産業技術硏究(江原大學校 産業技術硏究所 論文集) 第13輯 (1993)
Research Report, The Institute of Industrial Technology, Kangwon Nat'l Univ., Korea, Vol. 13, 1993

# 삼각핀에 대한 핀끝의 영향

강 형 석*

# The Effect of Fin Tip on the Triangular Fin

**Hyung-Suk Kang***

## ABSTRACT

Two dimensional analysis on the triangular fin for both the insulated fin tip and non-insulated fin tip and one dimensional analysis on that when the temperature of the fin tip is finite are made. The effect of the fin tip is shown by comparing the heat loss from the fin and the temperature along the fin length varing the non-dimensional fin length and Biot number for each three cases. The results are following. When the non-dimensional fin length is very short, the relative error of the heat loss from the fin with insulated fin fip to that from the fin with non-insulated fin tip is very high. The value of the temperature variation along the non-dimensional fin length is minimum for the finite fin tip temperature using one dimensional analysis and is maximum for the insulated fin tip using two dimensional anaysis.

## 1. 서 론

fin에 대한 일차원적인[1,2,3,4] 해석과 이차원적인[5,6,7] 해석이 많이 이루어져왔다. 일차원적인 해석은 편리하기는 하나 심한 오차를 나타낼수도 있다. (특히 열대류 계수가 핀의 열전도 계수 보다 상당히 클때) 일정한 열대류 계수를 위하여 핀두께의 반을 기준으로한 Biot number의 값이 0.1보다 작아야만 일차원적인 해석의 타당성이 있다. 삼각핀에 대한 일차원적인[3,8,9] 해석도 많이 이루어 지고

* 강원대학교 기계공학과 전임강사

있다. 그러나 삼각핀을 일차원적으로 해석할때 핀끝의 경계조건을 세우는데 문제점이 있다. 즉 여러 열전달 교과서[10,11]에서도 나타난바와 같이 삼각핀을 1차원적으로 해석할 때 핀끝의 경계조건을 단지 핀끝의 온도가 유한 하다고 놓는데 이것으로는 핀끝이 절연되었든, 절연되지 않았든 핀끝의 온도는 유한하기 때문이다. 또한 우리들은 핀의 길이가 아주 길때 핀끝을 절연 되었다고 가정하고 풀어도 그리 큰 오차가 나지않는다고만 알고있다. 따라서 본 논문에서는 핀끝이 절연 되었을 때와 절연되지 않았을 때의 두가지 경우에 대하여 삼각핀을 2차원적으로 해석하고 또한 삼각핀 끝의 온도를 단지 유한하다고 놓았을때 이를 1차원적으로 해석하여 각각의 세가지 경우에 대한 핀으로 부터의 열손실과 핀중심을 따른 온도변화를 Biot number와 무차원적인 핀의 길이의 변화에 따라 비교 분석하여 구체적으로 삼각핀에 대한 핀끝의 영향을 보여준다. 이러한 비교 분석들을 간단히 하기위해 핀바닥의 온도와 핀의 열전도 계수 그리고 핀주위의 열대류 계수를 상수로 가정하고 핀내부에서 열발생은 없다고 본다.

## 2. 수치 해석

### 가) 1차원적인 해석

Fig. 1에 있는 삼각핀에서 핀끝을 $x'=0$로 놓고 핀바닥을 $x'=L'$로 정한후 $z$축의 길이를 1로 놓은후 $1 \gg 2y'$으로 가정하면 1차원적인 해석을 위한 삼각핀의 지배방정식은 식(1)로 표시될 수 있다.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\theta}{dx} - \frac{Bi \cdot \sqrt{L^2+1}}{x}\theta = 0 \qquad (1)$$

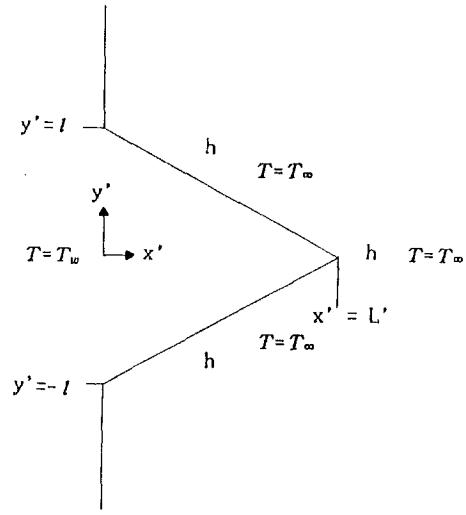


**Fig. 1.** Geometry of a triangular fin

위의 지배방정식을 위한 두개의 경계조건으로 식(2)와 (3)을 가지며 식(2)는 핀끝의 온도가 유한함을 나타낸다.

$$x=0 \qquad \theta=\text{finite} \qquad (2)$$

$$x=L \qquad \theta=\theta_0 \qquad (3)$$

여기서, $Bi = \frac{hl}{k}$, $x = \frac{x'}{l}$, $\theta = T\text{-}T_\infty$, $L = \frac{L'}{l}$

경계조건들 식(2)와 (3)을 가지고 지배방정식(1)을 풀면, x축을 따른 핀의 온도분포를 나타내는 식(4)를 얻게된다.

$$\theta = \theta_0 \frac{I_0(2\sqrt{AA \cdot x})}{I_0(2\sqrt{AA \cdot L})} \qquad (4)$$

핀으로 부터의 열전달 Q는 식(5)로 부터 식(6)으로 나타내진다.

$$Q = \int_{-l}^{l} k\left[\frac{d\theta}{dx}\right]_{x=L} dy \qquad (5)$$

$$= 2k\,\theta_0\sqrt{\frac{AA}{L}} \cdot \frac{I_1(2\sqrt{AA \cdot L})}{I_0(2\sqrt{AA \cdot L})} \qquad (6)$$

여기서

$$AA = Bi \cdot \sqrt{L^2+1} \qquad (7)$$

나) 2차원적인 해석

Fig. 1에 있는 삼각핀을 위해, 정상 상태에서의 2차원적인 열전도 방정식은 식(8)과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0 \tag{8}$$

식(8)의 미분방정식을 풀기위해 4개의 경계조건이 필요한데, 핀끝이 절연되었거나 절연되지 않았거나, 두경우 모두 공동으로 필요한 3개의 경계조건들이 식(9)-(11)로 나타내어진다.

$$x = 0, \quad \theta = \theta_0 \tag{9}$$

$$y = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

$$-\int_0^1 \left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{x=0} dy = Bi\sqrt{L^2+1}\int_0^1 \theta\, dy \tag{11}$$

남은 하나의 핀끝에서의 경계조건을 위해 핀끝이 절연 되었을 경우에는 식(12)로, 절연되지 않았을 경우에는 식(13)으로 나타내진다.

$$x=L, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \tag{12}$$

$$x=L, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} + Bi\theta = 0 \tag{13}$$

여기서 $Bi=\frac{hl}{k}$, $\theta=T-T_\infty$, $\theta_0=T_w-T_\infty$, $L=\frac{L'}{l}$, $x=\frac{x'}{l}$, $y=\frac{y'}{l}$

핀끝이 절연되었을 경우 경계조건들 (9), (10), (11) 그리고 (12)를 가지고, 핀끝이 절연되지 않았을 경우 경계조건들 (9), (10), (11) 그리고 (13)을 가지고 식(8)의 미분방정식을 풀면 두경우 모두 핀안의 온도분포를 식(14)의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_0 f_1(y) f_2(x) N_n \tag{14}$$

핀내부의 온도분포를 나타내는 식(14)로부터 삼각핀으로 부터의 열손실은 두경우 모두 식(15)로 나타낼 수 있다.

$$Q = \int_{-1}^{1}\left[-k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{x=0} dy$$

$$= -2k\sum_{n=1}^{\infty} sin(\lambda_n) f_n N_n \tag{15}$$

여기서

$$f_1(y) = cos(\lambda_n y) \tag{16}$$

$$f_2(x) = cosh(\lambda_n x) + f_n sinh(\lambda_n x) \tag{17}$$

$$N_n = \frac{4sin(\lambda_n)}{2\lambda_n + sin(2\lambda_n)} \tag{18}$$

식(15)과 (17)에 있는 $f_n$의 값은 핀끝이 절연 되었을 경우 식(19)와 (20)으로 나타내지고, 절연되지 않았을 경우 식(21)과 (22)로 표현된다.

핀끝이 절연되었을경우

$$f_n = -\tanh(\lambda_n L) \tag{19}$$

$$= \frac{Bi\cdot\sqrt{L^2+1}\cdot A_n}{C_n\cdot sin(\lambda_n) + Bi\cdot\sqrt{L^2+1}\cdot D_n} \tag{20}$$

핀끝이 절연되지 않았을경우

$$f_n = \frac{Bi+\lambda_n\cdot\tanh(\lambda_n L)}{\lambda_n + Bi\cdot\tanh(\lambda_n L)} \tag{21}$$

$$= \frac{Bi\cdot\sqrt{L^2+1}\cdot A_n}{C_n\cdot sin(\lambda_n) + Bi\cdot\sqrt{L^2+1}\cdot D_n} \tag{22}$$

여기서

$$A_n = \lambda_n L\cdot sinh(\lambda_n) + \lambda_n\cdot sin(\lambda_n) \tag{23}$$

$$C_n = \lambda_n^2\cdot(1+L^2) \tag{24}$$

$$D_n = \lambda_n L\cdot(cosh(\lambda_n L) - cos(\lambda_n)) \tag{25}$$

기존의 해석적인 방법은 식(19)와 (20) 또는 식(21)과 (22)로 부터 모든 eigenvalues를 구하는 것이나 forced analytic method는 첫번째 eigenvalue ($\lambda_1$)을 식(19)와 (20) 또는 식(21)과 (22)로 부터 구한 후 나머지 eigenvalues (i. e. $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4\cdots$)는 식(27)로

부터 구한다. 식(27)는 식(26)의 변형된 형태로서, 식(26)은 orthogonality principle을 직접적으로 적용한 식이다.

$$\int_0^1 \cos(\lambda_1 y) \cdot \cos(\lambda_n y)\, dy = 0 \qquad (26)$$

$$\lambda_n = (2\lambda_1 + \lambda_n) - 2(\lambda_1 + \lambda_n)\frac{\tan(\lambda_n)}{\tan(\lambda_1) + \tan(\lambda_n)} \qquad (27)$$

본 논문에서 삼각핀에 대하여 2차원적인 해석을 할 때는 forced analytic method를 사용하였다.

## 3. 결 과

Fig. 2는 Biot number 값이 0.01 일때 무차원적인 삼각핀의 길이의 변화에 따른 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되지 않았을 경우의 열손실에 대한 핀끝이 절연된 경우의 열손실과 1차원적으로 해석한 핀끝의 온도가 유한하다고 놓았을 경우의 열손실의 상대오차들을 나타낸다.

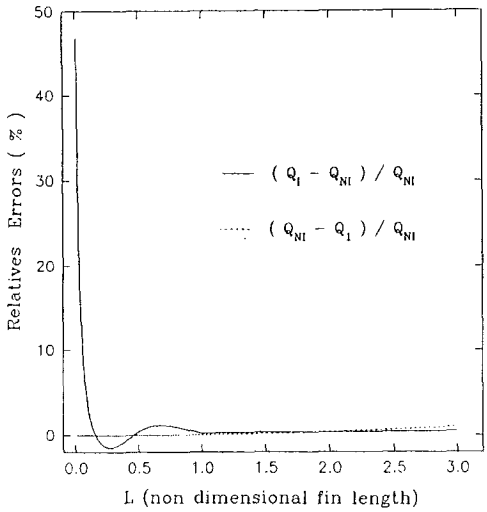


**Fig. 2.** Relative errors versus L for Bi= 0.01

이경우 $(Q_{NI} - Q_1)/Q_{NI}$의 값은 L이 커짐에 따라 약간씩 증가하나 거의 0에 가까우며 $(Q_I - Q_{NI})/Q_{NI}$의 값은 L=0.1일때는 약42%의 큰 오차가 발생하며 약 L=1 이후부터 거의 0에 가까워지며 약 L=2부터는 $(Q_{NI} - Q_1)/Q_{NI}$의 값보다 작아지기 시작한다.

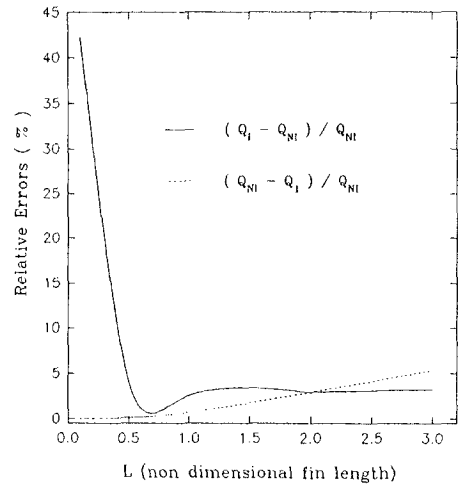


**Fig. 3.** Relative errors versus L for Bi= 0.1

Fig. 3은 Biot number 값이 0.1일때 Fig. 4와 같은 경우로서 $(Q_{NI} - Q_1)/Q_{NI}$의 값은 L이 증가함에 따라 거의 규칙적으로 증가하는 반면 $(Q_I - Q_{NI})/Q_{NI}$의 값은 상당히 불규칙하게 변하며 Biot number 값이 0.01일때와 비슷하게 약 L=2부터 $(Q_{NI} - Q_1)/Q_{NI}$의 값보다 작아지기 시작한다.

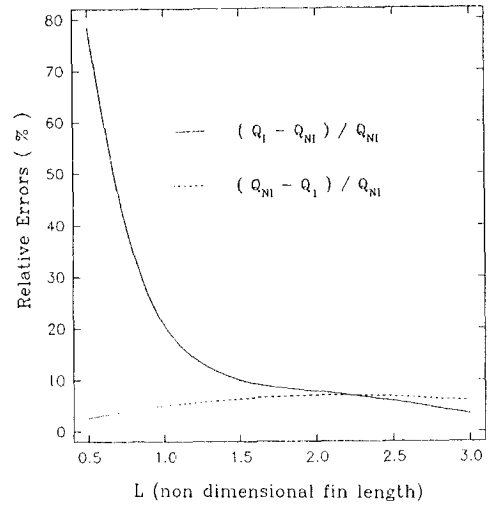


**Fig. 4.** Relative errors versus L for Bi= 1.0

Fig. 4는 Biot number의 값이 1.0인 경우로서 $(Q_{NI}-Q_I)/Q_{NI}$의 값은 L이 증가함에 따라 약 L=2.2를 기준으로 하여 서서히 증가하다가 감소하는 경향을 보여주며 $(Q_I-Q_{NI})/Q_{NI}$의 값은 L=0.5에서 약80%의 수치에서 급격히 감소하여 약 L=2.2 부터는 $(Q_{NI}-Q_I)/Q_{NI}$의 값보다 작아지기 시작한다.

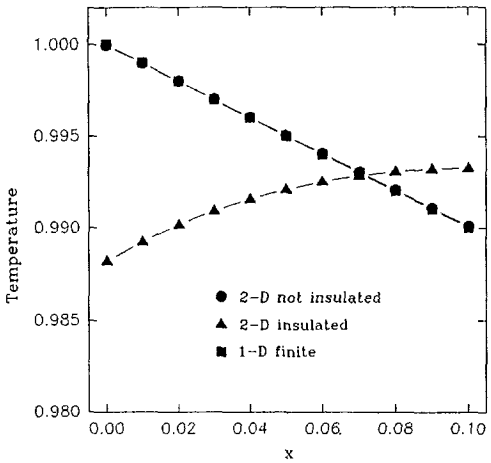


**Fig. 5.** The variation of non-dimensional 2-D fin center line temperature and 1-D temperature along x for L= 0.1 and Bi=0.1

Fig. 5는 Bi=0.1일때 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되지 않았을 경우의 열손실에 대한 핀끝이 절연된 경우의 열손실의 상대오차가 40%를 넘을때의 핀길이 즉 L=0.1일때에 무차원적인 x좌표의 변함에 따른 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연 되었을 경우와 절연되지 않았을 경우의 핀중심을 따른 무차원적인 온도변화와 1차원적으로 해석한 핀끝의 온도가 유한하다고 놓았을 경우의 무차원적인 온도변화를 나타낸것이다. 핀끝이 절연되지 않았을 경우 x좌표가 증가함에 따라 핀중심의 온도는 감소하며 x=0인 곳에서 무차원적인 온도값은 1인데 이것은 경계조건에 부합된다. 또한 핀끝의 온도가 유한하다고 놓았을 경우 x좌표를 따른 핀의 온도는 핀끝이 절연되지 않았을 경우의 x좌표를 따른 핀중심의 온도와 거의 일치함을 보여주는데 이는 Fig. 3에서 보여지듯이 Bi=0.1, L=0.1 일때 $(Q_{NI}-Q_I)/Q_{NI}$의 값이 거의 0인 사실과도 부합한다. 그러나 핀끝이 절연되었다고 가정했을 때는 x=0인 곳에서 무차원적인 온도값은 약 0.988이며 핀중심을 따른 온도값도 x좌표가 증가함에 따라 같이 증가하는데 이것은 경계조건에 전혀 맞지않음을 보여준다.

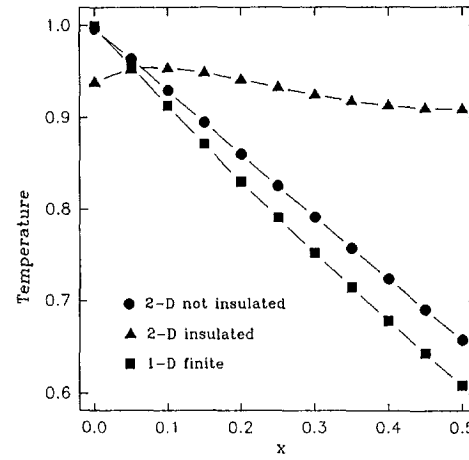


**Fig. 6.** The variation of non-dimensional 2-D fin center line temperature and 1-D temperature along x for L= 0.5 and Bi=1.0

Fig. 6은 Fig. 5와 같은 경우로 Bi=1.0일때 $(Q_I-Q_{NI})/Q_{NI}$의 값이 80%에 달하는 L=0.5일때를 나타낸다. 핀끝의 온도가 유한하다고 놓았을 경우 x좌표를 따른 핀의 온도는 핀끝이 절연되지 않았을 경우의 x좌표를 따른 핀중심의 온도보다는 x좌표가 커짐에 따라 점점 더 작아지며 두경우 모두 x좌표가 증가함에 따라 감소하는데 Bi=0.1의 경우와 비교하면 Biot number가 더 크기때문에 온도의 하강경사가 더 큼을 보여준다. 핀끝이 절연되었을 때는 핀중심의 온도가 x좌표가 증가함에 따라 처음에는 증가하다가 감소하며 x=0인 곳에서 무차원적인 온도가 1이 되어야하는 경계조건에도 맞지않음을 보여준다.

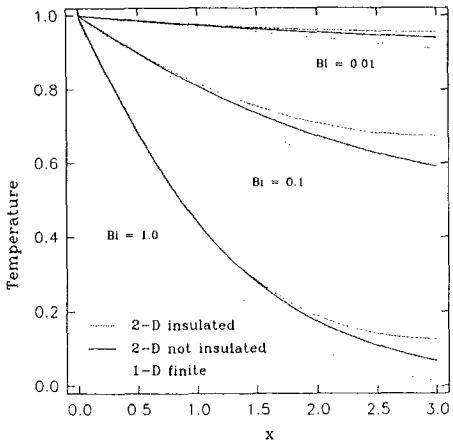


**Fig. 7.** The variation of non-dimensional 2-D fin center line temperature and 1-D temperature along x for L= 3.0

Fig. 7은 세가지 Biot number에 대하여 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되지 않았을 경우에 대한 핀끝이 절연 되었을 경우의 열손실의 상대오차가 약5% 내에 있는 L=3 일 때의 무차원적인 x좌표의 변화에 따른 2차원적으로 해석한 두 경우의 핀중심의 온도변화와 1차원적으로 해석한 핀의 온도변화를 나타낸다. 이 경우 Biot number의 세가지 값 모두에 대하여 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연 되었을 경우와 절연되지 않았을 경우 모두 핀바닥의 경계조건에 부합됨을 보여주며 x값이 증가함에 따라 두 경우의 온도차가 점점 벌어진다. 또한 1차원적으로 해석한 핀의 온도가 가장 낮은 값을 나타내며 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연 되었을 경우의 핀중심의 온도가 가장 높은 값을 나타냄을 보여준다.

## 4. 결 론

삼각핀의 길이가 아주 짧을 경우 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되지 않았을 때의 열손실에 대한 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연 되었을 때의 열손실의 상대오차가 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되지 않았을 때의 열손실에 대한 1차원적으로 해석한 핀끝의 온도가 유한하다고 놓았을 때의 열손실의 상대오차보다 크며 핀의 길이가 길어짐에 따라 그 경향이 바뀌어진다. 핀의 길이를 따른 무차원적인 온도변화는 1차원적으로 해석한 핀의 온도가 가장 낮은 값을 나타내며 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연 되었을 경우의 핀중심의 온도가 가장 높은 값을 나타냄을 보여준다.

## 참 고 문 헌


1. Gardner, K. A., 1945, "Efficiency of Extended Surface", ASME J. of Heat Trans., Vol. 67, pp. 621-631.
2. Keller, H. H. and Somers, E. V., 1959, "Heat Transfer from an Annular Fin of Constant Thickness", ASME J. of Heat Trans., Vol. 81, pp. 151-156.
3. Burmeister, L. C., 1979, "Triangular Fin Performance by the Heat Balance Integral Method", ASME J. of Heat Trans., Vol. 101, pp. 562-564.
4. Ünal, H. C., 1988, "The Effect of the Boundary Condition at a Fin Tip on the Performance of the Fin with and without Internal Heat Generation", Int. J. Heat Mass Trans., Vol. 31, pp. 1483-1496.
5. Sparrow, E. M. and Lee, L., 1975, "Effects of Fin Base-Temperature Depression in a Multifin Array", ASME J. of Heat Trans., Vol. 97, pp. 463-465.
6. Buccini, A. and Soliman, H. M., 1986, "Optimum Dimensions of Annular Fin Assemblies", ASME J. of Heat Trans., Vol. 108, pp. 459-462.

7. Look, D. C. Jr. and Kang, H. S., 1991, "Effects of Variation in Root Temperature on Heat Lost from a Thermally Non-Symmetric Fin", Int. J. Heat Mass Trans., Vol. 34, pp. 1059-1065.
8. Ullmann, A. and Kalman, H., 1989, "Efficiency and Optimized Dimension of Annular Fins of Different Cross-Section Shapes", Int. J. Heat Mass Trans., Vol. 32, pp. 1104-1110.
9. Crawford, M., "Heat Transfer in Trapezoidal Straight Fins with a Periodically Varying Base Temperature", ASME, 82-WA/HT-41.
10. Chapman, Alan J., "Heat Transfer", Fourth ed., Macmillan Publishing Company, New York, Collier Macmillan Publishers, London, 1984., pp. 67-69.
11. Pitts, Donald R. and Sissom, Leighton E., "Heat Transfer", Mcgraw-Hill Book Company, 1977, pp. 27-28.

## 요 약 문

핀끝이 절연 되었을 때와 절연되지 않았을 때의 두가지 경우에 대하여 삼각핀을 2차원적으로 해석하고 또한 삼각핀 끝의 온도를 단지 유한하다고 놓았을때 이를 1차원적으로 해석하여 각각의 세가지 경우에 대한 핀으로 부터의 열손실과 핀중심을 따른 온도변화를 Biot number와 무차원적인 핀의 길이의 변화에 따라 비교 분석하여 구체적으로 삼각핀에 대한 핀끝의 영향을 보여준다. 결과들은 다음과 같다. 핀의 길이가 아주 짧을 경우 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되지 않았을 때의 열손실에 대한 같은 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연 되었을 때의 열손실의 상대오차가 매우 크며 핀의 길이를 따른 무차원적인 온도변화는 1차원적으로 해석한 핀끝의 온도가 유한할 경우에 가장 낮은 값을 나타내며 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되었을 경우가 가장 높은 값을 나타낸다.

## 기 호 설 명

Bi : Biot number (=h$l$/k)
h : 핀주위의 열대류 계수
k : 핀의 열전도 계수
$l$ : 핀바닥 두께의 반
$L'$ : 핀 길이
$L$ : 무차원적인 핀 길이 ($L'/l$)
$Q_{NI}$ : 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되지 않았을 때의 열손실
$Q_I$ : 2차원적으로 해석한 핀끝이 절연되었을 때의 열손실
$Q_1$ : 1차원적으로 해석한 핀끝이 온도가 유한할 때의 열손실
T : 온도
$T_w$ : 핀바닥 온도
$T_\infty$ : 핀주위 온도
$x'$ : 핀길이를 따른 좌표
$x$ : 무차원적인 핀길이를 따른 좌표 ($x'/l$)
$y'$ : 핀높이를 따른 좌표
$y$ : 무차원적인 핀높이를 따른 좌표 ($y'/l$)
$\theta$ : 변형된 온도 ($T-T_\infty$)
$\theta_0$ : 변형된 핀바닥 온도 ($T_w-T_\infty$)
$\lambda_n$ : eigenvalue