Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 19, No.4, December., 1993.

선형계획문제의 강성다항식 계산단계 기법에 관한 연구†

A Study on the Strong Polynomial Time Algorithm for the Linear Programming†

정성진* · 강완모* · 정의석* · 허홍석*

S.J. Chung*, W.M. Kang*, E.S. Chung*, and H.S. Hu*

Abstract

We propose a new dual simplex method using a primal interior point. The dropping variable is chosen by utilizing the primal feasible interior point. For a given dual feasible basis, its corresponding primal infeasible basic vector and the interior point are used for obtaining a decreasing primal feasible point. The computation time of moving on interior point in our method takes much less than that of Karmarkar-type interior methods. Since any polynomial time interior methods can be applied to our method, we conjectured that a slight modification of our method can give a polynomial time complexity.

1. 서 론

최적화 문제중에서 선형계획문제는 가장 근본적이며 실용적인 문제이다. 선형계획문제의 표준형은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

위의 문제를 효율적으로 푸는 대표적인 기법은 고전적 기법인 단체법(Simplex Method)과 Karmarkar에 의해 처음 발표된 내부점 방식 기법[16]이다. 내부점 방식 기법이 (P)의 A, b, c의 값에 의하여 결정되는 문제크기와 다항식의 계산단계를 갖고 있는 것과는 달리 단체법은 문제크기의 지수함수의 계산과정이 요구된다.

선형계획문제의 기법이 강성다항식의 계산복잡성을 갖는다는 것은 A, b, c의 값의 크기에는 상관없이, 주어진 기법이 변수의 갯수와 제약식의 갯수에 대하여 그 계산단계가 다항식으로 표시된다는 것을 의미한다.

내부점 방식 기법들은 각 계산단계마다 목적함수의 값, 또는 초기해의 목적함수값에 대한 비율을 감소시키는 것이 아니라 "Potential"함수를 도입하여 이를 감소시킴으로써 최적해에 근접한다. 그리고, 최적해 판정기준이 문제크기

† 본 연구는 1989년도 문교부 국비 해외파견 연구지원에 의하여 수행 되었음.

* 서울대학교 산업공학과

를 L이라 할 때 2^{-L}에 종속적이다. 따라서 내부점 방식 기법은 강성다항식 복잡도를 가지고 있지 못하다.

이에 반하여 단체법은 비록 지수함수의 계산단계를 갖고 있으나 이의 복잡도는 진입 탈락 변수 선택기준에 따른 최적기저에 도달되는 계산단계에 기인한다. 그러나, 최적기저의 판정이 A, b, c의 크기에는 독립적이다. 또한, 기존 단체법은 내부점이 주어져 있더라도 진입 탈락변수 선택기준에는 내부점이 아무런 영향을 주지 못하였다.

본 논문에서는 원가능 내부해를 이용하여 진입 탈락변수를 결정하고 쌍대가능 기저의 원비가능 기저해를 이용하여 내부점을 이동하는 내부점 쌍대단체법(Primal Interior Dual Simplex method : PIDS)을 제시한다. 내부점 쌍대단체법이 다항식의 계산 단계를 가진다는 것이 증명되지 못하였으나, 전산실험을 통하여 이의 효율성이 입증되었다.

2. 강성다항식 복잡도의 기법을 갖는 특별한 선형계획문제

일반적인 선형계획문제에 있어서 강성다항식 복잡도의 기법이 존재하는 가는 아직 미해결 문제이다.

그러나, (P)에서 A행렬이 네트워크 인접행렬인 선형네트워크문제는 강성다항식 복잡도의 기법을 갖는다. 최단거리문제에는 Dijkstra[7], Bellman[4]의 기법이 있고, 최대흐름문제는 70년대 초반부터 강성다항식 기법이 발표되었다(Edmonds, Karp[9], Dinic[8], Karzanov[17]). 그리고 최소비용 흐름문제의 강성다항식 복잡도 기법은 Tardos[24, 25]의 연구를 시작으로 여러 사람들에 의해 연구되었다(Orlin[21], Goldberg, Tarjan[11]).

이러한 선형네트워크문제가 강성다항식 복잡도 기법을 가질 수 있었던 배경으로 다음을 들 수 있다.

첫째, 네트워크 구조 자체에서 기인한 — 목적함수와 독립적인 — 기법의 종료기준을 가지고 있다. 예를 들자면 최대흐름문제에서 distance label[1], 배정문제에서 signature[3] 등이 있다.

둘째, ε-최적해 개념[5]이 일반적 선형계획문제에 적용될 때는 ε이 입력자료크기(L=size(A, b, c))에 종속적이지만(Karmarkar[16], Khachyan[18]의 경우, $\varepsilon=2^{-O(L)}$) 네트워크 구조 하에서는 정수해 성질때문에 ε을 입력자료의 크기와 무관하게 1/n을 사용할 수 있다(Goldberg, Tarjan[11]).

즉 선형네트워크문제는 네트워크구조와 정수해 성질을 바탕으로 강성다항식 복잡도 기법을 얻었다. 따라서 선형네트워크문제의 강성다항식 복잡도 기법을 일반적인 선형계획문제에 확장 적용할 수 있을지는 회의적이다.

그러면 선회연산을 기본으로 하는 네트워크 단체법의 경우를 보자.

Cunningham[6] 네트워크단체법에 Strongly Feasible Basis(SFB)개념을 도입하였다. SFB를 유지하는 선회 연산은 순환 및 퇴화연산의 횟수가 지수함수적인 정체현상을 방지할 수 있음을 보였다. Orlin[20]은 SFB가 Dantzig의 Lexico Feasible Basis와 동일함을 보였다. 그리고, 최소비용흐름문제를 제외한 네트워크문제에 대해 강성다항식 복잡도의 단체법이 개별적으로 개발되어 왔다. 최단거리문제([2], [14]), 최대흐름문제([10], [13]), 배정문제([3], [15])등은 강성다항식 복잡도의 선회연산 기법이 알려져 있다.

아직까지 최소비용 흐름문제에 대한 강성다항식 복잡도의 네트워크단체법은 알려져 있지 않지만, 다항식 복잡도의 선회연산 기법은 여러가지 있다([12], [19], [22], [26]).

선형네트워크문제에 강성다항식 또는 다항식 복잡도의 네트워크단체법이 존재할 수 있는 배경은 정체현상을 방지하는 SFB개념의 도입과 정수해의 특성이다.

일반 선형문제에서는 네트워크문제와는 달리 정체현상의 방지가 문제 자체를 푸는 것과 동일하고 해가 정수일 필요가 없음을 고려할 때, 네트워크단체법이 일반 선형계획문제에 확장

적용될 수 있는가는 다소 회의적이다.

3. 내부점 쌍대단체법

본 논문에서 제시하는 해법은 원가능 내부점을 이용하여 탈락변수를 선택하는 내부점 쌍대단체법(PIDS)이다. 쌍대단체법은 탈락변수와 진입변수의 선택 방법에 따라 많은 종류가 있다. 해법들은 탈락변수로 음의 값을 취하는 기저변수를 선택하는데, 이 선택 방법에 따라 종류가 나누어진다(PIDS는 기하학적인 개념으로 원가능 내부해를 이용해 탈락변수를 선택한다.)

주어진 선형계획문제가

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

이고, 쌍대 가능 기저 B와 원가능 내부해 d가 주어졌다고 가정하고, 기저변수와 그에 해당하는 목적함수 계수를 각각 x_B, c_B, 비기저변수와 그에 해당하는 목적함수 계수를 x_D, c_D라고 하자.

쌍대가능기저와 내부해가 주어져 있지 않을 경우에는 일반적인 단체법에서 사용되는 인공변수를 추가하여 푸는 선형계획문제로의 변환을 사용하여 초기기저와 내부해를 구할 수 있다.

$\pi=c_BB^{-1}$, $x=(B^{-1}b,\ 0)$일 때 약쌍대정리(Weak Duality Theorem)에 의해 $\pi b \leq cd$가 성립한다. 따라서 $\pi b=c_BB^{-1}b=cx \leq cd$이다. x, d가 최적해가 아니라면 $c(x-d)<0$이어서 $x-d$가 감소방향(decreasing direction)이고 $A(x-d)=0$이다. 따라서 d에서 $x-d$방향으로 이동하면서 원가능성을 유지할 수 있다. 그리고, 감소방향으로 움직이는 내부해 d를 이용하여 탈락변수를 선택한다.

다음의 (P_D)는 (P)와 동치인 문제이다.

$$(P_D)\quad \begin{array}{ll} \min & (c_D-c_BB^{-1}D)x_D \\ \text{s.t.} & B^{-1}Dx_D \leq B^{-1}b \\ & x_D \geq 0 \end{array}$$

(P_D)에서 내부해 d의 비기저부분인 d_D는 (P_D)의 제약식을 만족한다. 현재 기저가 최적기저가 아니라면 기저해의 비기저부분 $x_D=0$은 (P_D)의 제약식을 만족하지 않는다. 그래서, $B^{-1}Dx_D \leq B^{-1}b$의 부등식들 중 여유변수(현재 기저에 대한 (P)의 기저변수들)가 음의 값을 갖는 부등식들은 $x_D=0$와 d_D을 연결하는 선분과 모두 만난다. 즉 (P)에서 탈락가능 변수들은 (P_D)에서 $x_D=0$와 d_D을 연결하는 선분과 만나는 부등식들의 여유변수들이다.

PIDS는 d_D에서 $x_D=0$로 움직일 때 가장 먼저 만나는 부등식의 여유변수를 탈락변수로 선택한다. 이러한 기하학적인 탈락변수의 선택과정에서 (P)의 기저해를 x, 내부해를 d라 할 때 탈락변수는 $r=\arg\min\{d_i/(d_i-x_i) \mid x_i<0\}$일 때 x_r가 된다. 내부해 d는 이동할 수 있는 양$(d_r/(d_r-x_r))$의 일정비 $(0 \leq \alpha \leq 1)$만큼 $x-d$방향으로 이동한다. 비기저변수의 기저해 값이 0이므로 $x-d$방향은 비기저변수의 내부해값을 감소시키는 방향이다. 그리고 기저변수의 할인된 목적함수계수가 0이므로 $x-d$방향은 상보여유정리를 만족시키는 원가능점($\bar{c}d=\bar{c}_D\, d_D=0$)을 향한 방향이다. 그러나, 기저변수의 비음조건이 이 방향의 중간을 막고 있어 $d_r/(d_r-x_r)$만큼 만 이동할 수 있다.

물론, 내부해의 이동을 다른 내부점 선형계획기법(예를 들면, Karmarkar기법[16] 등)을 이용하여도 PIDS의 수행은 가능하나 선회연산 외의 계산양이 많아진다는 단점이 있다.

PIDS의 탈락변수 선택과정과 내부해의 이동을 그림으로 보면 다음과 같다.

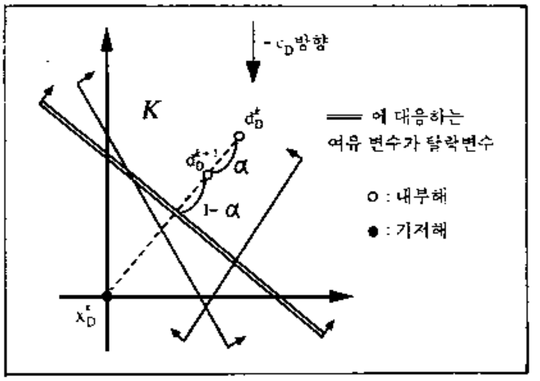

그림 1. 탈락변수 선택과 내부해의 이동

(1) 계산절차

(내부점 쌍대단체법 : PIDS)
초기화 : B_0-초기 쌍대가능기저, d^0-원가능 내부해, $k=0$
계산단계 횟수 k :

단계 1 : (최적 판정)

$x^k=(x_B^k, x_D^k)$, $x_B^k=B_k^{-1}b$, $x_D^k=0$

$x^k \geq 0$이면 x^k를 최적해로 하여 기법 종료 아니면 단계 2로

단계 2 : (내부해를 이용한 탈락변수 결정)

$r=\arg\min\{\lambda_i=d_i^k/(d_i^k-x_i^k) \mid x_i^k<0\}$
$\lambda^k=\lambda_r$
x_r은 탈락변수
(탈락변수 선택시 최소비율이 여러 변수에서 발생하면 $r=\arg\min\{x_i \mid x_i$: 탈락가능 최소비율 변수$\}$로 결정하고 여기서도 2개 이상의 변수가 같은 값을 갖는다면 첨수(index)가 제일 작은 변수를 선택한다.)

단계 3 : (진입변수 결정)

$s=\arg\min\{-\bar{c}_j/\bar{a}_{rj} \mid \bar{a}_{rj}<0\}$

x_s는 진입변수
(진입변수 선택시 최소비율이 여러 변수에서 발생하면 다음과 같이 변수를 선택한다.
$s=\arg\max\{d_j^k \mid x_j$: 진입 가능 최소 비율 변수$\}$ 만약 여기서도 2개 이상의 변수가 최대 내부해값을 갖는다면 첨수(index)가 제일 작은 변수를 선택한다.)

단계 4 : (기저수정 및 내부해의 개선)

$d^{k+1}=d^k+\alpha\lambda^k(x^k-d^k)$, $(0 \leq \alpha \leq 1)$

기저의 변환에 따른 선회연산
$k \leftarrow k+1$
단계 1로

기법의 수행을 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.

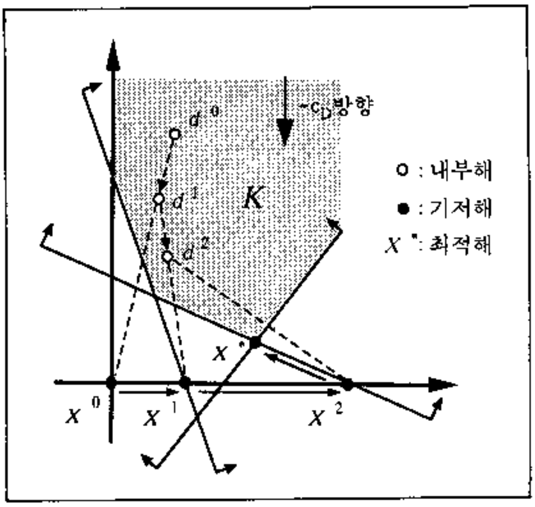

그림 2. PIDS의 수행과정

내부점 쌍대단체법의 개념을 사용하면 쌍대내부해를 이용해 진입변수를 선택하는 내부점 원단체법(Dual Interior Primal Simplex Method)도 쉽게 만들 수 있다. Tamura 등이 위의 제목으로 발표한 논문[23]이 있으나, 그들의 해법은 쌍대해의 개선에 독자적인 내부해 기법을 수행하고, 원단체법은 쌍대 내부해로부터 만들어지는 부문제를 푸는데 사용하는 형태로 본 논문과는 큰 차이점이 있다.

PIDS의 탈락변수 선택방법의 특성은 다음 정리에 있다.

정리 1) PIDS의 탈락변수 선택방법은 내부가능해에 대한 평면변환(Affine transformation)후의 최대경사법과 동일하다.

증명)
$r=\arg\min\{\ d_i^k/(d_i^k-x_i^k) \mid x_i^k<0\}$
$=\arg\min\{(1-(x_i^k/d_i^k))^{-1} \mid x_i^k<0\}$
$=\arg\min\{x_i^k/d_i^k \mid x_i^k<0\}$ ■

이 정리에 의해 $d^k=e=(1, \cdots, 1)^t$이면 PIDS의 탈락변수 선택방법은 최대경사법과 동일하다.

PIDS의 탈락변수 선택방법에 의해, 다음 정리들과 같은 문제축소 효과를 얻을 수 있다.

정리 2) (P_D)에서 강중복 제약식의 여유변

수는 기저변수로 진입한 후에 탈락하지 않는다.?!

증명)

$\lambda^k=\min\{\lambda_i=d_i^k/(d_i^k-x_i^k)\mid x_i^k<0\}$라 하자. 모든 k에 대해 $x(\lambda)=d^k+\lambda(x^k-d^k)$, $(0\le\lambda\le\lambda^k)$는 원가능해이다. 또한, x_r을 탈락변수라 하면 $x(\lambda^k)_r=0$이다. 그런데, x_i를 강중복 제약식의 여유변수라 하면 모든 원가능해에 대하여 양의 값을 갖는다. 따라서, 강중복 제약식의 여유변수는 탈락하지 않는다. ■

정리 3) $K=\{x\mid Ax=b,\ x\ge 0\}$, $K_i=\{x\mid Ax=b, x_i=0, x\ge 0\}$라 하면 $cd^k\le cx^*(K_i)=\min\{cx\mid x\in K_i\}$일 때 변수 x_i는 기저변수로 진입한 후에 탈락하지 않는다.

증명)

x_i가 탈락한다고 가정하자. $x(\lambda)=d^k+\lambda(x^k-d^k)$, $(0<\lambda\le\lambda^k)$로 놓으면 x_i가 탈락변수일 때, $x(\lambda^k)_i=0$이다. 즉, $x(\lambda^k)\in K_i$이다. $cd^k>cx(\lambda^k)\ge cx^*(K_i)$이므로 가정에 모순된다. ■

이 정리들을 기하학적으로 나타내면 다음 그림과 같다.

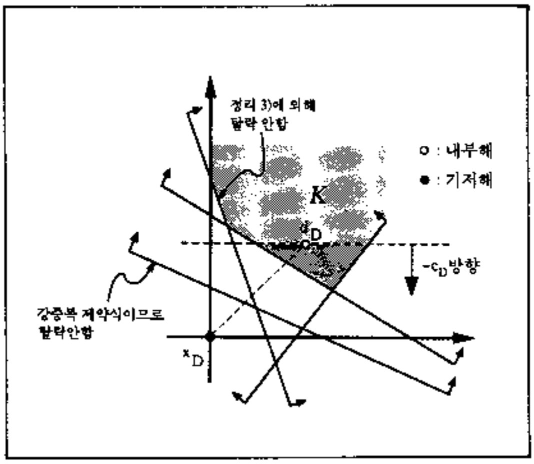

그림 3. 내부해에 의한 문제 축소효과

4. 쌍대 비퇴화 변환

본 절에서는 퇴화현상이 심한 Karmarkar표준형 문제를 사용한다.

$$
\begin{array}{lll}
 & \min & x_{n+1} \\
(SP) & \text{s.t.} & Ax+(-Ae)x_{n+1}=0 \\
 & & e_n^t x \quad +x_{n+1}=n+1 \\
 & & x,\ x_{n+1} \quad \ge 0
\end{array}
$$

(SP)는 (FP) $Ax=0$, $x\ne 0$, $x\ge 0$의 해를 찾는 문제와 동치이다.

위의 (SP)는 인공변수 x_{n+1}가 비기저변수인 모든 기저에 대하여 $c_B=0$이므로 평가벡터 $\pi=c_BB^{-1}$는 0이고, $\bar{c}=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$이므로 (SP)는 쌍대퇴화가 가장 심한 형태의 문제이다. 그래서, (SP)의 특별한 문제구조(선형공간과 n차원 단체(Simplex)의 교집합)를 활용하여 초기기저에 의한 목적함수의 할인가가 비기저변수에 대해 0보다 큰 문제로 변환시킬 수 있다. 비기저변수에 대한 목적함수의 할인가가 0보다 크기 위해서는 x_{n+1}이 기저변수이어야 한다.

(SP)의 A를 가역인 부분행렬(submatrix) B에 대해 열을 적당히 교환하여 $B^{-1}A=[I:D]$이 되게 할 수 있다. 그리고 D를 각 열의 원소들의 합이 양수, 0, 음수인 열들로 다시 정렬하여 $D=[P:Z:N]$, $(e_m{}^tP>0,\ e_m{}^tZ=0,\ e_m{}^tN<0)$로 쓰자. (각 index set을 P, Z, N, $|P|=p$, $|Z|=q$, $|N|=r$이라 하자)

$Ax=0$와 $B^{-1}Ax=[I:D]x=0$는 동치이다. 그래서, 앞으로는 A를 $[I:D]$로 가정하자. $e_m{}^tD>0$이면 (즉, Z와 N이 공집합일 때) 비가해이므로 Z, N은 공집합이 아니라고 가정하자. 각 변수 x_j에 대해 $f_j(f_j>0)$라는 Scaling factor를 생각하고, $F=\text{diag}(f_j)$인 $n\times n$대각행렬이라 하자. $A'=AF$로 놓으면 (SP)는 다음의 (SP')로 변환된다.

$$
\begin{array}{lll}
 & \min & x_{n+1} \\
(SP') & \text{s.t.} & A\acute{x}+(-A\acute{e})x_{n+1}=0 \\
 & & e_n{}^t x \quad +x_{n+1} \quad =n+1 \\
 & & x,\ x_{n+1} \quad \ge 0
\end{array}
$$

편의상 $\{x_1,\ \cdots,\ x_m,\ x_{n+1}\}$을 초기 기저변수로 놓자.

다음 표는 I에 관한 부분행간소 사다리꼴이

다.

I	$f_jP_{\cdot j}$	$f_jZ_{\cdot j}$	$f_jN_{\cdot j}$	η	$=0$
0	$1-f_je_m{}^tP_{\cdot j}$	e_q^t	$1-f_je_m{}^tN_{\cdot j}$	γ	$=n+1$

(단, $\eta=-(e_m+\sum_{j\in P}f_jP_{\cdot j}+\sum_{j\in Z}f_jZ_{\cdot j}+\sum_{j\in N}f_jN_{\cdot j})$,

$\gamma=1+m+\sum_{j\in P}f_je_m{}^tP_{\cdot j}+\sum_{j\in N}f_je_m{}^tN_{\cdot j}$이다)

초기기저에 대한 목적함수의 할인가를 구하면 $\bar{c}=(0, \cdots, 0, -(1-f_j e_m{}^tP_{\cdot j})/\gamma, -e_q^t/\gamma, -(1-f_j e_m{}^tN_{\cdot j})/\gamma, 0)$가 된다.

위의 내용을 요약하면 다음 정리를 얻는다.

정리 4) 아래의 조건 i), ii)를 만족하는 (f_j)에 의해 변환된 (SP)에서 기저변수 $\{x_1, \cdots, x_m, x_{n+1}\}$에 대응하는 기저는 쌍대가능 비퇴화이다.

i) $0<f_j<1/e_m{}^tP_{\cdot j}$, $\forall\ j\in P$

ii) $\gamma<0$

본 논문에서는 전산실험에 위 정리를 만족시키는 Scaling factor $\beta_1=f_j(\forall\ j\in P)$, $\beta_2=f_j(\forall\ j\in Z)$, $\beta_3=f_j(\forall\ j\in N)$를 아래와 같이 사용하였다.

i) $0<\beta_1<\min\{1/e_m{}^tP_{\cdot j} \mid j\in P\}$

ii) $0<\beta_2<\max\{\mid Z_{ij}\mid \mid i=1,\cdots,m\ j\in Z\}$

iii) $0<\beta_3<(2+m+\beta_1\sum_{j\in P}e_m{}^tP_{\cdot j}/-\sum_{j\in N}e_m{}^tN_{\cdot j})$

위 정리에 의해 x_{n+1}이 기저변수이고 비퇴화인 상태에서 기법을 적용할 수 있다. 만약 기법 수행중에 x_{n+1}이 기저에서 탈락한다면 내부해의 마지막 원소인 d_{n+1}을 0으로 만들 수 있어, $(d_1, \cdots, d_n)$이 (FP)의 해가 된다. 따라서, PIDS의 종료조건으로 사용할 수 있다.

(SP)는 모든 변수의 합이 일정하다는 마지막 제약식과 특수한 형태의 목적함수를 가지고 있기 때문에 정리 4)를 적용할 수 있다. 그러나, (SP)외의 일반적인 선형계획문제에 정리 4)를 적용하기는 어렵다. 다음의 정리 5)가 이 사실을 설명한다.

정리 5) 선형계획문제에서 행과 열에 대한 Scaling으로는 쌍대단체법에서 주어진 기저의 쌍대퇴화 또는 쌍대비가능 상태를 바꿀 수 없다.

증명)

선형계획문제 (P)와 쌍대퇴화기저 B가 주어졌을 때, 행에 대한 Scaling factor를 $g_i(g_i>0)$라 하고, 열에 대한 Sclaing factor를 $f_j(f_j>0)$라 하자.

$$\begin{array}{llll} & \min cx & & \min\ cFx \\ (P) & \text{s.t. } Ax=b & \overset{\text{scaling}}{\Rightarrow}\ (P_s) & \text{s.t. } GAFx=Gb \\ & x\geq 0 & & x\geq 0 \end{array}$$

로 변환된다. 열을 교환하여 $A=[B:D]$로 나타내자. (P)에서 B에 대한 비기저변수의 할인가는 $c_DF_D-(c_BB^{-1}G^{-1})(GDF_D)=(c_D-c_BB^{-1}D)F_D$인데, F_D가 양의 대각행렬이므로 (P)의 할인가와 부호가 같다. 따라서, 기저의 쌍대퇴화나 비가능 상태가 바뀌지 않는다. ■

5. 전산 실험

전산 실험은 m×k행렬 Q를 난수로 생성하여 다음과 같은 형태의 가해문제(Feasibility Problem)를 사용하였다.

$$\begin{array}{ll} \min & x_{m+k+1} \\ \text{s.t.} & x_B + Qx_D+(-e-Qe)\,x_{m+k+1}=0 \\ & e_m{}^tx_B+e_k{}^tx_D+\quad x_{m+k+1}=m+k+1 \\ & x_B,\ x_D,\quad x_{m+k+1}\geq 0 \end{array}$$

본 장의 실험 결과는 m=k=50인 문제 100개를 대상으로 한 것이다. 다른 크기의 행렬에서도 유사한 결과를 보여주었다.

1) PIDS와 쌍대단체법의 비교

표1, 2는 비퇴화 변환(Scaling)을 하지 않은 경우와 한 경우에 대한 PIDS와 쌍대단체법의 비교실험 결과이다. 비퇴화 변환을 한 경우에는 인공변수 x_{n+1}을 초기기저에 포함시켰다.

표에서 초기상태 유지변수는 초기에 기저(또

는 비기저)변수이면서 기법의 종결시까지 계속 기저(또는 비기저)에 머물러 있는 변수를 의미한다.

쌍대단체법의 경우, 계산단계가 501회가 넘으면 중단하고 501을 계산단계 횟수로 계산하였다. 따라서 표의 쌍대단체법 평균값은 실제값보다 적다. 실제값보다 적은 값들에는 +표시를 하였다.

표 1. 비퇴화 변환 전의 PIDS와 쌍대단체법과의 비교

		PIDSα=1	PIDSα=0.5	쌍대 단체법
계산단계 횟수	평균	200.89	144.98	356.45+
	최소	42	52	70
	최대	399	239	501(중단)
평균탈락변수 갯수		79.10	71.85	56.56+
평균 재탈락변수 갯수		40.19	28.92	43.24+
초기상태 유지변수		8.08	9.81	18.63

표 2. 비퇴화 변환 후의 PIDS와 쌍대단체법과의 비교

		PIDSα=1	PIDSα=0.5	쌍대 단체법
계산단계 횟수	평균	41.79	38.95	122.99+
	최소	23	22	27
	최대	64	66	501(중단)
평균탈락변수 갯수		30.39	30.27	46.27+
평균 재탈락변수 갯수		7.84	6.29	17.88+
초기상태 유지변수		51.10	50.95	38.55

표1, 2에서 α의 값이나 비퇴화 변환 여부에 상관없이 PIDS의 계산효율성이 쌍대단체법에 비해 우수함을 알 수 있으며, 이 이유는 다음과 같이 고찰할 수 있다.

첫째, PIDS의 문제축소 효과이다. 기저변수 진입 후 재탈락하는 변수의 갯수가 쌍대단체법에 비해 PIDS가 적다. PIDS에 있어서 내부해는 최적 기저변수(즉, 최적해에 대한 강중복제약식의 여유변수)를 진입시키고, 재탈락되지 않게 하는 역할을 하고 있다고 볼 수 있다.

둘째, 이론적으로 증명되지는 않았으나 PIDS의 기저정체 현상의 방지효과이다. 실험에서 쌍대단체법이 기저정체 심지어 기저순환 현상을 보이는 것을 자주 볼 수 있었다. 그러나 PIDS는 내부해가 계속 변화되므로 인해 기저의 정체가 방지되는 섭동의 효과를 갖고 있는 것으로 고찰된다.

표3은 계수행렬의 비퇴화 변환 후에 인공변수 x_{n+1}을 초기기저에 넣은 경우와 아닌 경우에 대한 실험결과의 비교이다.

표 3. x_{n+1}의 초기기저 참여여부에 따른 비교

		PIDSα=1	PIDSα=0.5	쌍대단체법
비퇴화 변환 후	x_{n+1}기저변수	41.79	38.95	122.99+
	x_{n+1}비기저변수	152.84	143.26	491.49+
비퇴화 변환 전	x_{n+1}비기저변수	200.89	144.98	356.45+

표3의 결과는 Scaling을 통한 비퇴화 초기기저를 취하는 경우의 매우 작은 계산단계 횟수를 갖는 이유가 계수행렬에 대한 Scaling때문이라기 보다는 쌍대 비퇴화 선회연산에 주요한 요인이 있는 것으로 생각 된다.

6. 결 론

본 논문에서는 원가능 내부해를 이용하여 탈락변수를 선택하는 내부점 쌍대단체법을 제시하였다. 전산 실험에 의하면 내부점 쌍대단체법은 최대경사법을 사용하는 기존의 쌍대단체법보다 효율적이다. 이는 내부점이 쌍대가능 기저해에 의해 개선되면서 진입 탈락변수 선택의 변화 및 문제축소 효과를 주기 때문이라고 생각된다.

또한 기존의 내부점 방식 해법과의 병행을 통해 문제크기에 종속적인 종결조건을 강화시킬 수 있다.

본 연구과정에서 단체법의 선회연산 구조를 유지하며 강성 다항식의 복잡도를 갖는 선형계획 해법이 존재한다면, 다음에 제시하는 문제가 먼저 해결되어야 할 것으로 생각된다.

최적 기저해 x^*와 초기 쌍대가능 기저 B_0를 알고 있는 선형계획문제가 있다면 다음과 같은

단체표를 얻을 수 있다.

최적해 :	$x^*_j>0$	$x^*_j>0$	
계수행렬 :	B_0	D_0	$=b$
목적함수 :	0	$\bar{c}_D\geq 0$	$=z_0$

이때 ① B_l는 쌍대가능 기저

② B_l, B_{l+1}이 인접기저(adjacent bases)

③ $z_l=c_{Bl}B_l^{-1}b\leq c_{Bl+1}B_{l+1}^{-1}b=z_{l+1}$

④ $B_l^{-1}b\ngeq 0$, for $l<k$이고 $B_k^{-1}b\geq 0$를 만족하는

$\{B_0, B_1, \cdots, B_k\}$를 찾는 문제를 고려하자.

단체법의 선회연산 구조를 유지하며 강성 다항식의 복잡도를 갖는 선형계획 해법이 존재한다면, 당연히 위 문제도 강성 다항시간 내에 해결할 수 있다. 즉, k가 m, n의 다항식으로 상한을 갖는 것이다.

아직까지는 원 가능해의 도움을 받아 탈락변수를 선택하는 PIDS의 경우에도 위 문제가 강성 다항식 시간 안에 해결될 수 있는지 여부는 모르는 상태이다. 하지만 일반 선형계획문제에 비해 최적기저해라는 중요한 정보를 가지고 있는 위 문제의 강성 다항식 복잡도 해법의 존재 여부에 대한 연구가 선행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. Ahuja, R.K., Magnanti, T.L., and Orlin, J. B., *Network Flows*, Prentice Hall, 1993.
2. Ahuja, R.K., and Orlin, J.B., "The scaling network simplex algorithm", *Operations Research*, Vol.40, Supplement 1, S5-S13, 1992.
3. Balinski, M.L., "A competetive(dual) simplex method for the assignment problem", *Mathematical Programming*, Vol.34, PP 125−141, 1986.
4. Bellman, R., "On a routing problem", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 16, PP 87−90, 1958.
5. Bertsekas, D.P., and Mitter, S.K., "A descent numerical method for optimization problems with non-differentiable cost functionals", *SIAM J. Control*, Vol.11, PP 637−652, 1973.
6. Cunningham, W.H., "Theoretical properties of the network simplex method", *Mathematics of Operations Research*, Vol. 4, PP 196−208, 1979.
7. Dijkstra, E., "A note on two problems in *connexion* with graphs", *Numeriche Mathematik*, Vol.1, PP 269−271, 1959.
8. Dinic, E.A., "Algorithm for solution of a problem of maximum flow in networks with power estimation", *Soviet Mathematics Doklady*, Vol.11, PP 1277−1280, 1970.
9. Edmonds, J., and Karp, R.M., "Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems", *Journal of ACM*, Vol.19, PP 248−264, 1972.
10. Goldberg, A.V., Grigoriadis, M.D., and Tarjan, R.E., "Efficiency of the network simplex algorithm for the maximum flow algorithm", *Technical Report, Department of Computer Science, Stanford University*, Stanford, CA., 1988.
11. Goldberg, A.V. and Tarjan, R.E., "Finding minimum-cost circulations by canceling negative cycles", *J. Assoc. Comput. Mach* Vol.36, PP 873−886, 1989.
12. Goldfarb, D., and Hao, J., "Polynomial simplex algorithms for the minimum cost network flow problem", *Technical Report, Department of I.E. and O.R., Columbia Univ.*, New York, 1988.
13. Goldfarb, D., and Hao, J., "A primal simplex algorithm that solves the maiximum flow problem in at most *nm* pivots and $O(n^2m)$ time", *Mathematical Programming*, Vol.47, PP 353−365,

1990.

14. Goldfarb, D., Hao, J., and Kai, S., "Efficient shortest path simplex algorithms", *Operations Research*, Vol.38, PP 624－628, 1990.
15. Hung, M.S., "A polynomial simplex method for the assignment problem", *Operations Research*, Vol.31, PP 595－601, 1983.
16. Karmarkar, N., "A new polynomial time algorithm for linear programming", *Combinatorica*, Vol.4, PP 373－395, 1984.
17. Karzanov, A.V., "Determining the maximal flow in a network by the method of preflows", *Soviet Mathematics Doklady*, Vol.15, PP 434－437, 1974.
18. Khachiyan, L.G., "A Polynomial algorithm in linear programming", *Soviet Mathematics Doklady*, Vol.20. PP 191－194, 1979.
19. Orlin, J.B., "Genuinely polynomial simplex and non-simplex algorithms for the minimum cost flow problem", *Technical Report 1615－84, Sloan School of Management, MIT*, Cambridge, MA., 1984.
20. Orlin, J.B., "On the simplex algorithm for networks and generalized networks", *Mathematical Programming Study*, Vol.24, PP 166－178, 1985.
21. Orlin, J.B., "A faster strongly polynomial minimum cost algorithm", *Proceedings of the 20th ACM Symposium on the Thery of Computing*, PP 377－387, 1988.
22. Plotkin, S., and Tardos, É., "Improved dual network simplex", *Proceedings of the first ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, PP 367－376, 1990.
23. Tamura, A., Takehara, H., Fukuda, K., Fujishige, S., and Kojima, M., "A dual interior primal simplex method for linear programming", *J. of OR Society of Japan*, Vol.31, No.3, PP 413－429, 1988.
24. Tardos, É., "A strongly polynomial minimum cost circulation algorithm", *Combinatorica*, Vol.5, PP 247－255, 1985.
25. Tardos, E., "A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs", *Operations Research*, Vol.34, PP 250－256, 1986.
26. Tarjan, R.E., "Efficiency of the primal network simplex algorithm for the minimum-cost circulation problem", *Mathematics of Operations Research*, Vol.16, PP 272－291, 1991.