

T-접합 도파관의 수치적 해석

천 창 울* · 정 진 교**

Numerical Analysis of Waveguide T-Junction

Changyul Cheon * · Jin-Kyo Chung **

ABSTRACT

This paper presents an analysis of microwave device component. An H-Plane waveguide component with arbitrary shape is analyzed using finite element method (FEM) cooperated with boundary element method (BEM). The finite element method (FEM) is applied to the junction region and the boundary element method (BEM) to the waveguide region. For the application of BEM in the waveguide structure, a ray representation of the waveguide Green's function is used. The proposed technique was applied to the analysis of the waveguide inductive junction to compare the numerical result with the result of the mode matching technique. The comparison showed good agreements between the two results. Transmitted powers were also computed in T-junction waveguides for the various shape of the junction area.

I. 서론

전자파를 한 지점에서 다른 한 지점으로 전송하기 위하여 사용되는 도파관은 전자파 소자나 회로를 설계하고자 할 때 광범위하게 사용된다. 그러나 도파관접합 즉, 도파관의 불연속 구조에서는 전자파의 특성이 문제점으로 제시된다. 이러한 불연속 구조의 해석

에 대한 연구가 꾸준히 진행되어 현재까지 도파관접합을 해석하기 위한 여러가지의 수치적, 해석적 방법이 제시되었다.

Davies에 의하여 대칭구조의 순환기에 대한 이론적 결과[1]가 제시되었지만, 불연속 구조에 대한 해석방법이 문제점으로 제시되었다. 그 이후 불연속 구조의 해석에 Point-Matching[2]방법이 이용되었다. Webb와 Porihar[3], Lee와 Cendes[4]는 유한요소법을 이용하여 H-평면 도파관접합에 대하여 해석을 시도하였고, Kagami와 Fukai[5] 그

* 강원대학교 전기공학과 전임강사

** 강원대학교 전기공학과 석사과정

리고 Koshiba와 Suzuki[6]는 경계요소법을 이용하여 해석을 하였다.

유한요소법은 비선형 매질을 포함하는 여러가지 도파관 구조의 해석에 주로 이용된다. 그러나 이 방법은 최종적인 행렬방정식을 풀기 위하여 많은 컴퓨터 메모리와 오랜 계산 시간을 필요로 한다. 또한 도파관 접합 해석과 같은 문제의 경우에는 임의로 설정한 경계에 주어지야 할 경계조건이 문제가 된다.

경계요소법은 경계적분방정식을 기초로 하는 방법으로 이는 유한요소법에 비하여 행렬의 차수가 감소하기 때문에 적은 양의 컴퓨터 메모리를 사용하므로 계산시간을 상당히 줄일 수 있다. 그러나 도파관의 구조가 복잡하거나 매질이 포함되어 있는 경우에는 적절한 Green함수를 구할 수 없으므로 문제를 해석하는 것이 매우 곤란하다. 경계요소법을 적용하는 경우 사용되는 도파관에서의 그린함수[7][8][9]는 평면파 스펙트럴 표현식, 레이 표현식, 모드 표현식등 3가지 방법으로 표현된다. 여기서 모드표현식이 여러 도파관 해석에 주로 사용되고 있으나 다른 두가지의 표현식은 거의 사용되지 않고 있다. 그러나 모드표현식의 경우 진행방향에 수직인 한 평면에 전원점과 관측점이 함께 존재할 경우에는 일정한 값으로 수렴하지 않는 단점이 있다.

본 논문에서는 H-평면의 도파관 불연속 구조에 대한 수치해석기법을 제시하였다. 도파관의 불연속 구조에서는 유한요소법을 적용하고, 도파관영역에서는 경계요소법을 적용하여 문제를 해석하였다. 도파관에서의 그린함수는 전원과 관측점사이의 거리가 비교적 가까울때에 이용되는 레이표현식을 이용하였다.

II. 유한요소정식화

도파관접합의 문제에서 만약에 y축 방향으로 도파관 구조의 변화가 없고, 전계가 E_y

성분만 존재한다고 하면, 도파관 문제는 그림 1과 같이 TE 모드 즉 H-평면의 문제로서 해석이 가능해진다. 경계 Γ 는 불연속 구조를 포함하는 해석영역 Ω 와 도파관영역을 나타내는 Ω_w 와 경계를 이루는 면이다. 여기서 경계 Γ_c 는 도체 경계면을 나타낸다.

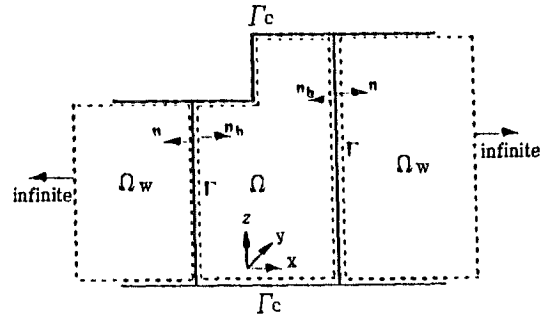


Fig. 1. Two-port geometry of the problem.

전원을 고려하지 않는 시변 전자장에서 $\exp(j\omega t)$ 의 시간관계를 적용할 경우, 다음과 같은 전자파 방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서

$$\begin{aligned} k^2 &= \omega^2 \mu \epsilon \\ \mu &= \text{도파관내의 투자율} \\ \epsilon &= \text{도파관내의 유전율} \end{aligned} \quad (2)$$

이다.

불연속 구조의 해석영역 Ω 를 유한개의 요소로 나누었을때, e-번째의 요소에서의 전계의 근사값 \underline{E}_y 에 의하여 발생하는 오차를 R_e 라 하면

$$R_e = \left(\frac{a^2}{a^2 x^2} + \frac{a^2}{a^2 z^2} + k^2 \right) \underline{E}_y \quad (3)$$

으로 표현된다. 식 (3)에 가중잔차법을 적용시키면 다음과 같은 적분방정식이 얻어진다. [8]

$$\sum_{e=1}^M \left\{ \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial E_y}{\partial z} - k^2 W E_y \right) d\Omega - \oint_{\Gamma} W \frac{\partial E_y}{\partial n} d\Gamma \right\} = 0 \quad (4)$$

여기서 W 는 가중치함수이고, M 은 요소의 총갯수이다. 그리고 n 은 외향법선 단위벡터를 나타낸다. 도파관 경계면 Γ_e 에서 경계적분항은 경계조건에 의하여 사라지지만 도파관의 해석 경계면 Γ 에서는 $\left(\frac{\partial E_y}{\partial n}\right)$ 이 계산되어야 한다.

식(4)를 유한요소법을 적용하여 수치적으로 계산하기 위하여 E_y 를 다음과 같이 근사화한다.

$$E_y = \sum_j N_j E_{yj} \quad (5)$$

여기서 N_j 는 보간함수로서 Galerkin법에서는 가중치함수로 사용된다. E_{yj} 는 해석영역 Ω 의 정점 j 에서의 전계의 세기를 나타낸다. 식(5)를 식(4)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 행렬식이 유도된다.

$$[B \ C] \begin{bmatrix} E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial n} \end{bmatrix} = [0] \quad (6)$$

여기서 E_y 는 마디에서의 전계값을, $\frac{\partial E_y}{\partial n}$ 는 경계 Γ 에서의 전계의 수직 변화량을 나타내는 것으로 다음과 같이 표현된다.

$$E_y = [E_{yj}] \quad j = 1, 2, 3, \dots, J$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial n} = \left[\frac{\partial E_{yj}}{\partial n} \right] \quad i = 1, 2, 3, \dots, I \quad (7)$$

계수행렬식 B와 C의 i 행 j 렬의 요소는 각각 다음과 같다.

$$B_{ij} = \sum_e \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} - k^2 N_i N_j \right) d\Omega$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, J$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, J \quad (8)$$

$$C_{ij} = \int_{\Gamma_j} (N_i) d\Gamma \quad i = 1, 2, 3, \dots, I$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, I \quad (9)$$

여기서 J 는 Ω 영역에서 계산하여야 할 정점의 총 갯수이며 I 는 경계조건이 주어지지 않은 해석영역 Γ 에서 요소의 갯수에 의하여 결정된다. 유한요소법은 각각의 요소에서 구하고자하는 값을 선형 근사화하여 계산하므로 요소의 갯수를 증가시키거나 요소에 대한 보간함수의 차수를 높임으로써 더욱 정확한 값을 계산할 수 있다.

III. 경계요소정식화

도파관에서의 그린함수 G 는 다음과 같은 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 G(r, r') + k^2 G(r, r') = -\delta(r-r') \quad (10)$$

여기서 r, r' 은 각각 관측점과 전원점을 나타낸다.

그림 1의 도파관영역 Ω_w 에서 경계요소법을 적용하기 위하여 우선 적분방정식을 유도하여야 한다. 이때 도체 경계면에서는 전계의 접선 성분이 0이 된다는 경계조건을 사용하고, 도파관의 길이가 해석경계면 Γ 에 대하여 영향을 주지않을 정도로 멀리 떨어져 있어 요소간의 상호 작용을 무시할 수 있다고 가정하면 다음과 같이 해석 경계면 Γ 에서만 계산을 수행하면 된다. [8]

$$E_y^i + \int_{\Gamma} \left(E_y \frac{\partial G}{\partial n_b} - G \frac{\partial E_y}{\partial n_b} \right) d\Gamma =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{영역 } \Omega \\ \frac{1}{2} E_y & \text{경계 } \Gamma \\ E_y & \text{영역 } \Omega_w \end{cases} \quad (11)$$

여기서 E_y^i 는 도파관에 입사하는 전자파를 나타내며 n_b 는 Ω_w 영역에서 밖으로 향하는 외향법선 단위벡터로서 n 과는 반대 방향이다.

경계요소법에 의하여 전개된 식 (11)을 수치적으로 계산하기 위하여 해석영역 Γ 를 유한개의 요소로 나누었을 경우 해석영역의 정점에 대하여 다음과 같은 행렬식을 유도할 수 있다.

$$[H \ Q] \begin{bmatrix} E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial n} \end{bmatrix} = [0] \quad (12)$$

여기서 $E_y, \frac{\partial E_y}{\partial n}$ 는 각각 다음과 같다.

$$E_y = [E_{yj}] \\ \frac{\partial E_y}{\partial n} = \left[\frac{\partial E_{yj}}{\partial n} \right] \quad j = 1, 2, 3, \dots, J \quad (13)$$

또한 계수행렬 H, Q의 i행 j열의 요소는 각각 다음과 같다.

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial G_i}{\partial n_b} \right) d\Gamma_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} \\ Q_{ij} = - \int_{\Gamma_j} (G_i) d\Gamma_j \quad i = 1, 2, 3, \dots, J \\ j = 1, 2, 3, \dots, J \quad (14)$$

여기서 i와 j는 경계 Γ 에서의 정점의 총 갯수이다.

도파관 접합에서 유한요소법에 의한 행렬식과 경계요소법에 의한 행렬식을 이용하여 다음과 같은 최종적인 시스템 행렬식을 구성할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} F \ E \ M \ | \ \text{경계 } \Gamma \\ \hline B \ E \ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{yi} \\ - \\ \frac{\partial E_{yi}}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ - \\ E_y^i \end{bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)를 풀면 해석영역 Ω_w 의 정점에서의 전계의 세기와 경계 Γ 에서의 전계의 세기 및 전계에 대한 수직변화량이 계산되어 진다. 경계 Γ 에서 자계의 성분은 전계의 성분이 E_y

성분만이 존재하므로 Maxwell방정식으로부터 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\vec{H} = \frac{-1}{j\omega\mu} \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{z} \right) \quad (16)$$

위의 식에서 $\frac{\partial}{\partial x}$ 는 $\frac{\partial}{\partial n}$, $\frac{\partial}{\partial n_b}$ 에 해당되므로 경계 Γ 를 통하여 x방향으로 흐르는 전력 P_x 는 E_y 와 H_z 를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$P_x = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\int \int_s (E_y H_z^*) dS \right) \quad (17)$$

IV. 도파관에서의 그린함수

그린함수는 다음과 같은 편미분방정식을 만족하는 해를 나타낸다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) G(r, r') = -\delta(r - r') \quad (18)$$

여기서 r, r'은 각각 관측점과 전원점을 나타낸다.

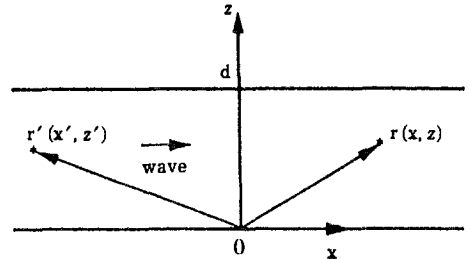


Fig. 2. Waveguide region in H-plane.

그림 2와 같은 구조의 2차원 문제에서 $z=0, d$ 에 도체판이 존재하므로

$$z = 0, d \text{에서} \\ G(r, r') = 0 \quad (19)$$

인 경계조건이 주어진다. 기하급수 전개식과 Hankel함수의 적분표현식을 이용하여 스

펙트럴 표현식을 정리하면 다음과 같은 표현식을 유도할 수 있다. [9]

$$G(r, r') = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^4 g_{nl}(rr') \right) \quad (20)$$

$$\cong \sum_{n=0}^N \left(\sum_{l=1}^4 g_{nl}(rr') \right)$$

여기서

$$g_{nl}(rr') = \frac{-j A_{nl} H_0^{(2)}(k \sqrt{(x-x')^2 + (z-z_n)^2})}{4} \quad (21)$$

이고

$$A_{nl} = \begin{cases} 1, & l = 1, 3 \\ -1, & l = 2, 4 \end{cases}$$

$$z_{nl} = \begin{cases} |z-z'| + 2nd & l = 1 \\ z+z' + 2nd & l = 2 \\ -(z-z') + 2(n+1)d & l = 3 \\ -|z-z'| + 2(n+1)d & l = 4 \end{cases} \quad (22)$$

이다. 그리고 변수 N 은 다음과 같이 계산된다.

$$N \gg \frac{1}{2kd\delta^2} \quad (23)$$

여기서 δ 는 미리 주어지는 허용오차의 값을 나타낸다.

V. 사례 연구

그림 3은 유도성 도파관 계단접합에 대하여 본 논문에서 제시한 해석방법의 결과와 모드정합법의 결과로부터 계단접합부에서의 서셉턴스를 계산하여 비교한 것이다.

1번 선은 불연속면에서 반사되는 전자파를 고려하지 않은 상태에서 모드정합에 의한 결과값(10)을 나타낸 것이고, 2번 선은 반사파까지 고려한 모드정합법에 의한 결과값을 나타낸 것이다. 계산된 결과값에서의 오차

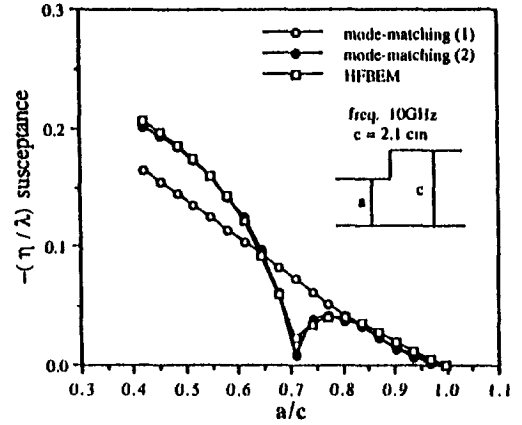


Fig. 3. Susceptance at inductive step junction.

는 모든 모드들을 고려할 수 없기 때문에 발생하는 오차와 컴퓨터 계산시 발생하는 수치 오차에 의한 것으로 볼 수 있다. 이를 고려한다면 본 논문에서 제시한 해석방법에 대한 타당성을 입증할 수 있다.

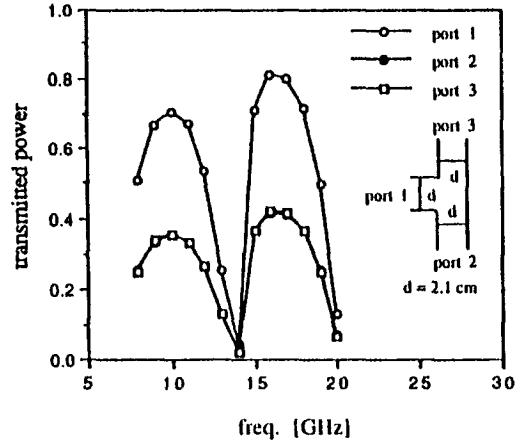


Fig. 4. Powers of T-junction.

그림 4는 T-접합 도파관에서 전자파가 1번 단자로 입사한다고 할 때 입사전력에 대한 2번, 3번 단자에서의 전력의 양을 주파수 대역에 대하여 계산하여 나타낸 것이다. 전 주파수 대역에서 입사하는 전력의 양에 대하여 2번, 3번 단자로 정확하게 50%씩 흐르고 있는것을 볼 수 있다.

VI. 결 론

본 논문에서는 도파관 접합을 해석하기 위하여 레이 표현식의 도파관 그린함수를 이용한 혼합 유한요소법을 제시하였다. 또한 해석방법의 타당성을 위하여 이론적인 결과값과 해석방법에 의한 결과값을 비교하여 검증하였다. 이 방법은 E-평면 도파관접합 즉 TM모드에 대하여 변환 확장할 수 있으므로 전자파회로를 설계할 경우에 기본적인 설계값을 제시할 수 있을 것이다. 이러한 기술은 결합기나 순환기와 같은 다른형의 도파관접합 소자의 해석에도 광범위하게 응용될 수 있을것으로 생각된다.

參 考 文 獻

1. J. B. Davies, "An Analysis of The m-Port Symmetrical H-Plane Waveguide Junction with Central Ferrite Post," IRE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MIT-10, pp. 596~604, Nov. 1962.
2. M. E. El-Shandwily, A. A. Kamal, and E. A. F. Abdallah, "General Field Theory Treatment of H-Plane Waveguide Junction Circulator," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MIT-21, pp. 392~408, June 1973.
3. J. P. Webb and S. Porihar, "Finite Element Analysis of H-Plane Rectangular Waveguide Problems," Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 133, pt. H, no. 2, pp. 91~94, Apr. 1986.
4. J. Lee, and Z. J. Cendes, "An Adaptive Spectral Response Modeling Procedure for Multipost Microwave Circuits," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MIT-35, pp. 1240~1247, Dec. 1987.

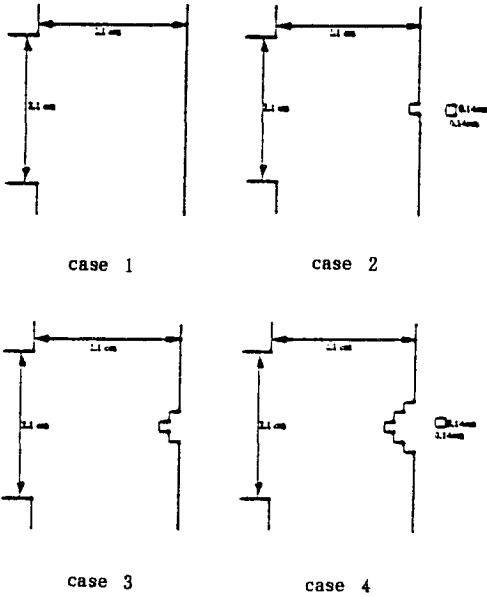


Fig. 5. Various shape of junction area.

그림 5에 제시된 여러가지의 T-접합 도파관의 해석 모델에 대하여 전파되는 전력의 양을 계산한 결과 값이 그림 6에 나타나 있다. T-접합 도파관의 도체 경계면의 구조가 변환에 따라 반사파에 의한 차단주파수가 생성되지 않으므로 사용가능한 주파수 대역이 광역화 되는 것을 볼 수 있다.

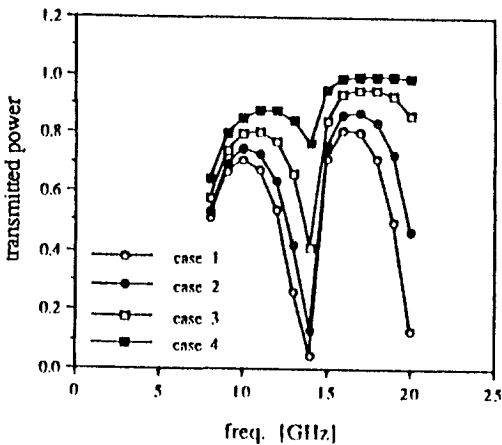


Fig. 6. Powers of various shape of T-junction.

5. S. Kagami and I. Fukai, "Application of Boundary-Element Method to Electromagnetic Field Problems," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MIT-32, pp. 455-461, Apr. 1984.
6. M. Koshiba and M. Suzuki, "Application of Boundary-Element Method to Waveguide Discontinuities," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MIT-34, pp. 301~307, Feb. 1986.
7. I. T. Lu and R. L. Olesen, "Analysis of Transmission Line Structures Using a New Image-Mode Green's Function," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 38 no. 6, pp. 782~784, June 1990.
8. I. T. Lu and H. K. Jung and C. M. Tsai, "Hybrid Combinations of Global and Local Operators for Solving Helmholtz and Poisson Equations," J. Comp. Physics, vol. 103, no. 2, Dec. 1992.
9. Hyun-Kyo Jung and I-Tai Lu and Song-Yop Hahn, "A Hybrid Ray-Mode-(Boundary Integral Equation) Method for Acoustic Wave Scattering by Multiple Scatterers in a Waveguide," J. of KIEE, vol. 3, no. 1, pp. 49~55, 1990
10. Roger F. Harrington "Time-Harmonic Electromagnetic Fields," McGraw-Hill, pp. 176.