韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1993. 12. 제 32권 제 2호 137-149

journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Dec. 1993, Vol. 32, No. 2, 137-149

# 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구

류 성 림(대구제일여중)
정 창 현(한국교원대학교)

## I. 서 론

### A. 연구의 필요성 및 목적

수학에서 논리적 사고 교육의 하나로서 증명은 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. 수학이라는 학문 자체가 몇 가지 정의와 공리로부터 논리법칙을 이용하여 명제나 정리를 유도하며 확장하여 나가는 공리적인 성격을 지니고 있는데, 그러한 논리 전개가 옳은지 아니면 오류가 있는지를 판별해 주는 기준이 되는 것이 증명이다. Solow(1984) 등은 증명의 지도가 수학교육에서의 역할과 이점으로 다음과 같이 제시하고 있다. 첫째, 수학을 왜 배우는지에 대한 의문을 풀 게 하여 즐거움을 가져다 준다. 둘째, 어떤 명제나 정리가 참 또는 거짓이라는 것을 쉽게 이해할 수 있다. 세째, 증명을 읽어감에 따라서 정리의 내용을 보다 잘 파악할 수 있다. 네째, 증명을 통하여 정리의 내용을 잘 기억할 수 있다. 다섯째, 증명의 기술을 배울 뿐만 아니라 수학적인 서술 방법에 대한 훈련이 된다. 여섯째, 수학적인 언어(문장, 기호)의 표현 능력을 향상시킬 수 있다. 일곱째, 체계적이고 논리적인 사고 과정을 갖게한다. 여덟째, 정의감을 갖게 하여 진리를 사랑하게 한다.

현재 우리나라 수학교육과정에서는 중학교 2학년 기하단원에서 처음으로 형식적인 증명을 다루고 있는데, Becker(1982)는 기하 영역의 증명에 대해서 다음과 같이 말하고 있다.

"중등학교 수학의 영역 중에서 기하는 증명이 가장 많이 요구되며, 따라서, 학생들에게 증명 훈련을 시키는데 가장 적합한 분야로 간주되어 왔다. '증명'이라는 용어는 일관성과 관련된 주어진 증명의 평가, 학습한 증명의 재진술뿐만 아니라, 새로운 증명을 고안해 내는 것과 같은 넓은 분야의 활동을 총체적으로 일컫기도 한다. 그것은 주어진 진술에 대한 일련의 추론을 구성하고 있다. 이들 능력을 갖추기에는 어려워서 장기간에 걸친 훈련에 의해서만 할 수 있다. 그러므로, 기하 증명에서 어려움과 오류를 분석하고 확인하는 것은 증명을 학습하는데 있어서 중요한 치료 수단이 될 것이다."(p.123).

그러나 아마 수학 교사들이 학생들에게 수업을 할 때, 다른 여러 부분 못지않게 지도하기에 어려움을 느끼는 부분이 증명을 이용하여 명제나 정리를 지도하는 부분이며, 그 중요성과 여러 가지 이점에도 불구하고 학생들이 매우 곤혹스럽게 생각하고 싫어하는 것이 또한 증명이다. 증명 문제에 매우 약하다는 지적을 받고 있음은 수학교육에 있어서 문제점이라 할 수 있으며, 학생들이 증명 문제에 흥미를 갖게 하고, 증명 능력 신장을 위한 지도 방안이 강구되어야 하겠다.

따라서, 중학교 2학년 과정을 마친 남·녀 학생들의 증명 능력에 대한 검사를 통해 현재 수학과 교육과정에서 강조되고 있는 증명에 관련된 영역의 성취 수준은 어느 정도인지 측정하고, 증명 과정에서 나타나고 있는 오류 유형을

분석하여 제시하므로써, 학교 현장에서 교사가 바람직한 증명 지도를 하는데 도움이 될 것이다.

## B. 연구 문제

앞의 연구 목적을 달성하기 위해 본 논문은 다음과 같이 연구 문제를 설정하고자 한다.

1. 기하 증명 능력 검사를 통하여 중 2 과정을 마친 학생들의 증명 능력은 어느 정도인가?
2. 기하 증명 능력에 있어 남·녀 사이에는 차이가 있는가?
3. 기하 증명 과정에서 나타나는 학생들의 오류에는 어떤 것이 있는가?

# Ⅲ. 연구 방법 및 절차

## A. 연구 대상

중학교 2학년에서 "명제와 증명", "도형의 성질"을 다룬 대구 시내의 3개 중학교 3학년 학생 중에서, 남녀 각 2개반씩(남자 중학교 1개교에서 1학급, 여자 중학교 1개교에서 1학급, 남녀 공학인 중학교 1개교에서 남학생 1학급·여학생 1학급)에서 210명을 표집하여 모두 조사하였다.

대구 시내에서 이들 3개 학교 학생들의 학력 수준은 모두 중위권을 약간 상회하며, 그들의 문화, 경제적 수준은 중간 정도였다. 표집된 대상은 <표 2-1>과 같다.

<표 2-1> 표집된 학생수

| 성 별 | 남학생 | 여학생 | 합 계 |
|---|---|---|---|
| S중학교 | 53 | \ | 53 |
| D여자중학교 | \ | 53 | 53 |
| K중학교 | 52 | 52 | 104 |
| 합 계 | 105 | 105 | 210 |

## B. 검사 도구

### 1. 문항의 개발

본 연구에서 사용된 검사 도구인 증명 능력 검사 문항을 개발하기 위하여 West(1979)가 사용한 다음과 같은 4가지 준거를 고려하였다(전평국, 1988).

1) 형식

문항 구성의 형식은 CDASSG (Chicago project)에서 Usiskin(1982)이 개발한 van Hiele Proof Test의 형태를 따랐는데, 다음과 같이 3가지 준거에 의해 구성되어 있다: ① part A는 어떤 명제가 주어지면 이용해야할 가정과 증명해야할 결론을 구분할 수 있는지를 묻는 것으로, 이것은 증명의 기초인 가정과 결론에 대한 이해 수준을 측정하는 것이다. ② part B는 증명 과정이 주어질 때 절차적인 추론을 완성하며, 또한 주장과 이유로 구별하여 제시하는 것이다. ③ part C는 주어진 명제에 대해 가정을 이용하여 결론을 형식적이고 논리적으로 완전하게 연역해 나가도록 하는 것으로, 특히 증명 과정에서의 오류를 찾기 위한 부분이다.

2) 내용 영역

내용 영역은 현행 중학교 2학년 5종 교과서를 모두 고찰하여 기본적이고 공통적으로 다루고 있는 내용을 선정하였으며, 특히 합동과 닮음 조건, 각의 성질, 중점연결정리를 이용하는 내용으로 이루어졌다.

3) 난이도

문제의 난이도는 하나의 연산자만 적용할 수 있는 문항(1 단계), 하나 이상의 연산자를 적용해야 하는 문항(2-3 단계), 즉 중간 단계를 거쳐서 최종 목표에 도달하는 문항 등을 고려하여 상(2-3단계 적용), 중(2단계 적용), 하(1단계 적용)로 고르게 구성하였다.

4) 문제 공간 (task space)

문항 1-4번은 푸는 방법이 한 가지로 제한적이나, 문항 5-10번은 연산자의 적용에 있어서 한 가지 이상의 방법으로 증명이 가능하도록

하였다. 이와 같이 구성한 문항을 예비 검사를 통하여 응답율, 난이도, 내용의 적절성 등을 조사하였고, 이에 따라 부적절한 문항은 수정, 보완하여 제작하였다.

### 2. 문항의 구성

위의 준거에 따라 제작한 검사 도구의 문항 수는 10문항으로 되어 있으며, 구체적으로 다음과 같이 세 부분으로 구성되어 있다.

A) 1~2번: 1) 주어진 명제의 그림을 그리고 기호로 나타내기
 2) 가정을 기호로 나타내기
 3) 결론을 기호로 나타내기
 4) 명제의 역을 기호로 나타내기

B) 3~4번: 증명과정이 주어지고 빈 칸을 채우기 (각 4개씩)

C) 5~10번: 주어진 문제에 대해 완전한 증명을 요구하는 문항

또한, 문항별 각 특성은 다음 <표 2-2>와 같다.

<표 2-2> 문항의 특성

| 문항 | 내용(연산자) | 도형의 성질 | 난이도 | 도형의 제시 |
|---|---|---|---|---|
| A1 | \ | 이등변삼각형의 성질 | 하 | \ |
| 2 | \ | 직사각형의 성질 | 중 | \ |
| B3 | 합동 | 이등변삼각형의 성질 | 중 | 0(완성) |
| 4 | 닮음 | 삼각형의 닮음 | 상 | 0 |
| C5 | 각의 성질 | 삼각형의 내각의 합 | 중 | △(부분) |
| 6 | 합동 | 평행사변형의 성질 | 하 | \ |
| 7 | 합동 | 각의 이등분선의 성질 | 중 | 0 |
| 8 | 닮음 | 삼각형의 닮음 | 하 | 0 |
| 9 | 합동 | 이등변삼각형의 성질 | 상 | △ |
| 10 | 중점연결정리 | 평행사변형의 성질 | 상 | 0 |

## C. 검사 방법 및 절차

### 1. 예비검사

예비 검사는 본 검사를 실시하기 위하여 학생이 평가 문항에 응답하는데 소요되는 시간의 적절성과 문항 수준의 적절성, 응답율 등을 알아보고, 검사 문항을 수정·보완하기 위하여 실시하였다.

난이도가 높아 응답율이 30%이하인 문항은 오류를 분석하는데 있어서 의미가 없다고 생각하여 삭제 또는 수정하였다. 예를 들면, 다음 문항은 응답율이 18%로서 삭제된 문항이다.

다음을 증명하여라.
가정: $\angle ADE = \angle ABC$
결론: $\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{AD} : \overline{AB}$

예비 검사는 2회 실시 하였는데, 대구 시내에 소재한 J 여자 중학교에서 1차는 한 학급의 15명(상, 중, 하 각 5명씩)을 대상으로 1993년 7월 9일에, 2차는 1차와는 다른 한 학급을 임의 추출하여 1993년 7월 14일에 수학 교사의 협조 아래 수학 시간을 이용하여 실시하였다.

### 2. 본 검사

예비검사를 통해서 수정·보완하여 작성한 본 검사지를 연구 대상으로 표집된 학생 210명 모두에게 실시하였고, 실시 방법은 해당 학교의 수학 교사를 통하여 수학 시간을 이용하여 실시하였다.

또한 검사 자료의 신뢰성을 높이기 위하여 사전에 연구자와 해당 교사간에 다음과 같은 검사에 대한 충분한 논의가 이루어 졌다 ;

① 검사 시행전 검사의 목적과 답안 작성 요령 등에 대해 학생들에게 자세히 설명한다.
② 검사에 소요되는 시간은 50분으로 한다.
③ 검사 실시후 문제지(답지)는 모두 회수한다.
④ 의문 사항은 손을 들어 교사의 지시를 받도록 한다.
⑤ 학생 상호간에 영향을 끼치지 않도록 주의 한다.

검사는 1993년 9월 8일(K중)과 9일(D중, S중)에 이루어 졌고, 답지는 별도로 작성하지 않았으며, 검사지에 바로 기입하도록 하였다.

D. 자료의 처리 및 분석

1. 채점 방법

증명 검사의 배점은 CDASSG에서 이용한 방법을 사용하였다. 즉, 증명 검사의 점수는 Proof Total(PT)과 Proof Correct(PC)의 두 가지 방식으로 산출하였다.

PT의 점수는 각 문항당 4점씩 총 40점 만점이고, PC의 점수는 완전한 증명을 요구한 5~10번의 6개의 문항 중에서 제대로 증명한 문항수이다. 즉, 5~10번의 6개 문항 중 각 3점 이상을 받은 문항수가 곧 PC 점수이므로 PC는 0~6점 사이이다.

예를 들면, A, B 두 학생의 배점에 대한 이들의 PT와 PC 점수는 다음 <표 2-3>과 같다.

<표 2-3> A, B 학생의 PT와 PC점수

| 문항: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | PT | PC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A : | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 | 2 | 4 | 1 | 0 | 4 | 24 | 3 |
| B : | 3 | 2 | 3 | 4 | 4 | 3 | 2 | 4 | 4 | 3 | 32 | 5 |

채점의 기준은 Senk(1982), Stevenson(1990) 등이 이용한 방식을 따랐는데, 구체적인 내용은 다음과 같다.

1) 문항 1~2번
   0점: 아무것도 쓰지 않거나 모두 틀리게 답한 경우
   1점: 다음 각 경우에 1점씩
   * 도형을 옳게 그리고 기호를 바르게 나타낸 경우
   * 가정을 옳게 쓴 경우
   * 결론을 옳게 쓴 경우
   * 명제의 역을 옳게 쓴 경우
2) 문항 3~4번
   각 빈 칸 마다 1점씩
3) 문항 5~10번
   4점: 증명의 모든 전개 과정이 논리적으로 유효하고, 각 증명 단계에 맞는 이유를 정확히 기술하며, 용어나 기호, 정리의 이름 등이 명확한 경우
   3점: 증명의 각 단계들이 논리적으로 유효하지만, 용어나 기호, 정리의 이름(예컨데, 합동 조건 등)등에 잘못이 있거나 쓰지 않은 경우
   2점: 증명의 반 정도를 유효하게 연역해 내었을 경우
   1점: 적어도 1개의 타당한 연역을 하고 그 근거를 말했을 경우
   0점: 응답을 하지 않았거나 전혀 무의미한 것만 말했을 경우

2. 오류 분석

오류 분석은 완전한 증명을 요구한 5~10번의 문항에 대해서 학생들이 검사지에 직접 기술한 증명 과정을 보고 분석하였다.

학생들이 어떤 문항에 대해 옳은 답을 제시했거나(4점) 전혀 응답을 하지 않은 것은 오류 분석의 대상에서 제외시켰다. 또 같은 문제를 증명하는 과정에서 연속해서 오류가 발생하는 경우에는 제일 먼저 발생한 오류만을 분석하고, 선행 오류에 기인하는 다음 단계의 오류는 고려하지 않았으며, 210명의 학생들의 답지로부터 총 647개의 오류를 뽑아 분석을 실시하였다.

본 연구에서 분류한 오류의 유형은 Becker (1982)가 설정한 기하 증명 과정에서 나타나는 오류의 분류 모델 8가지(특별한 지식의 부족, 문장이나 도형의 한 가지 부분이나 요소의 부적절한 이해에 의한 오류, 어떤 요소의 일부 형태가 우세함으로 기인하는 오류, 부호화·부호해독·재부호화를 할 때 정보교환에 기인하는 오

류, 연산자를 적용할 때 정보를 잃는 것, 연산자의 부적절한 적용으로 인한 오류, 더 수준 높은 단위의 부적절한 이해에 의한 오류, 시행착오 전략)를 참고로 하여 처음에는 아래의 9가지 중 A, B, C, D, F, G, H의 7가지를 가지고 분류하였는데, 612개(94.5%)는 분류할 수 있었으나 35개(5.5%)는 여기에 속하지 않은 것이었다. 이 중 한 단계까지는 맞으나 그 다음 단계가 생략되었거나 중간 단계를 빠뜨린 경우의 25개(3.9%)는 'E. 증명 과정의 일부 생략'으로 명명하였고, 나머지 10개(1.6%)는 학생들의 답이 글자가 흐릿하거나 애매모호하여 식별이 곤란하고, 학생들이 답한 의도를 연구자가 전혀 알 수 없는 경우로써, 이것은 'I. 오류의 애매모호함'으로 이름붙여 다음과 같이 9 가지로 분류하게 되었다.

A: 가정을 잘 이용하지 못하는 오류
B: 도형에 집착하여 생기는 오류
C: 연산자의 잘못된 적용
D: 연산자의 잘못된 실행
E: 증명 과정의 일부 생략
F: 결론을 바르게 내리지 못함
G: 기술적인 오류
H: 논리적 추론의 결여
I: 오류의 애매 모호함

각 범주의 구체적인 내용과 예는 Ⅳ장에서 논의할 것이다.

### 3. 자료의 분석 방법

'연구 문제 1'의 증명 능력 성취 수준을 알아보기 위해서 검사 결과를 간단한 기술 통계(Descriptive Statistics)를 사용하여 PT와 PC에 대한 평균, 표준편차, 최소-최대 등을 조사하고, '연구 문제 2'의 남·녀 성차를 알아보기 위하여는 t-검정을 실시하였으며, '연구 문제 3'의 오류분석에서는 위에서 설정한 각 오류 범주에 대해서 학생들이 답한 프로토콜(protocol)을 이용하여 전체 오류에 대한 백분율로 나타내었다. 이상의 모든 계산은 개인용 컴퓨터의 SPSS / PC⁺와 계산기를 이용하여 처리했다.

## Ⅲ. 오류 모델의 설정

오류 모델은 학생들이 증명을 하는 과정에서 발생하는 오류들을 종류별로 분류해 보고 그에 맞는 명칭을 붙이는 것으로서, 이것은 학생들이 주로 범하게 되는 오류 형태를 파악하여 앞으로 교사들이 그들의 증명 약점을 이용하여 오류를 줄이기 위한 수업 방법을 구상해 나가는 데 중요한 역할을 하게 될 것이다. 본 연구에서는 9 가지의 오류 범주로 나누었으며, 각 범주에서의 일례를 학생들의 프로토콜을 이용하여 들어보면 다음과 같다.

### A. 가정을 잘 이용하지 못하는 오류

주어진 문제의 전제 조건을 잘못 이해하거나 활용을 잘 하지 못하여 발생하는 오류로서 세부 내용은 다음과 같이 구분하였다.

1) 가정하지 않은 것을 가정으로 이용하는 경우: 여기에는 결론을 가정으로 이용하는 것까지 포함한다.

<예 1> 7번 문항에서의 프로토콜

증명: $\overline{AO} = \overline{OB}$ 가정

$\angle OAP = \angle OBP = 90$ RHS 합동

$\overline{AP} = \overline{PB}$ 공통

결론

OP 공통

2) 가정에 너무 집착하여 그 이상은 생각하지 못하는 경우: 주로 가정 이외에는 더 이상

진술하지 못하는 경우이다.

<예 2> 9번 문항에서의 프로토콜

증명:

$\overline{AB} = \overline{AC}$, AD가 공통, ∠BAD = ∠CAD

∴ △ABD ≡ △ADC 합동(SAS)

B. 도형에 집착하여 발생하는 오류

문제의 가정을 무시하고 도형의 직관적인 요소에 너무 집착하여 기인하는 오류로서 예를 들면 다음과 같다.

<예 3> 10번 문항에서의 프로토콜

증명:

∠APS와 ∠BPQ는 90°이므로 ∠SPQ=∠R

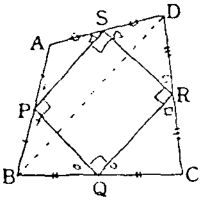
∠BQP와 ∠CQR은 90° 〃 ∠PQR=∠R

∠SDR와 ∠QRC는 90° 〃 ∠QRS=∠R

∠ASP와 ∠RSD는 90° 〃 ∠PSR=∠R

∴ □PQRS는 직사각형.

∴ □PQRS는 평행사변형.




C. 연산자의 잘못된 적용

연산자(operator)를 적용하는데 있어서 'AAA'와 같은 실제로 존재하지 않는 합동조건의 적용 또는 'SAS'를 이용해야 되는데 'ASA'를 이용하는 등과 같은 부적절한 이용으로 인한 오류이다. 이것은 주로 증명에 필요한 정리나 정의의 선택과 관련된 문제인데, 구체적으로 다음과 같이 구분하였다.

1) 필요한 정리나 정의를 잘못 선택하는 경우: 예를 들어 'AA' 닮음조건을 이용해야 되는데, 다른 조건을 이용한 경우이다.

<예 4> 8번 문항에서의 프로토콜

증명: △APQ, △ABC에서

ㄱ. ∠QAP = ∠BAC = 맞꼭지각

ㄴ. $\overline{QP} // \overline{BC}$ 이므로

닮음의 조건 대응하는 두 변의 길이의 비가 같고 끼인 각의 크기가 ~~같으므로~~

∴ △APQ ∽ △ABC

2) 증명할 필요가 없는 곳에 정리 또는 정의를 적용하는 경우: 이미 성립되어 있는 가정이나 도형의 일부분을 다시 증명하려는 것과 같은 것이다. 이렇게 함으로써 오히려 다음 증명을 하는데 혼동을 가져오게 된다.

<예 5> 9번 문항에서의 프로토콜

증명:

∠BAD = ∠DAC (가정) $\overline{AB} = \overline{AC}$ (가정)

$\overline{AD}$ = 공통 (∠BAD = ∠DAC 이므로)

∴ △ABD ≡ △ADC ∴ $\overline{AB} = \overline{AC}$

∠B = ∠C ∴ ∠PBD = ∠PBC

3) 정리나 정의의 성질을 밝히지 않은 경우 증명 과정이 어느 정도 논리적으로 유효하지만 정리나 정의의 이름 또는 성질을 밝히지 않으므로써 그 학생의 지식을 정확히 파악할 수 없으므로 이것도 오류의 일종으로 분류하였다.

4) 정리나 정의의 이름 또는 성질을 잘못 말하는 경우: 예를 들어 'AA 닮음'인데 'SSS

합동'으로 잘못 말한 경우이다.

<예 6> 8번 문항에서의 프로토콜

증명:

$\angle QPB = \angle PBC$ ∴ 엇각

$\angle PQC = \angle QCB$ ∴ 엇각

$\angle QAP = \angle BAC$ ∴ 맞꼭지각

∴ $\triangle APQ \backsim \triangle ABC$ SSS합동

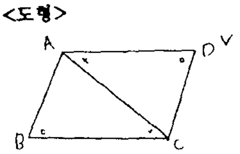
D. 연산자의 잘못된 실행

정리나 정의를 적용하는 과정에서 잘못이 있는 경우로, 일반적으로 올바른 결론의 변경을 낳게 된다. 예를 들어 'ASA' 합동조건을 적용하였으므로 ∠ABC = ∠CDA를 ∠BAC = ∠DCA로 또는 $\overline{AC} = \overline{AC}$를 $\overline{AD} = \overline{CB}$로 나타내야 할 것이다.

<예 7> 6번 문항에서의 프로토콜

| 증명: 주 장 | 이 유 |
|---|---|
| $\angle ABC = \angle CDA$ | 대응각 이므로 |
| $\overline{AC} = \overline{AC}$ | 공통 |
| $\angle ACB = \angle CAD$ | 엇각 |
| 따라서 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ | ASA 합동 |

<도형>



E. 증명 과정의 일부 생략

현 단계까지는 맞으나 그 다음 단계의 과정이 생략되었거나 또는 → n-1 단계 → n 단계 → n+1 단계 → …의 과정에서 n 단계가 빠진 경우 등이다. 예를 들어, 단계 *에서 **로 가는 과정에서 '△ABP ≡ △ACP ∴ $\overline{PB} = \overline{PC}$ ∴ △PBC는 이등변삼각형이다'가 옳은 연역이다.

<예 8> 9번 문항에서의 프로토콜

증명:

$\overline{AB} = \overline{AC}$

$\angle BAD = \angle CAD$

$\overline{AP}$ ∴ 공통

$\triangle ABP \equiv \triangle ACP$ (SAS) ---------- *

∴ $\triangle PBC$ 이등변 삼각형 ---------------- **

F. 결론을 바르게 내리지 못하는 경우

1) 결론을 쓰지 않은 경우: 결론 전 단계까지는 잘 연역해 내었으나 결론을 진술하지 않은 경우이다. 예를 들어 두 삼각형이 합동이라는 것 까지는 잘 연역해 내었으나 마지막 결론인 $\overline{AP} = \overline{BP}$를 나타내지 않았다.]

<예 9> 7번 문항에서의 프로토콜

| 증명: 주장 | 이유 |
|---|---|
| $\angle AOP = \angle POB$ | 가정 |
| $\angle PAO = \angle PBO$ | 가정 |
| $\overline{OP} = \overline{OP}$ | 공통 |
| $\triangle AOP \equiv \triangle PBO$ | ↓ ~~(SAS)~~ (RHA) |

2) 결론을 틀리게 기술한 경우 결론 전 단계까지 잘 연역해 내고, 결론을 진술했으나 문제가 요구한 결론을 틀리게 기술한 경우이다. 예를들어, 결론이 '양변에 내린 수선의 길이는 같

다'이므로 올바른 결론은 $\overline{AP} = \overline{BP}$이다.

<예 10> 7번 문항에서의 프로토콜1

증명: $\angle AOP = \angle BOP$
$\overline{PO}$ 공통변
$\angle APO = \angle BPO$
$\triangle AOP \equiv \triangle BOP$ (ASA)
$\therefore \overline{AO} = \overline{BO}$

G. 기술적인 오류

기호를 잘못 표기하거나 빠뜨리는 경우(예를 들면, ≡ ↔ ∽, $\overline{AB}$→AB, ∠ABC→ABC 등) 또는 문자를 잘못 옮겨 적는 경우이다. 이것은 부주의 또는 실수로 인한 것이 많은 것으로 생각된다. 예를 들어, 두 삼각형이 닮음이므로 '≡'이 아니라 '∽'로 나타내야 한다.

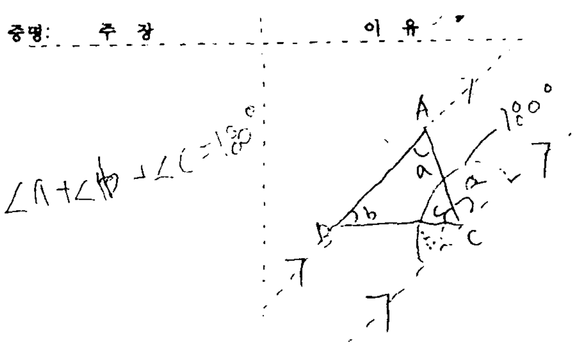
<예 11> 8번 문항에서의 프로토콜

증명: $\triangle QPA$ 와 $\triangle ABC$에서
$\angle QAP = \angle BAC$ — 동위각
$\angle PQA = \angle ACB$ — 엇각
$\angle QPA = \angle ABC$ — 엇각
따라서, $\triangle QPA \equiv \triangle ABC$

H. 논리적 추론의 결여

정리의 적용, 실행 등 증명에 필요한 기본 지식은 잘 알고 있으나 증명 과정의 각 단계가 논리적이지 못하거나 다음 예와 같이 그림으로만 나타낸 경우이다. 보조선을 그어 그림을 정확히 그렸으나 증명 과정을 기호와 이유를 들어 논리적으로 연역하지 못했다.

<예 12> 5번 문항에서의 protocol




I. 오류의 애매 모호함

학생들이 주어진 문항의 증명을 하는 과정에서 글자가 흐릿하거나 애매 모호하여 위와 같은 오류로 분류하기가 곤란하고, 또 학생이 제시한 답을 보고 학생의 의도를 정확히 알 수 없는 경우이다.

IV. 결과 분석 및 논의

A. 결과

본 장에서는 연구 문제에 따라 연구의 결과를 세 부분으로 나누어 제시하였다.

1. 연구 문제 1

연구 문제 1 : 기하 증명 능력 검사를 통하여 중 2 과정을 마친 학생들의 증명 능력은 어느 정도인가?

<표 4-1>은 남학생 105명과 여학생 105명의 전체 표본에 대한 증명 능력 검사의 PT와 PC별로 평균, 표준편차, 최소-최대를 나타낸 것이고, <표 4-2>는 PC의 각 점수에 대한 학생수와 백분율을 나타낸 것이다.

<표 4-1>에서 알 수 있듯이 PT의 1-2번과 3-4번의 전체평균은 각각 4.60(57.44%)과 4.37(54.58%)로서 도형을 그리고 기호로 나타내기,

가정과 결론 및 명제의 역을 기호로 나타내기 그리고 증명 과정의 빈칸 채우기는 약간의 능력이 있는 것으로 나타나고 있으나, 5-10번의 완전한 증명을 하도록 하는데 있어서는 전체평균이 8.11(33.81%)로서 증명을 하는데서의 진술 능력이 약하다고 볼 수 있으며, 또한 PT 전체 점수에 대한 평균이 17.04(42.61%)로 전반적으로 증명을 해 나가는데서의 능력이 부족한 것으로 보인다. 한편, PC에서도 전체평균이

<표 4-1> PT와 PC에 대한 통계값 (m: 남, f :여)

| | | | mean | % | s.d | min-max |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P T | 1 - 2 (8점) | m | 4.75 | 59.40 | 1.874 | 0-8 |
| | | f | 4.44 | 55.48 | 1.315 | 0-8 |
| | | m.f | 4.60 | 57.44 | 1.595 | 0-8 |
| | 3 - 4 (8점) | m | 4.40 | 55.00 | 1.855 | 0-8 |
| | | f | 4.33 | 54.17 | 2.082 | 0-8 |
| | | m.f | 4.37 | 54.58 | 1.859 | 0-8 |
| | 5 - 10 (24점) | m | 8.05 | 33.53 | 5.812 | 0-23 |
| | | f | 8.18 | 34.09 | 5.477 | 0-23 |
| | | m.f | 8.11 | 33.61 | 5.645 | 0-23 |
| | SUM (40점) | m | 17.18 | 42.95 | 8.166 | 0-39 |
| | | f | 16.90 | 42.26 | 7.258 | 0-36 |
| | | m.f | 17.04 | 42.61 | 7.172 | 0-39 |
| P C (6점) | | m | 1.93 | 32.17 | 1.257 | 0-6 |
| | | f | 1.84 | 30.65 | 1.016 | 0-6 |
| | | m.f | 1.89 | 31.43 | 1.137 | 0-6 |

<표 4-2> PC의 각 점수에 대한 학생수와 백분율

| PC점수 | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 남 | n | 37 | 17 | 14 | 12 | 9 | 10 | 6 | 105 |
| | % | 35.2 | 16.2 | 13.3 | 11.4 | 8.6 | 9.5 | 5.7 | |
| 여 | n | 33 | 22 | 17 | 10 | 11 | 9 | 3 | 105 |
| | % | 31.4 | 21.0 | 16.2 | 9.5 | 10.5 | 8.6 | 2.9 | |
| 전체 | n | 70 | 39 | 31 | 22 | 20 | 19 | 9 | 210 |
| | % | 33.3 | 18.6 | 14.8 | 10.5 | 9.5 | 9.0 | 4.3 | |

1.89 (31.43%)로서 완전하게 증명을 해 낼 수 있는 능력이 약함을 말해 주는 것이라 할 수 있겠다.

<표 4-2>에서는 PC = 0 또는 1인 학생이 각각 70명(33.3%)과 39명(18.6%)으로서, 이는 완전하게 증명을 해 낼 수 있는 능력이 거의 없는 학생이 전체의 51.9%나 된다고 말할 수 있겠다. 또 약간의 증명 능력이 있다고 생각되는 학생(PC=2, 3)은 25.3% 정도이며, 또 PC=4, 5, 6인 학생을 증명 능력이 있다고 볼 때, 22.8%의 학생만이 증명을 이해하여 논리적으로 전개해 나가는 능력이 있는 것으로 나타났다.

## 2. 연구 문제 2

연구 문제 2 : 기하 증명 능력에 있어 남녀 사이에는 차이가 있는가?

이 연구 문제를 검정하기 위하여 다음과 같은 귀무 가설을 설정하였다.

귀무가설($H_0$): 중학생의 증명 능력에 있어 남녀간 평균의 차이는 없을 것이다.

이 가설을 검증하기 위하여 PT와 PC에 대한 남녀 두 집단(남자 105명, 여자 105명)에 대한 t-검정을 실시하였으며, 검정 결과는 <표 4-3>와 같다.

<표 4-3>에서 등분산 검정의 결과는 PT의 1-2번에 대해서는 두집단의 분산이 같지 않으

<표 4-3> 증명 능력에 대한 등분산 검정과 t-검정의 결과 요약

| 검정 | | 등분산 검정 | | 두 집단 t-검정 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 배점 | 문항 | F-Value | 유의확률 | t-Value | 자유도 | 유의확률 |
| P T | 1-2 | 1.72 | 0.006* | 0.92 | 194.50 | 0.358 |
| | 3-4 | 1.08 | 0.694 | 0.13 | 208 | 0.897 |
| | 5-10 | 1.12 | 0.573 | -0.64 | 208 | 0.520 |
| | 전체 | 1.38 | 0.104 | 0.41 | 208 | 0.685 |
| PC | 5-10 | 1.33 | 0.150 | 0.66 | 208 | 0.507 |

(* : $p < 0.05$)

므로 ($P < 0.05$) 이분산 t-검정을 이용하였고, 다른 영역에 대해서는 두집단의 분산이 같으므로 ($P > 0.05$) 남녀간의 평균이 같다는 검정은 등분산 t-검정을 이용하여 계산하였다.

<표 4-3>에서 볼 수 있는 바와 같이 증명 능력 검사에서의 PT에 대한 t-검정 결과는 모두 유의확률이 일반적인 유의수준 0.05보다 크기 때문에 두 집단의 평균이 같다는 귀무가설을 기각할만한 증거가 없다고 해석해야 할 것이다. 따라서, 증명 능력에 있어서 PT에서 남녀간의 평균의 차이는 의미있게 나타나지 않았다. 또한 PC에 대한 t-검정 결과도 t 값이 0.66이고 유의확률이 0.507 ($P > 0.05$)로써 남녀간의 차이가 나타나지 않았다. 즉, 완전하게 증명을 해 낼 수 있는 능력에서의 남녀간의 차이는 없다는 것이다.

따라서 대구 시내 중학교 3학년 학생은 증명 능력에서의 PT와 PC에서 <표 4-1>에서 처럼 PT의 5-10번을 제외하고는 남자가 여자보다 평균점수는 약간 높게 나타났지만 남녀간의 차이는 없는 것으로 보인다.

### 3. 연구 문제 3

연구 문제 3 : 기하 증명 과정에서 나타나는 학생들의 오류에는 어떤 것이 있는가?

오류 분석은 완전한 증명을 요구한 5-10번의 문항에서 210명의 학생이 답한 protocol을 통해 무응답을 한 학생과 4점을 받은 학생을 제외하고 총 647개의 오류를 찾아내어 분석을 실시하였다.

<표 4-4>는 각 문항별로 오류가 발생한 학생, 4점을 받은 학생, 무응답을 한 학생수를 나타낸 것이다.

응답을 한 학생 중 오류가 가장 많이 발생한 문항은 7번(63.3%)인데, 이것은 명제의 진술을 가정과 결론으로 나누어 기호로 나타내지 않으문항은 10번(54.8%)인데, 문항 10은 중점연결정리를 이용하는 것으로 학생들이 정리의 내용을

<표 4-4> 오류 발생, 무응답, 4점 받은 학생의 빈도표

| 문 항 | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 오류발생 | n | 92 | 112 | 133 | 121 | 110 | 79 | 647 |
| | % | 43.8 | 53.4 | 63.3 | 57.6 | 52.4 | 37.6 | 51.3 |
| 4점 | n | 33 | 45 | 20 | 39 | 26 | 16 | 179 |
| | % | 15.7 | 21.4 | 9.5 | 18.6 | 12.4 | 7.6 | 14.2 |
| 무응답 | n | 85 | 53 | 57 | 50 | 74 | 115 | 434 |
| | % | 40.5 | 25.2 | 27.2 | 23.8 | 35.2 | 54.8 | 34.4 |
| 계 | n | 210 | 210 | 210 | 210 | 210 | 210 | 1260 |

잘 기억하지 못하는데서 기인한 것 같다.

647개의 오류를 III장에서 설정한 오류 범주에 의해 각 범주별과 문항별로 얼마나 많은 오류가 발생했나를 알아 본 것이 <표 4-5>이다. <표 4-5>에서 오류 범주별로 살펴보면, <C. 연산자의 잘못된 적용>이 전체 오류의 37.9%로서 가장 많으며, 이중 증명에 필요한 정리나 정의의 잘못된 선택(C-1)과 연역에 대한 이유로서 정리나 정의의 성질을 밝히지 않은 것(C-3)이 가장 많은 것으로 나타났으며, <D. 연산자의 잘못된 실행으로 인한 오류(18.7%)도 두번째로 많이 나타나는데, 이는 학생들이 정리를 이해하고 기억하여 증명에 적용하고 실행하는 데 많은 어려움이 있다는 것을 나타내는 것이다.

또한, <G. 기술적인 오류>도 11.4%로 많이 나타나고 있는데, 학생들의 부주의 또는 실수로 잘못 표기하는 경우도 있겠으나 평소 평가의 채점을 정확하게 하거나 기호의 쓰임을 올바르게 지도할 필요가 있겠다.

그리고 <B. 도형에 집착하여 발생하는 오류>도 (10.5%)로 빈번히 발생하고 있음을 볼 수 있는데, 특히 4번 문제의 빈칸 채우기에서 두번째 $\triangle APQ \square \triangle PBR$ 는 '∽' 대신에 '≡' 이라고 적은 학생이 약 70%나 되었다는

것은 두 삼각형이 그림으로는 합동인 것처럼 보이므로, 닮음 성질을 무시하고 도형의 직관적인 면에 집착하는 경향이 많은 것으로 보인다.

또한, <A. 가정을 잘 이용하지 못하는 오류> (7.5%), <F. 결론을 바르게 내리지 못하는 오류> (5.3%), <H. 논리적 추론의 결여> (5.1%)도 종종 나타나고 있음을 볼 수 있다.

문항별로 살펴보면, 5번 문항은 <C-1. 필dy한 정리나 정의를 잘못 선택하는 경우>(29.3%)가 가장 많은데, 이는 보조선을 그어 증명을 해야 하는 발견술적인 전략이 부족한 때문인 것 같다. 문항 6에서 <D. 연산자의 잘못된 실행> (28.6%)이 많은 이유는 이용할 수 있는 평행사변형의 성질이 많아 적용하는데 있어서 성질들 간에 혼란이 온 것으로 생각되며, 도형을 잘못 그려서 증명을 틀리게 한 학생은 7.2% 정도였다. 문항 7에서는 <C-4. 정리나 정의의 성질을 잘못 말하는 경우(> 17.3%)와 <D. 연산자의 잘못 된 실행> (15.0%)이 많았는데, 학생들이 직각삼각형의 합동조건(RHA)을 이용하면 간단한데 일반적인 삼각형의 합동조건(ASA, SAS)을 적용하려다 실패하는 경우가 많았다.

<표 4-5> 범주별 오류 빈도표

| 문항 / 오류종류 | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 계 소계 | 계 전체 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | a-1 | 4 | 1 | 16 | 1 | 4 | 2 | 28 | 47 |
| | a-2 | \ | 6 | \ | 2 | 9 | 2 | 19 | 7.5% |
| B | | 8 | 8 | 12 | 9 | 12 | 19 | 68 | 68 |
| | | | | | | | | | 10.5% |
| C | c-1 | 27 | 18 | 15 | 15 | 9 | 16 | 100 | |
| | c-2 | 3 | 2 | \ | 2 | 17 | 1 | 25 | 237 |
| | c-3 | 1 | 9 | 10 | 27 | 7 | 4 | 58 | 37.9% |
| | c-4 | 6 | 3 | 23 | 16 | 3 | 3 | 54 | |
| D | | 11 | 32 | 20 | 14 | 25 | 19 | 121 | 121 |
| | | | | | | | | | 18.7% |
| E | | 5 | 2 | 9 | 3 | 4 | 2 | 25 | 25 |
| | | | | | | | | | 3.9% |
| F | f-1 | \ | 4 | 4 | 12 | 1 | \ | 21 | 33 |
| | f-2 | \ | \ | 6 | 2 | 4 | \ | 12 | 5.3% |
| G | | 15 | 7 | 13 | 16 | 13 | 10 | 74 | 74 |
| | | | | | | | | | 11.4% |
| H | | 6 | 20 | 3 | 1 | 2 | \ | 32 | 32 |
| | | | | | | | | | 5.1% |
| I | | 6 | \ | 2 | 1 | \ | 1 | 10 | 10 |
| | | | | | | | | | 1.6% |
| 계 | | 92 | 112 | 133 | 121 | 110 | 79 | | 647 |
| (%) | | 14.2 | 17.3 | 20.6 | 18.7 | 17.0 | 12.2 | | |

8번 문항은 <C-3. 정리나 정의의 성질을 밝히지 않은 경우> (29.3%)가 많았으며, 문항 9는 <D. 연산자의 잘못된 실행> (22.7%)이 가장 많은 것으로 나타나고 있다. 이것은 증명 과정이 크게 '[단계 1] $\triangle ABP \equiv \triangle ACP$ 또는, $\triangle PBD \equiv \triangle PCD$, [단계 2] $\overline{PB} = \overline{PC}$, [단계 3] 따라서, $\triangle PBC$는 이등변삼각형이다'의 세 단계를 실행하는 과정에서 단계적인 절차의 미숙함이 많았다.

문항 10에서는 <B. 도형에 집착하는 오류> (24.1%)와 <D. 연산자의 잘못된 실행> (24.1%)이 비슷하게 많이 나왔는데, 중점연결정리를 이용해야 되겠다는 것은 알지만 적용을 제대로 하지 못하는 것과 도형의 직관적인 면에 많이 치중하는 이유는 정리의 내용을 정확히 기억하고 있지 못하며, 정리의 내용을 평행사변형의 성질과 관련을 잘 짓지 못하는 것이라 할 수 있겠다.

## B. 논의

본 연구의 연구 문제를 바탕으로 연구 결과를 논의하면 다음과 같다.

첫째, 중 2 과정을 마친 학생들의 기하 증명 능력은 어느 정도인지 알아 보았다. 도형 그리기, 가정과 결론 및 명제의 역을 진술하는 데

있어서는 약간의 능력이 있었으나, 완전한 증명을 연역해 내는 문제에 있어서는 능력이 부족하였다. 또 상위 학생 23% 정도를 제외한 나머지 학생들은 연역적인 증명을 하는 데 있어서 많은 장애를 갖고 있었다.

이러한 결과는 중 2 학생의 60% 정도가 van Hiele 수준 0과 1(연역적인 증명이 불가능한 수준)에, 25%의 학생만이 수준 3과 4(연역적인 증명이 어느 정도 가능한 수준)에 이르고 있다는 최현호와 한태식의 연구 결과와 어느 정도 부합된다고 볼 수 있어 중학교 2학년 학생에게 형식적인 증명을 하도록 하는 것은 무리라는 점을 시사한다고 할 수 있을 것이다.

둘째, 기하 증명 능력에는 남녀 차이가 있는지를 알아 보았다. 결과적으로 완전하게 증명을 연역해 내는 데 있어서 남자와 여자의 차이는 없었다. 따라서, 남자가 여자보다 기하 증명을 논리적으로 잘 연역해 낼 수 있을 것이라는 선입견을 버려야 할 것이다.

이와 같은 결과는 증명 시험에서의 남녀 차이는 나타나지 않는다는 기존의 연구 결과 (Senk & Usiskin, 1983; 최현호, 한태식, 1990)와 부합되는 것으로 생각된다.

세째, 기하 증명 과정에서 발생하는 오류에는 어떤 것이 있는가를 알아 보았다. 학생들이 정리나 정의를 정확히 이해하고 기억하여 증명에 적용하고 실행하는 데 가장 많은 어려움을 겪고 있었다.

Skemp(1981)의 실험을 통해 보면 이해를 강조하여 수학의 정리나 정의를 지도한 집단은 그렇지 않은 집단보다 실험 후의 기억 정도 및 전이 정도에서 좋은 효과를 나타내어 문제 풀이에 효율적인 반응을 보였다고 한다 (김옥경, 1990). 따라서, 정리를 지도할 때 학생들이 이해를 잘 할 수 있도록 그 정리가 조건 또는 가정에 따라 어떤 증명에 용이하게 쓰인다는 것을 강조하여 지도할 필요가 있다. 또한, 많은 학생들이 논리적으로 연역은 어느 정도 해 내지만 그 근거를 밝히지 못하는 것은 평소 증명을 할 때 근거를 기술하는 습관의 부족 또는 정리의 내용을 명확히 이해하지 못하고 있는 것으로 보인다.

그리고, 평가의 채점을 정확히 하거나 기호의 쓰임을 바르게 지도하여 부주의 또는 실수로 인한 기술적인 오류를 줄일 수 있도록 해야겠다. 또한, 학생들이 도형의 직관적인 면에 집착하는 경향이 많은 것으로 보이는데, 결국 도형에 집착하므로서 가정을 잘 이용하지 못하거나 정리의 적용과 실행에 영향을 끼치게 되고, 논리적 추론의 약점도 나타나게 될 것으로 생각되므로 증명과 정리를 지도함에 있어 도형을 올바르게 이용할 수 있도록 해야겠다.

## V 결론 및 제언

중등학교 수학에서 증명은 조리있게 사고하고, 논리적으로 사고하도록 정신을 훈련시키는 데 중요한 역할을 한다. 학생들은 수학에서의 증명의 가치를 인식하고, 증명을 이해하며, 증명을 구성하는 능력을 개발해야 한다. 또한 교사는 학생들이 증명 과정에서 보이는 약점을 잘 파악하여 오류를 개선하는 방안을 강구하도록 해야 할 것이다. 이에 따라 본 연구에서는 증명 능력 검사 도구를 이용하여 학생들의 성취 수준과 오류 분석을 수행하였는데, 결과 분석에 의해 얻어진 결론은 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 대구 시내 중학교 3학년 학생의 기하 증명에 대한 능력은 PT 전체점수의 평균은 42.61%, PC의 평균은 31.43%로서 전반적으로 증명을 하는데서 어려움을 겪고 있으며<표 4-1>, 특히 PC = 0 또는 1인 학생 즉, 증명을 거의 할 수 없는 학생이 51.9%나 되었으며, 증명 능력이 있다고 간주할 수 있는 학생 즉, PC=4, 5, 6인 학생은 22.8% 정도에 불과한 것으로 나타났다. 이것은 중학생들에게 형식적 증명을 하도록 요구하는 것은 무리일 것이라는 점을 시사해 준다고 볼 수 있겠다.

둘째, 기하 증명 능력에 있어서의 PT와 PC

모두에서 t-검정 결과 남녀간의 평균의 차이는 없는 것으로 나타났다<표 4-3>. 따라서, 남자가 여자보다 증명을 더 잘할 것이라는 보통 가지고 있는 선입견을 버리고 수업을 해야 할 것이다.

세째, 기하 증명 과정에서 발생한 학생들의 오류를 분석해 본 결과 학생들은 그들이 배운 정리나 정의를 확실히 이해하지 못하거나 또는 정리의 내용이나 성질을 알고 있으면서도 활용을 할 수 있는 능력이 부족한 것으로 보인다. 또한 학생들이 부주의 또는 실수로 잘못 표기하는 경우도 있었는데, 평소 평가의 채점을 정확하게 하거나 기호의 쓰임을 올바르게 지도할 필요가 있겠다. 그리고 도형의 직관적인 요소에 너무 치우치지 않도록 증명과 정리를 지도함에 있어 도형을 바르게 이용할 수 있도록 해야겠다.

본 연구로부터 얻은 연구 결과와 연구 과정에서 나타난 제한점을 보완하여 보다 좋은 후속 연구를 위하여 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 특히 기하 영역에서는 산술적인 문제 풀이보다 증명 과정을 기술하는 주관식 평가 문항을 늘이고, 평가후 가능하면 오류 분석을 하여 그 결과를 학생들에게 주지시켜 오류의 발생을 줄이도록 해야 할 것이다.

둘째, 현행 기하 단원의 교육과정이 우리나라 학생들의 기하 사고 수준과 부합되고 있는지를 면밀히 측정하여 기하 교육 과정에 대한 재고를 할 필요가 있겠다.

세째, 학생들의 증명 능력을 잘 평가하고 가능한 모든 오류를 찾을 수 있는 신뢰성 있고 타당성 있는 검사 도구의 개발이 절실히 필요하다.

네째, 본 연구에서는 표본을 대도시의 학생 210명만을 대상으로 했지만 중·소도시와 농어촌 등 여러 지역에 걸쳐 더 많은 표본을 대상으로 조사하여 오류에 대한 분석이 있어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌

김옥경 (1990). 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류 모델에 관한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문. p. 38.

최현호, 한태식 (1990). 기하 영역의 van Hiele 이론과 증명능력에 관한 연구. 수학교육 논총, 제 8집. 대한수학회. 219-241.

Becker, G. (1982). Difficulties and errors in geometric proofs by grade 7 pupils. In A. Vermandel (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference for the PME. 123-127).

Jeon, P. K. (1988). Geometry problem solving of Korean middle school students : An analysis of representation and transfer. Unpublished doctoral dissertation. The University of Pittsburgh. 25-36.

Senk, S. L. (1982). Achievement in writing geometry proofs. Paper Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (New York, Ny, March 18-23), Chicago Univ. ED 218-091. 4-16.

Senk, S. L., & Usiskin, Z. (1983). Geometry proof writing : A new view of sex differences in mathematics ability. American Journal of Education 20. pp.187-201.

Solow, D. (1984). Reading, writing, and doing mathematical proofs. Proof techniques for geometry. Dale Seymour Publications. 1-3.

Stevenson, Z. et. al. (1990). Reliability of using a focused-holistic scoring approach to measure student performance on a geometry proof. Paper Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Asso- ciation (Boston, Ma, April 16-20). ED 319-748.