

다공질매체내의 유체유동 특성에 관한 연구

A Study on the Liquid Flow Characteristics in Layer Porous Media

이 충 구*, 황 춘 복**
C. G. Lee, C. B. Hwang

Key words: Porous Media(다공질 매체), Groundwater(지하수), Aquifer(대수층), Permeability Coefficient(투수 계수), Liquid Flow(유체유동)

Abstract

In this research, unsteady groundwater flow in unconfined and homogeneous three layer aquifers is studied theoretically and experimentally.

Numerical solutions are obtained by Runge Kutta and Runge Kutta Gill method after transforming the governing nonlinear partial differential equations to nonlinear ordinary differential equations. Experimental apparatus includes a test section filled with fine, medium and coarse sands.

Experimental results are compared with the numerical solutions and both experimental and numerical results correspond well with each other.

This numerical approach may be also applied to the cases which have more aquifers.

기 호 설 명

- f : h/h_i 로 정의된 무차원 변수
- h : 수두(cm)
- k : 투수계수(cm/sec)
- L : 실험장치의 총 길이(cm)
- n : 유효공극율
- Q : 대수층 내의 단위폭 당 유량(cm^2/sec)
- $S_{(t)}$: 하층 대수층의 높이와 같아지는 수두의 위치(cm)
- t : 시간(sec)
- V : 다공질매체내의 유체유동 속도(cm/sec)
- V_g : 포화대로부터 중력에 의해 배수되어 토출해 낼 수 있는 수량(cm^3)
- V_0 : 다공질매체의 포화대 전 체적(cm^3)
- x : 수평거리(cm)
- z : 수직거리(cm)
- α : 무차원 상수

- β : 무차원 상수
- γ : 무차원 상수
- η : 무차원 상수

하첨자

- i : 초기조건
- b : 하층 대수층(잔모래)
- m : 중간층 대수층(중간모래)
- u : 상층 대수층(굵은모래)
- L : $x=L$ 일 때의 조건
- 0 : $x=0$ 일 때의 조건
- 1 : 수두가 하층 대수층내에 있을 경우
- 2 : 수두가 중간층 대수층내에 있을 경우
- 3 : 수두가 상층 대수층내에 있을 경우

1. 서 론

*정회원, 충북대학교 기계공학과
**청주기계공고 기계과

층내의 지하수 유동과 유전에서의 원유 유동, 다공질매체내의 기체유동⁽¹⁾ 등에서 유사하게 나타난다.

열전도 방정식과 지하수 유동방정식은 이론적으로 차이가 없으며 지하수 유동의 실험은 열전도계수가 변하는 열전도 문제, 다공질매체내의 기체유동 등의 이론적인 해석 방법에 응용할 수 있다.

균질대수층을 가정한 대부분의 지하수 유동 연구^(2,3,4)는 그 해나 실험 결과가 많이 알려져 있다. 그러나 대수층이 서로 다른 성질을 가진 경우에 대하여는 이론적으로는 Cho⁽⁵⁾에 의하여 다루어 졌으나 실험 결과와는 비교되지 않았다.

본 연구는 서로 다른 성질을 가진 세 개의 층으로 된 비피압대수층 내에서의 물의 비정상 흐름에 대한 이론 및 실험에 의한 연구이다.

비피압대수층내에서의 지하수의 정상유동은 수학적으로 선형이므로 취급이 비교적 간단하나 비피압대수층내의 지하수의 비정상유동은 수학적으로 비선형이므로 정해를 구하기가 어렵다.

이 논문에서는 비선형편미분방정식을 비선형상미분방정식으로 변환^(6,7)시킨 후 Runge Kutta와 Runge Kutta Gill 법⁽⁸⁾에 의하여 이론해를 구한 값과 모래를 사용한 다층 다공질 매체내의 유동실험 결과와 비교 분석하였다.

2. 이 론

2.1 기본방정식

다공질매체내의 유체의 수평방향의 유동속도는 Darcy⁽²⁾의 법칙에 의하여

$$V = -k \frac{\partial h}{\partial x} \tag{1}$$

이다.

식(1)에서 k 는 대수층의 투수계수(cm/sec)이며 h 는 위치 x 와 시간 t 일때 불침투성수평대에서 물 표면까지의 높이이며 $-$ 부호는 유체유동방향이 수두가 감소하는 방향과 일치함을 의미한다.

비피압대수층내에서의 단위폭을 통과한 총유량은 식(1)에서

$$Q = -\frac{\partial h}{\partial x} \int_0^h k(z) dz \tag{2}$$

이다.

가정 (가)에서 $k(z)$ 는 일정하므로 식(2)를 적분하면

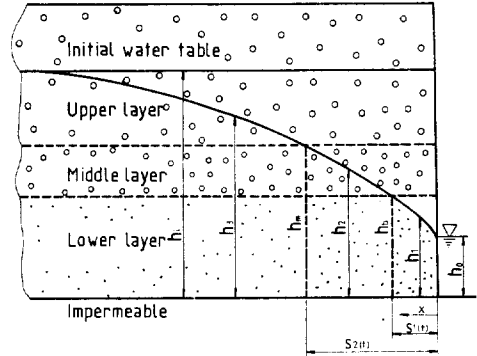


Fig. 1 Groundwater flow in a 3-layer aquifer

$$Q = -kh \frac{\partial h}{\partial x} \tag{3}$$

을 얻는다.

Fig. 1과 같이 세 개의 다공질층으로 된 비피압대수층내에서의 비정상유동에 대하여 다음과 같이 가정을 한다.

(가) 다공질 매질이 균질이며 대수층은 무한히 넓다.

(나) 대수층은 불침투성의 수평대 위에 있다.

(다) 유속의 수직방향은 무시하며 각 층의 매체내의 투수계수(k)와 유효공극률(n)은 일정하다.

(라) 대수층에서 나온 물은 즉시 저수지로 흘러 들어가며 저수지의 수위는 일정하다.

대수층내에서는 물의 질량보존에 의하여

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = n \frac{\partial h}{\partial t} \tag{4}$$

n 은 유효공극률로서 상층, 중간층, 하층에 대하여 아래첨자 u, m, b 를 붙였다.

세 개의 층(잔모래, 중간 모래, 굵은 모래)에 대하여 식(3)을 식(4)에 대입하고 정리하면(Fig. 1 참조)

$0 < x < S_1(t), t > 0$ 일 때(하층의 경우)

$$k_b \frac{\partial}{\partial x} (h_1 \frac{\partial h}{\partial x}) = n_b \frac{\partial h_1}{\partial t} \tag{5}$$

이며

$S_1(t) < x < S_2(t), t > 0$ 일 때(중간층의 경우)

$$\frac{\partial}{\partial x} [(k_b - k_m) h_b + k_m h_2] \frac{\partial h_2}{\partial x} = n_m \frac{\partial h_2}{\partial t} \tag{6}$$

이다.

$S_{2(t)} < x, t > 0$ 일 때 (상층의 경우)

$$\frac{\partial}{\partial x} [(k_b - k_m) h_b + (k_m - k_u) h_m + k_u h_3] \frac{\partial h_3}{\partial x} = n_u \frac{\partial h_3}{\partial t} \quad (7)$$

가 된다.

초기조건과 경계조건은

$$t=0, x > 0 \text{일 때 } h_3 = h_i \quad (8)$$

$$x=0, t > 0 \text{일 때 } h_1 = h_0 \quad (9)$$

$$x=\infty, t > 0 \text{일 때 } h_3 = h_i \quad (10)$$

$$x = S_{1(t)}, t > 0 \text{일 때 } h_1 = h_2 = h_b \quad (11)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial x} \quad (12)$$

$$x = S_{2(t)}, t > 0 \text{일 때 } h_2 = h_3 = h_m \quad (13)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial h_3}{\partial x} \quad (14)$$

여기서

$S_{1(t)}$ 는 $h_1 = h_2 = h_b$ 인 지점이고

$S_{2(t)}$ 는 $h_2 = h_3 = h_m$ 인 지점이다.

2.2 상미분방정식에서의 변환

편미분방정식을 상미분방정식으로 변환하기 위하여 다음과 같이 무차원수를 정의한다.

$$f = \frac{h}{h_i}, f_0 = \frac{h_0}{h_i}, f_b = \frac{h_b}{h_i}, f_m = \frac{h_m}{h_i} \quad (15)$$

$$\eta = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{n_b}{k_b h_i t}} \quad (16)$$

그리고

$$h(x, t) = h(\eta) \quad (17)$$

$$S_{(t)} = 2\lambda \sqrt{h_i k_b t / n_b} \quad (18)$$

로 가정한다. 여기서 λ 는 상수이다.

$$\text{또, } \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1 \quad (19)$$

$$\alpha_2 = \frac{(k_b - k_m)}{k_m} f_b, \beta_2 = \frac{k_b n_m}{k_m n_b} \quad (20)$$

$$\alpha_3 = \frac{(k_b - k_m) f_b + (k_m - k_u) f_m}{k_u}, \beta_3 = \frac{k_b n_u}{k_u n_b} \quad (21)$$

편미분방정식 (5) ~ (7)을 상미분방정식으로 변환하면

$f_0 < f_1 < f_b, 0 < \eta < \lambda_1$ 일 때 (하층의 경우)

$$\frac{d}{d\eta} (f_1 \frac{df_1}{d\eta}) + 2\eta \frac{df_1}{d\eta} = 0 \quad (22)$$

$f_b < f_2 < f_m, \lambda_1 < \eta < \lambda_2$ 일 때 (중간층의 경우)

$$\frac{d}{d\eta} \{ (f_2 + \alpha_2) \frac{df_2}{d\eta} \} + 2\eta \beta_2 \frac{df_2}{d\eta} = 0 \quad (23)$$

$f_m < f_3 < 1, \eta > \lambda_2$ 일 때 (상층의 경우)

$$\frac{d}{d\eta} \{ (f_3 + \alpha_3) \frac{df_3}{d\eta} \} + 2\eta \beta_3 \frac{df_3}{d\eta} = 0 \quad (24)$$

$$\lambda_1 = \frac{S_{1(t)}}{2\sqrt{k_b h_i t / n_b}} \quad (25)$$

$$\lambda_2 = \frac{S_{2(t)}}{2\sqrt{k_b h_i t / n_b}} \quad (26)$$

로 정의되는 상수이며 경계 조건은 다음과 같이 변환된다.

$$\eta \rightarrow \infty \text{일 때 } f_3 = 1 \quad (27)$$

$$\eta = 0 \text{일 때 } f_1 = f_0 \quad (28)$$

$$\eta = \lambda_1 \text{일 때 } f_1 = f_2 = f_b \quad (29)$$

$$\frac{df_1}{d\eta} = \frac{df_2}{d\eta} \quad (30)$$

$$\eta = \lambda_2 \text{일 때 } f_2 = f_3 = f_m \quad (31)$$

$$\frac{df_2}{d\eta} = \frac{df_3}{d\eta} \quad (32)$$

식 (22) ~ (32)는 다음과 같이 일반식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d}{d\eta} \{ (f_j + \alpha_j) \frac{df_j}{d\eta} \} + 2\beta_j \eta \frac{df_j}{d\eta} = 0, \quad j=1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

위에서 j 는 층 수를 나타내며 식 (22) ~ (33)은 Runge Kutta와 Runge Kutta Gill 법에 의하여 수치적인 해를 구하고 그 결과를 Fig. 3~5에 점선으로 나타냈다.

3. 실험

3.1 실험 장치

본 실험에 사용된 장치들은 Fig. 2와 같으며 main experimental equipment는 길이 182.6 cm ($L = 138.4$ cm), 폭 30.3 cm, 높이 45.6 cm, 두께가 0.5 cm인 철판과 유리로 수조를 만들고 수조의 우측단에서 21.7 cm, 좌측단에서 22.5 cm의 위치에 모래가 나가지 못하도록 60 mesh의 stainless filter를 끼웠으며 유출구(우측)에는 직경 5.08 cm의 sluice valve를 부착하였다. 특히 유리는 전면에 끼워 내부 각 층의 대수층과 물의 유동상태를 관찰할 수 있도록 하였다.

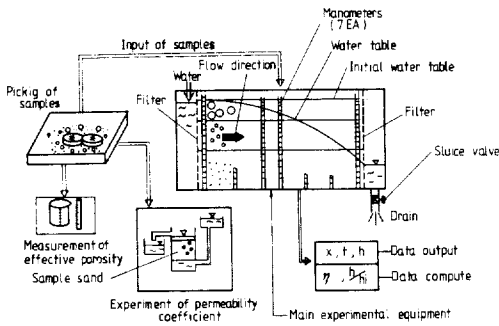


Fig. 2 Experimental flow diagram

manometer는 내경이 0.7 cm로 일곱개를 설치하였으며 설치위치에 따른 수두의 영향을 줄이기 위하여 각 manometer의 설치위치를 불규칙하게 배열하였다. 각 manometer의 입구에는 모래가 나가지 못하면서 물이 정상적으로 유동할 수 있도록 60 mesh의 stainless filter를 끼웠다.

3.2 시 료

(가) 시료의 입도

실험에 사용된 시료는 세 가지 모래로서 잔모래는 16 mesh를 통과하고 20 mesh를 통과하지 못한 모래이며 중간모래는 10 mesh를 통과하고 16 mesh를 통과하지 못한 모래이며 굵은 모래는 6 mesh를 통과하고 10 mesh를 통과하지 못한 모래를 사용하였다.

(나) 유효공극율

유효공극율은 암석이나 토양의 포화대 전체적 V_0 에 대한 포화대로부터 증력배수에 의해서 토출해 낼 수 있는 수량 V_g 의 비율로서 그 식은 다음과 같이 표시된다.

$$n = \frac{V_g}{V_0} \times 100 \tag{34}$$

유효공극율의 값은 실험실에서 대수층의 대표시료를 포화시킨 후 배출시켜 보는 방법⁽⁹⁾에 의하여 구하였다.

잔모래, 중간모래, 굵은모래를 각각 1,600 cc의 비이커에 넣고 물을 같은 높이로 채운 다음 다른 비이커에 배수시키는 실험을 3회씩 실시하여 평균치를 얻었으며 그 값은, 잔모래 0.2449, 중간모래 0.3212, 굵은모래 0.3655이었다.

(다) 투수계수

대수층을 통하여 물이 유동할 수 있는 정도를 양

적으로 나타내는 것으로 정수위 투수실험⁽¹⁰⁾을 하여 다음 식에서 구하였다.

$$k = \frac{H}{h} \frac{Q}{A(t_2 - t_1)} \tag{35}$$

여기서, k : 온도 t 에 대한 투수계수 (cm/sec)

A : 시료의 단면적 (cm²)

H : 시료의 높이 (cm)

h : 수두 (cm)

t : 시간 (sec)

Q : ($t_2 - t_1$) 시간에 흐른 수량 (cm³)

잔모래, 중간모래, 굵은모래의 대표시료를 본 실험과 같은 방법으로 mould에 넣고 시료의 밑면에 작용하는 상류측 수위와 시료의 윗면에 작용하는 하류측 수위를 일정하게 유지시켜 시료를 통과하는 투수량 Q 를 측정하고 식(35)에 의해서 구했다. 실험은 각각 3회씩 실시하여 평균값을 구하였으며 그 값은 0.7759, 1.1559, 2.4701이었다.

3.3 실험 방법

실험장치를 수평으로 놓은 후 모래를 다음과 같이 세개의 층, 즉

(1) 전체높이 24 cm[하층(잔모래) 9 cm, 중간층(중간모래) 10 cm, 상층(굵은모래) 5 cm]

(2) 전체높이 29 cm[하층(잔모래) 9 cm, 중간층(중간모래) 10 cm, 상층(굵은모래) 10 cm]

(3) 전체높이 34 cm[하층(잔모래) 9 cm, 중간층(중간모래) 10 cm, 상층(굵은모래) 15 cm]

으로 넣고 수위가 24 cm, 29 cm, 34 cm로 되게한 후 sluice valve를 갑자기 전개하여 물의 유입쪽의 높이 h_i 가 내려가기 전까지의 각 manometer의 수위 (h) 변화를 2초 간격으로 각 3회씩 측정하여 평균치를 구하였다.

4. 결과 및 고찰

Fig. 3~5는 세 개의 층에 대한 실험 결과를 비선형편미분방정식 (5)~(7)을 각 층에 대하여 상미분방정식(22)~(24)으로 변형하여 Runge Kutta와 Runge Kutta Gill방법에 의해 구한 수치해와 비교한 것이다.

Fig. 3은 최초 수두(h_i)가 24 cm의 경우로서 최초수두가 높을 때 즉 식(16)의 무차원상수(η)가 클 때가 적은 경우보다 실험결과와 수치해가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

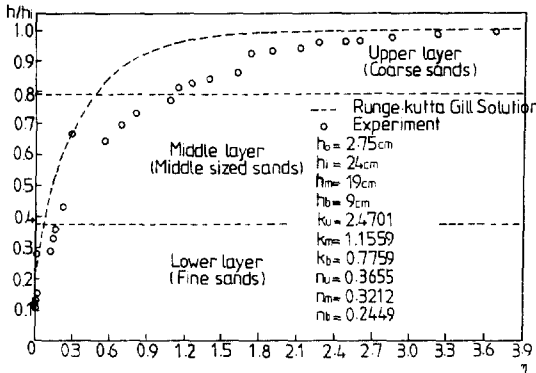


Fig. 3 Result of unsteady groundwater flow

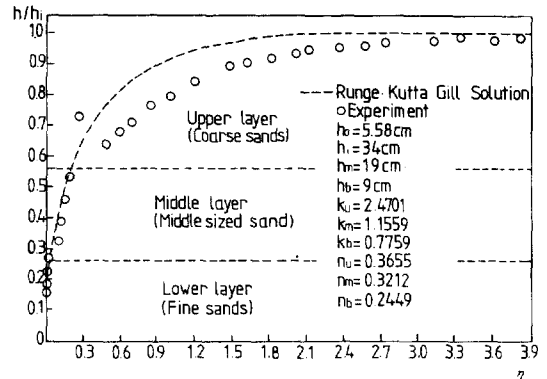


Fig. 5 Result of unsteady groundwater flow

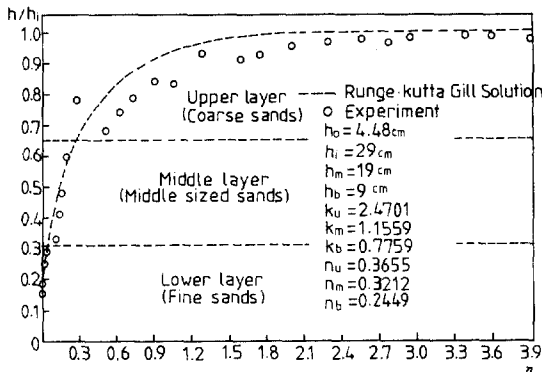


Fig. 4 Result of unsteady groundwater flow

Fig. 4에서는 최초 수두가 29 cm의 경우이며 최초 수두가 높을 때가 낮은 때보다 실험결과와 수치해가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 5는 최초 수두가 34 cm의 경우로서 역시 최초 수두가 높을 때가 낮은 때보다 실험결과와 수치해가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

수치해에 비하여 실험치는 다음과 같은 η 의 범위에서 상대오차를 백분율로 나타낼 수 있다.

즉 Fig. 3(h_i 가 24 cm의 경우)에서는 η 가 0.13일 때 37.11%, η 가 0.58일 때 22.44%, η 가 1.75일 때 6.86%, η 가 3.71일 때 0.09%이다.

또한 Fig. 4(h_i 가 29 cm의 경우)에서는 η 가 0.12일 때 28.61%, η 가 0.53일 때 15.33%, η 가 1.59일 때 7.56%, η 가 3.37일 때 1.99%이다.

Fig. 5(h_i 가 34 cm의 경우)에서는 η 가 0.11일 때 27.68%, η 가 0.49일 때 16.86%, η 가 1.47일 때 8.51%, η 가 3.11일 때 2.69%이다.

일반적으로 실험치가 이론해 보다 수두가 빨리

강하 하였으며 특히 η 가 클수록 이론치와 잘 일치하고 있다. 따라서 수두(h/h_i)를 η 만의 함수로 가정하고 계산한 결과와 잘 맞으므로 h 는 η 만의 함수임을 알 수 있다.

이론치와 실험치의 오차가 생기는 이유는 아래와 같이 사료된다.

(1) 대수층이 무한하다고 가정하였으나 실험장치의 길이가 유한($L=138.4$ cm)하므로 실험결과와 수두가 이론 결과치 보다 적게 나타나고 있다.

(2) x 가 0 또는 t 가 증가했을 때 경계조건이 잘 맞지 않으므로 η 가 작은 쪽에서 오차가 증가함을 알 수 있다.

(3) filter($x=0$) 근처에서 수두변화율이 큰 것은 filter의 저항에 원인이 있다.

(4) 공극율은 잔모래가 굵은 모래보다 크며 잔모래는 보유수율이 굵은 모래보다 매우 크다. 따라서 유효공극율은 굵은 모래가 잔모래보다 상대적으로 큰 것을 알 수 있다.

(5) 물의 수직 속도 성분은 무시하였으나, 특히 filter($x=0$) 근처에서는 무시할 수 없다.

5. 결 론

투수계수가 서로 다른 세 개의 층으로 된 다층 다공질매체내의 비정상유동에 대하여 이론 및 실험적인 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 수두(h/h_i)는 η 만의 함수이며 유속의 수직 성분은 무시할 수 있다.

(2) 실험치에 대한 이론치의 최대 상대오차를 백분율로 나타내면 Fig. 2에서 $h_i=24$ cm인 경우 37.11% Fig. 3에서 $h_i=29$ cm인 경우 28.61%

Fig. 4에서 $h_i=34$ cm인 경우 27.68%로 평균오차는 h_i 가 높은 곳에서 적음을 알 수 있다.

(3) 일반적으로 $\eta > 3.3$ 에서는 이론치와 실험값이 잘 일치한다.

(4) 편미분방정식을 상미분방정식으로 변환하여 그 해를 Runge Kutta와 Runge Kutta Gill법에 의하여 수치해를 구하는 것이 접근값이며 바람직한 방법이다.

(5) 본 논문에서는 세 개의 대수층단 연구되었으나, 세 개층 이상의 다층으로 이루어진 경우에도 같은 방법으로 해석할 수 있다.

후 기

본 연구는 1990년도 한국과학재단의 기초연구비 지원으로 이루어졌습니다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Kidder, R.E., 1957, "Unsteady flow of gas through a semi-infinite porous medium," J. of Appl. Mech, Trans. ASME, Vol. 24, pp. 329~332.
- (2) Yeh, W.G., 1970, "Nonsteady flow to Surface reservoir," J. Hydraulics Div., Proc. ASCE. 96, No. HY3, pp. 609~618.
- (3) Bear, J., Zaslavsky, D. and Irmay, S., 1968, "Physical of water percolation and seepage," UNESCO.
- (4) Lee, C.G., Seo, J.Y. and Cho, S.H., 1985, "A study of Liquid Flow in a Porous Medium," CANCAM '85.
- (5) Cho, S.H., 1972, "Unsteady Groundwater flow in a two-layer aquifer," 陸軍士官學校 論文集, Vol 10, pp. 286~301.
- (6) Moody, W.T., 1962, discussion of "Unsteady Flow of Groundwater into a Surface Reservoir," by William Haushled and Gordon Kruse, Transactions. ASCE, Vol. 127, Part I, pp. 417~421.
- (7) Boltzmann, L., 1984, "Zur Integration der Diffusions Gleichung bei Variablen Diffusions Coefficienten," Ann Physik Chemie(Leipzig), Vol. 53, pp. 959~964.
- (8) 오재웅, 1984, "Basic에 의한 수치해석·정보처리," 대우출판사, pp. 186~190.
- (9) 韓楨相, 1987, "地下水學概論," 傳英社, pp. 53~59.
- (10) 申芳雄, 千柄植, 1981, "土質實驗 및 調査," 도서출판 건설연구소 pp. 49~55.