여기서 관측되

는 자료로부터 사용 조건의 수명을 예측한다.

가속수명의 종류에는 시험제품에 스트레스를 가하는 방법에 따라 사용 조건보다 높은 수준의 스트레스를 시간에 따라 변화시키지 않고 일정하게 가하는 일정한 스트레스 방법(Constant Stress Method), 시간에 따라 단계적으로 변화시키는 단계 스트레스 방법(Step-Stress Method), 그리고 시간에 따라 연속적으로 증가시키는 방법(Progressive Stress Method)이 있다.

가속수명시험에 대한 연구는 사용조건에서의 수명 분포의 모수를 추론하는 문제와 가속수명 시험을 어떻게 수행할 것인가를 결정하는 최적

<sup>†</sup> 본 연구는 90년도 과학재단 기초연구비 지원에 의하여 수행 되었음.

\* 부산대학교 산업공학과.

시험설계문제로 나누어진다. 지금까지 가속수명시험의 설계에 대한 연구는 스트레스 방법과 단계별 스트레스 방법에 대해 주로 다루어졌다.

연속적으로 증가시키는 스트레스 방법은 다른 두 방법에 비해 한 시험 장치로써 가속수명시험을 할 수 있고, 스트레스의 가속이 순간적으로 이루어질 수 없는 상황, 즉 스트레스를 서서히 올려야 하는 상황을 표현해 주며, 갑작스러운 스트레스 증가때문에 발생하는 시제품 혹은 부품의 변형이나 충격(Shock)에 의한 고장을 줄일 수 있다는 장점이 있다. 연속증가 스트레스가속방법은 다양한 제품의 수명시험에 사용되어졌다. Endicott 등[3]과 Shatzkes 등[7]은 축전기 시험에 이 방법을 사용하였으며, Goba[5], Shatzkes와 Av-Ron[6]은 절연재의 수명시험에, 그리고 Chan[2]은 집적회로의 수명시험에 이 방법을 적용하였다. 이 방법에 대한 통계적인 이론 연구는 Allen[1], Endicott와 Zoellner[4], Yin과 Sheng[8] 등에 의해 다루어졌으며 주로 가속수명시험의 분석문제를 취급하였다. Yin과 Sheng[8]은 수명분포가 와이블 혹은 지수인 경우 스트레스와 모수의 관계가 역거듭제곱 모형일 때 연속적으로 증가시키는 스트레스에 대한 수명분포를 제시하였고 모수의 추론에 관한 문제도 다루었다. 이 논문에서는 이 모형을 이용하여 증가하는 스트레스 가속수명시험의 최적 설계 문제를 다루고 이에 대한 민감도 분석을 하고자 한다.

## 2. 기호 및 가정

### (기호)

$a_0, b$  : 시험 수준과 각 수준에서의 평균 수명 사이의 관계를 나타내는 함수의 모수

$a$  :  $\ln(a_0)$

$K$  : 증가하는 스트레스의 기울기

$K^*$  : 증가하는 스트레스의 최적 기울기

$s_0$  : 설계 단계의 스트레스

$x_0$  :  $\ln(s_0)$

$T$  : 고장 시간을 나타내는 확률 변수

$t$  : 시험 수준에서 고장시간의 관측값

$F(\cdot)$  : 고장시간에 대한 분포함수

$\lambda_0$  : 설계 단계의 고장율

$\theta_0$  : 설계 단계의 평균 수명,  $1/\lambda_0$

### (가정)

1) 모든 시험수준에서 수명시간은 지수분포를 따른다. 즉, 고장시간의 분포함수는

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t), \quad 0 \leq t \text{ 이다.}$$

2) 시험제품의 어떤 시점에서의 남은 수명은 고장확률이 어떻게 누적되었는지 상관없이 현재의 시험수준과 현재의 누적고장확률에만 의존한다. -누적 노출 모형 (Cumulative Exposure Model)

3) 고장율  $\lambda$ 와 스트레스는 다음과 같은 관계가 있다(역거듭제곱 모형).

$$\lambda = a_0 \cdot S^b$$

여기서  $S$ 는 스트레스 수준이다.

4) 증가하는 스트레스는 시간에 정비례한다.

$$S(t) = Kt$$

5) 각 시험제품의 고장 시점은 서로 독립이다.

## 3. 최적설계모형

본 장에서는 스트레스를 시간에 따라 연속적으로 증가시키는 스트레스 가속방법 (그림 1)의 최적 설계문제를 다룬다. 최적 시험 설계의 기준은 설계 단계의 수명에 대한 최우 추정량의 점근 분산을 사용하며, 이 기준을 최소화하는 스트레스 증가속도( $K$ )를 구하고자 한다. 설계 단계의 수명에 대한 최우추정량의 점근 분산을 구하면 다음과 같다.

$$\text{Avar}(\ln \hat{\theta}_0) = \text{Var}[-(\ln \hat{a}_0 + \hat{b} \cdot \ln S_0)]$$

$\ln a_0 = a, \ln s_0 = x_0$ 라고 하면,

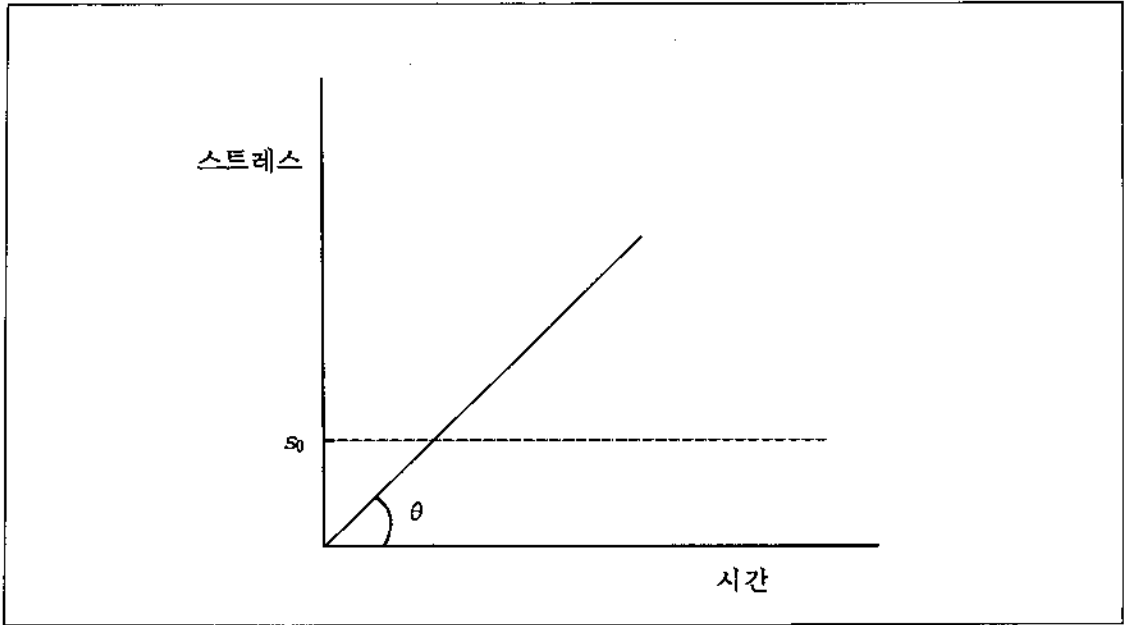


그림 1. 증가하는 스트레스 가속수명시험

$$Avar(\ln \hat{\theta}_0) = Var(\hat{a}) + 2x_0 Cov(\hat{a}, \hat{b}) + x_0^2 Var(\hat{b})$$

여기서,  $\wedge$ 는 최우추정량을 나타낸다.

이 식의 좌변은 모수 a, b의 최우추정량인  $\hat{a}$

,  $\hat{b}$ 의 점근 분산-공분산 행렬(Asymptotic

Variance-Covariance Matrix)로 부터 구할 수 있다. 그리고 점근 분산-공분산 행렬은 a, b에 대한 우도함수(Likelihood Function)의 Fisher 정보행렬(Fisher Information Matrix)로부터 구한다.

따라서 Fisher 정보행렬을 구하기 위해 고장 시간에 대한 분포함수를 구한다. 연속적으로 증가하는 스트레스하에서의 분포함수는 다음의 정리 [1]을 이용해서 구한다.

정 리 [1]

일정한 스트레스하에서의 분포함수가 지수 분포를 따르면서, 스트레스를 선형으로 증가시키는 경우 t에서의 스트레스 수준이  $S(t) = Kt$ 일 때 고장분포함수와 확률밀도함수는

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{a_0 \cdot K^b}{b+1} \cdot t^{b+1}\right)$$

$$f(t) = a_0 \cdot K^b \cdot t^b \cdot \exp\left(-\frac{a_0 \cdot K^b}{b+1} \cdot t^{b+1}\right)$$

이다.

(증 명) 참고문헌 [8] 참조 ■

따라서, 이 모형의 우도함수는

$$L(a_0, b) = \prod_{i=1}^n (a_0 \cdot K^b) t_i^b \exp\left(-\frac{a_0 \cdot K^b}{b+1} \cdot t_i^{b+1}\right) \dots \dots \dots (1)$$

이고, 대수 우도함수는

$$\ln L(a, b) = n(a+b) \cdot \ln K + \sum_{i=1}^n b \cdot \ln t_i - \sum_{i=1}^n \frac{e^a K^b}{b+1} \cdot t_i^{b+1} \dots\dots\dots (2)$$

이다. 대수 우도함수의 a, b에 대한 1차 편미분식은

$$\frac{\partial \ln L(a, b)}{\partial a} = n - \sum_{i=1}^n \frac{e^a K^b}{(b+1)} \cdot t_i^{b+1}$$

$$\frac{\partial \ln L(a, b)}{\partial b} = n \ln K + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \sum_{i=1}^n \frac{e^a K^b}{(b+1)^2} \cdot \{(b+1) \ln(K t_i) - 1\} \cdot t_i^{b+1} \dots\dots (3)$$

이고, 2차 편미분식은

$$\frac{\partial^2 \ln L(a, b)}{\partial^2 a} = - \sum_{i=1}^n \frac{e^a K^b}{(b+1)} \cdot t_i^{b+1}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(a, b)}{\partial a \partial b} = n - \sum_{i=1}^n \frac{e^a K^b}{(b+1)^2} \cdot \{(b+1) \ln(K t_i) - 1\} \cdot t_i^{b+1}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(a, b)}{\partial^2 b} = \sum_{i=1}^n \frac{e^a K^b}{(b+1)^3} \cdot \{(b+1)^2 \ln^2(K t_i) - 2(b+1) \ln(K t_i) + 2\} \cdot t_i^{b+1} \dots\dots\dots (4)$$

이다. 이 때 Fisher 정보행렬은

$$F = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial b}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial b}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2}\right) \end{bmatrix}$$

이므로 2차 편미분식의 기대값을 구한다. 그런데 1차 편미분식의 기대값은

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial a}\right) = E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial b}\right) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

를 만족한다. 식 (5)의 관계식을 이용하여 대수우도함수의 2차 편미분식의 기대값을 구하면 다음과 같다.

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right) = -n$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial b}\right) = -n(\ln K + E[\ln t]) \dots (6)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2}\right) = -n \cdot \frac{e^a K^b}{(b+1)} \cdot E[t^{b+1} \ln^2 t] K + 2 \cdot \left(\frac{1}{b+1} - \ln K\right) \cdot E[\ln t] - \ln^2 K \dots\dots\dots (7)$$

이다. 여기서, 식 (6)과 식 (7)의 E[ln t]와 E[t^{b+1} ln^2 t]는 다음의 정리 [2]와 정리 [3]을 각각 이용하여 구할 수 있다.

정리 [2]

$$E[\ln t] = \frac{1}{b+1} \cdot \frac{e^a K^b}{(b+1)} - \gamma \cdot \frac{1}{b+1} \quad (8)$$

(증명)

Y = ln T라고 하면 Y는  $\sigma = (b+1) - 1, \mu = -\frac{1}{b+1} \cdot \ln \frac{e^a K^b}{b+1}$ 를 모수로 하는 극한치 분포(Extreme Value Distribution)를 따른다. 그러므로 Y의 기대값은 극한치 분포의 평균인  $\mu - \gamma\sigma$ 이다. 여기서  $\gamma$ 는 오일러의 상수(Euler's Constant)로 그 값은 0.5772...로 알려져 있다. 따라서 E[ln t]는 식(8)과 같이 된다. ■

정리 [3]

$$E[t^{b+1} \ln^2 t] = \frac{1}{(b+1) \cdot e^a K^b} \cdot [\psi(2) + \{\psi(2)\} - \ln\left(\frac{e^a k^b}{(b+1)}\right)^2] \dots\dots\dots(9)$$

여기서  $\psi(2)$ 는 trigamma function,  $\{\psi(2)\}$ 는 digamma function 이고, 그 값은 각각 0.64, 0.42이다.

(증명)

$$E[t^{b+1} \ln^2 t] = \int_0^\infty t^{b+1} \ln^2 t \cdot t \cdot (aK^b)t^b \cdot \exp\left(-\frac{e^a K^b}{(b+1)} \cdot t^{b+1}\right) dt$$

여기서  $t^{b+1} = z$ 라고 변환하면

$$E[t^{b+1} \ln^2 t] = \frac{e^a K^b}{(b+1)^3} \int_0^\infty z \ln^2 z \cdot \exp\left(-\frac{e^a K^b}{(b+1)} \cdot z\right) dz = \frac{e^a K^b}{(b+1)^3 H^2} \int_0^\infty \ln^2 z \cdot \exp\left(-\frac{H z^{2-1}}{\gamma(2)}\right) \cdot e^{Hz} dz \dots\dots\dots(10)$$

이고,  $H = \frac{e^a K^b}{b+1}$ 이다. 식 (10)의 두번째 우변은 Gamma (2, H)에 대한  $\ln^2 z$ 의 기대값이다. 한편, 로그감마분포의 기대값과 분산은

$$E[\ln z] = \psi(2) - \ln H$$

$$\text{Var}[\ln z] = \psi'(2)$$

이므로

$$E[\ln^2 z] = \psi'(2) + (\psi(2) - \ln H)^2$$

이다. H를 환원하면 식 (9)와 같이 된다. ■  
따라서, Fisher 정보행렬을 정리하면

$$F = n \cdot \begin{bmatrix} 1 & \ln K + A \\ \ln K + A & \frac{e^a k^b}{(b+1)} \cdot B - 2\left(\frac{1}{(b+1)} = \ln K\right)A + \ln^2 K \end{bmatrix}$$

이고, Matrix F의 행렬식(Determinant)

$$|F| = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{6(b+1)^2}$$

이다. a, b에 대한 점근 분산-공분산 행렬 (Asymptotic Variance - Covariance Matrix)은 다음과 같다.

$$F^{-1} = \frac{1}{n \cdot |F|} \cdot \begin{bmatrix} \frac{e^a k^b}{(b+1)} \cdot B - 2\left(\frac{1}{(b+1)} = \ln K\right)A + \ln^2 K & -(\ln K + A) \\ -(\ln K + A) & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

단,  $A = -\frac{1}{b+1} \cdot \ln\left(\frac{e^a K^b}{b+1}\right) - \gamma \frac{1}{b+1}$

$$B = -\frac{1}{(b+1)e^a K^b} \cdot \left\{ \psi(2) - \ln\left(\frac{e^a K^b}{b+1}\right) \right\}^2$$

그리고  $|F| = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{6(b+1)^2}$ 이다.

이 분산-공분산 행렬로부터 사용조건에서의 평균수명에 대한 최우추정량의 분산은

$$\text{Avar}(\ln \hat{\theta}_0) = \text{Var}(\hat{a}) + 2x_0 \text{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) + x_0^2 \text{Var}(\hat{b}) \dots\dots\dots(12)$$

이고, a, b,  $x_0$ , K의 함수임을 알 수 있다. 이것을 정리하면

$$\text{Avar}(\ln \hat{\theta}_0) = \frac{6}{\pi^2} \cdot \left\{ \ln^2 K - 2 \ln K [a + \gamma - \ln(b+1) + (b+1)x_0] + (b+1)^2 x_0^2 + 2x_0(b+1)[a + \gamma - \ln(b+1)] + \frac{\pi^2}{6} + [a + \gamma + \ln(b+1)]^2 \right\}$$

이다. 최적시험설계는 식 (12)를 최소로 하는 K 값을 구하는 것이다. 그리고  $\ln K$ 를 z로 치환하면 2차식이므로 최적 K는

$$K^* = \exp\{a + \gamma + (b+1)x_0 - \ln(b+1)\} \quad (13)$$

이다. 따라서 최적 스트레스 가속 기울기는 식 (13)으로 부터 구할 수 있다.

#### 4. 예제 및 사전추정량의 영향

본 절에서는 간단한 예제와 사전추정량의 영향을 다루고자 한다. 간단한 예를 들어보면  $a_0 = 8.14E-27$ 이고,  $b = 16.39$ 이며 실제 스트레스 수준이 20KV인 절연액에서의 최적스트레스 증가 기울기  $K^* = 3.5149E-5$ 이며, 그리고 각 모형모수들에 대한  $K^*$ 의 변화를 보면 식 (13)에서 알 수 있듯이  $a, x_0$ 가 증가하면 최적  $K^*$ 의 값도 증가한다.

스트레스 증가속도  $K$ 를 결정하는데 있어서  $a_0, b$ 에 대한 사전추정량을 사용하게 되는데 이러한 사전추정량은 시험을 수행하는 실험자가 가지고 있는 경험적 수치 또는 비슷한 제품의 수명에 대한 정보로부터 얻을 수 있다. 이 사전추정량을 잘못 선정함으로써 발생하는 영향을 예제를 통해 검토하고자 한다.

표 1은 과소추정 또는 과대추정하는 경우의 분산의 증가비율을 나타내고 있다. 예를 들어서  $a_0, b$ 를 각각  $9.14E-27, 15.39$ 로 잘못 추정했을 경우 분산의 증가비율은 5.84임을 나타내고 있다. 이 표에서 사전추정량의 영향이 있는 것을 알 수 있다. 따라서 최적 증가속도를 결정하기 위해서는 사전 추정량 선정에 주의할 필요가 있다. 특히  $a_0$ 보다는  $b$ 의 추정에 더 많은 주의를 필요로 함을 알 수 있다.

#### 5. 결론

본 논문에서는 연속적으로 증가하는 스트레스에 의한 가속수명시험의 최적 설계 문제를 다루었다. 시험제품의 수명분포는 지수분포를 따르며 평균수명과 스트레스 사이에는 역 거듭제곱 모형을 가정하였다. 시간에 따라 연속적으로 증가하는 스트레스에 대한 수명분포는 Yin과 Sheng[16]이 제시한 모형을 이용했다.

표 1 사전추정량에 대한 영향

$a_0 \backslash b$	13.39	14.39	15.39	16.39	17.39	18.39	19.39
13.14E-27	69.585	36.98	14.78	3.02	1.76	11.02	30.83
12.14E-27	43.88	19.19	4.91	1.10	7.78	24.99	52.77
11.14E-27	44.76	19.76	5.18	1.06	7.44	23.34	51.81
10.14E-27	44.76	19.76	5.18	1.01	7.44	24.34	51.81
9.14E-27	46.82	21.12	5.84	1.01	6.69	22.87	49.63
8.14E-27	48.05	21.94	6.24	1.00	6.25	22.04	48.38
7.14E-27	49.47	22.89	6.72	1.01	5.80	21.11	46.98
6.14E-27	51.12	24.00	7.30	1.05	5.29	20.07	45.40
5.14E-27	53.10	25.35	8.01	1.13	4.74	18.88	43.57
4.14E-27	55.56	27.04	8.93	1.28	4.12	17.48	41.40
3.14E-27	58.80	29.29	10.19	1.55	3.40	15.78	38.71

최적 설계 기준은 대수 평균 수명의 최우 추정량의 점근분산으로 하였고 이것을 최소화시키는 최적 스트레스 증가속도를 구하였다.

본 연구에서 제시한 스트레스 시험방법의 설계는 모수의 사전 추정량을 필요로 한다. 따라서 사전 추정량의 영향에 대한 분석 문제도 다

루었다.

앞으로 연구되어야 할 과제는 와이블, 정규, 대수 정규등의 다른 분포에 대한 최적 시험방법에 대한 연구, 묶음 데이터(Grouped Data)에 대해 확장하는 연구, 다양한 관측중단(Stress 중단, 시간 중단)에 대한 연구가 필요하다고 판단된다.

### 참 고 문 헌

1. Allen, W.R., "Inference from Tests with Continously Increasing Stress", *Operations Research*, Vol.17, 1965, pp.303-312.
2. Chan, C.K., "A Proportional Hazard Approach to Correlate SiO<sub>2</sub>-Breakdown Voltage & Time Distribution", *IEEE Transactions on Reliability*, R-39, 1990, pp 147-150.
3. Endicott, H.S., Hatch, B.D., and Schmer, R.G., "Application of the Eyring Model to Capacitor Aging Data", *IEEE Transactions on Component Parts*, CP-12, 1965, pp.34-42.
4. Endicott, H.S., and Zoellner, J.A., "Progressive Stress-A New Accelerated Approach to Voltage Endurance", *Transactions AIEE (Power Apparatus and Systems)*, Vol. 80, 1961, pp.515-522.
5. Goba, F.A., "Bibliography on Thermally Aging of Electrical Insulation", *IEEE Transaction on Electrical Insulation*, EI-4, 1969, pp. 31-58.
6. Shatzkes, M., and Av-Ron, M., "Statistics of Breakdown", *IBM Journal of Research Development*, Vol. 25, 1981, pp, 167-175.
7. Shatzkes, M., Av-Ron, M., and Gdula, R. A., "Defect-Related Breakdown and Conduction in SiO<sub>2</sub>", *IBM Journal of Research Development*, Vol. 24, 1980, pp. 469-479.
8. Yin, X.K., and Sheng, B.Z., "Some Aspects of Accelerated Life Testing by Progressive Stress", *IEEE Transactions on Reliability*, R-36, 1987, pp.150-155.