韓國海岸・海洋工學會誌
第5卷 第4號, pp. 279~287, 1993年 12月

一定 水深 위를 進行하는 波浪의 時間에 따른 變化
Propagation of Transient Waves over a Constant Depth

徐 承 男*
Seung Nam Seo*

要 旨: 一定 水深 위를 전파하는 三次元 波浪의 시간에 따른 변화를 Green函數를 사용하여 나타내었다. 本 論文에서 구한 解에 적절한 假定을 附與하면 既存의 解가 유도되므로 本 解는 보다 一般的인 解임을 立證하였다. 誘導한 解를 數値積分하여 波浪 分散效果에 의한 波高 減少를 나타내고 이를 分析하였다.

Abstract□Three dimensional linear transient wave propagation over a constant depth is presented using Green's function method. Present solution is proved to be a more general solution from which the existing solutions are obtained by using the appropriate assumptions. The effect of dispersion on wave height attenuation is shown and discussed on the numerical results of the solution.

1. 緒 論

강한 低氣壓 또는 海底地震과 같은 대규모 外力에 의해 생성된 海面 變位의 時間 變化 過程은 風成波가 發生海域으로부터 外廓으로 傳播하면서 변화되는 과정과 그 物理的 特性이 동일하다. 한편 風成波는 해상에 가장 많이 出現하는 波浪이므로 風成波의 變化過程에 대한 豫測은 學問的으로도 매우 重要한 分野일 뿐아니라 沿岸構造物 築造時 設計에 먼저 考慮되어야 하기 때문에 産業的인 側面에서도 중요하다. 그러나 風成波의 發生은 매우 複雜한 過程에 의해 이루어지는 것으로(U.S. Army Coastal Engineering Research Center, 1984; Phillips, 1977) 알려져 왔기 때문에 本 論文에서는 보다 簡單한 外力에 의해 生成된 波浪의 變化를 다루어 그 물리적 變化特性을 考察하고자 한다.

一定 水深위에 任意 時刻에서 주어진 海面 變位의 시간 변화에 관한 硏究는 오랜 기간에 걸쳐 다루어져 Cauchy-Poisson 問題라고도 불린다. 이에 대한 비교적 最近의 硏究로는 Wehausen과 Laitone(1960), Kajiura(1963), Mei(1989) 그리고 Carrier(1991)에 의해 이루어졌다. Carrier는 解의 誘導過程을 생략하고 解만을 提示하였으며 나머지 연구자들은 Green 函數를 이용하여 解를 유도하였다. Wehausen과 Laitone은 Green함수를 singular part와 regular part로 나누어 singular part의 解인 free-space Green函數를 구하고 이들의 합으로 구성된 Green函數가 原 支配方程式과 境界條件으로부터 유도되는 Green函數의 偏微分方程式을 만족하도록 regular part를 구하였다. Kajiura와 Mei는 이와 달리 유도된 Green函數의 偏微分方程式을 직접 풀어 解를 구하였으며 Kajiura는 time-dependent Green函數를 구한 반면 Mei는 Laplace 變換을 하여 이에 대한 Green函數 方程式을 만들어 time-independent Green函數를 구했다.

本 硏究에서는 Mei와 類似한 方法으로 Green 函數를 유도하고자 한다. 그러나 Mei는 Green 函數問題의 外力(forcing term)인 impulse disturbance를 境界面에 배치하여 구하였으나 본 論文에서는 impulse disturbance를 領域內에 위치시켜 Green 函數의 微分方程式이 外力을 가지는 非齊次 偏微方(inhomogeneous partial differential equation)과 齊次 境界條件(homogeneous boundary conditions)의 문제로부

*韓國海洋硏究所 海洋工學硏究部 (Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan 425-600, Korea)

터 解를 구한다. 本 論文에서 사용하는 방법은 原 支配方程式에 상응하는 Green函數를 구하는 가장 普遍的인 방법이다(Greenberg, 1978).

제 2.1절에서 線形 Cauchy-Poisson 문제를 定式化하고 Fourier-Laplace 變換을 사용하여 外力을 나타낸다. 2.2절에서 變換된 式에 相應하는 Green 函數를 誘導하고 2.3절에서 이를 이용하여 解析解를 구한다. 제 3장에서는 구한 解析解를 Carrier의 解와 비교하고 Carrier解의 적용범위 및 시간에 따른 波浪의 物理的 變化特性을 論하였다. 결국 本 論文에서는 비교적 單純한 過程에 의해서 生成된 波浪의 變化를 다루나 波浪의 중요한 特性인 分散現象에 촛점을 맞추고자 한다.

2. 支配 方程式

본 절에서는 線形 Cauchy-Poisson 問題를 定式化하고 이에 相應하는 Green函數를 유도하여 重疊原理를 사용하여 解를 구한다.

2.1 線形 Cauchy-Poisson 문제의 定式化

靜止 狀態의 一定 水深(h)의 海水面에 瞬間的인 外力이 작용하여 生成된 海面 變位의 傳播과정에 대한 支配方程式은 속도 포텐셜 ϕ을 사용하여 나타낼 수 있다. 정지 상태의 水面에 x, y축을 놓고 z축은 海面 위쪽을 향하는 座標系를 사용하면 支配 方程式은

$$\nabla^2\phi(x,\ y,\ z,\ t)=0 \tag{1}$$

海面 變位가 작다고 가정하면 境界條件을 線形化할 수 있다. 海水面의 境界條件은

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial z} \\ &\frac{\partial\phi}{\partial t}+g\zeta=-\frac{P_a(x,y,t)}{\rho},\ z=0 \end{aligned}\right\},\ z=0 \tag{2}$$

여기서 P_a는 주어진 大氣壓을, ρ는 海水密度 그리고 g는 重力 加速度를 각각 나타낸다. 海底面에서 流體는 海底面 速度의 垂直成分 $W(x,\ y,\ t)$와 같아야 함으로

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=W(x,\ y,\ t),\ z=-h \tag{3}$$

外力의 形態가 局地的이라 하면 外力에 의해 發生된 波浪의 크기도 限定됨으로 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$\phi(x,y,z,t)\to 0,\ \text{as}\ r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty \tag{4}$$

初期 條件을 나타내기 위해 式 (5)로 定義된 Laplace 변환을 사용한다.

$$\begin{aligned} &L\{f(t)\}=\bar{f}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt \\ &L^{-1}\{\bar{f}(s)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{st}\ \bar{f}(s)\ ds \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 i는 $\sqrt{-1}$이고 Γ는 直線이며 선의 오른쪽에 複素函數 $\bar{f}$의 모든 特異點들이 存在한다. 式 (1), (3)과 (4)을 각각 Laplace 變換하면

$$\nabla^2\bar{\phi}(x,y,z,s)=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z}=\bar{W}(x,y,s),\ z=-h \tag{7}$$

$$\bar{\phi}(z,y,z,s)\to 0,\ \text{as}\ r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty \tag{8}$$

한편 海水面 條件에 대한 變換은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} &-\zeta(x,y,0)+s\bar{\zeta}(x,y,s)=\frac{\partial\bar{\phi}(x,y,z,s)}{\partial z} \\ &-\phi(x,y,0,0)+s\bar{\phi}(x,y,0,s)+g\bar{\zeta}(x,y,s)=-\frac{\bar{P}_a(x,y,s)}{\rho} \end{aligned} \tag{9}$$

式 (9)에서 ζ을 消去하여 ϕ에 대한 식으로 나타내면

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z}+\frac{s^2}{g}\bar{\phi}=&-\frac{s\bar{P}_a(x,y,s)}{\rho g}-\zeta(x,y,0) \\ &+\frac{s}{g}\phi(x,y,0,0),\ z=0 \end{aligned} \tag{10}$$

式 (10)의 $\phi(x,y,0,0)$는 Mei(1989)가 보인 바와 같이 瞬間的으로 가해진 大氣壓으로 나타내지며 外力인 대기압이 없다고 假定하면 式 (11)이 된다.

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z}+\frac{s^2}{g}\bar{\phi}=-\zeta(x,y,0),\ z=0 \tag{11}$$

한편 式 (11)은 外力이 作用하여 生成된 初期海面의 變位로부터 問題가 시작되는 것으로 풀이할 수도 있다.

本 論文에서는 식 (6), (7), (8)과 (11)로 부터 Laplace 變換된 속도 포텐셜을 구하고 이를 다시 Laplace 逆變換에 의해 ϕ를 구한다. Green函數를 導入하여 Laplace 변환된 속도 포텐셜을 구하는 방법을 2.2절에서 다루기로 한다.

2.2 Green函數 유도

Green函數 문제는 Green의 제2 恒等式으로부터 시작된다.

$$\int(\bar{\phi}\nabla^2 G - G\nabla^2\bar{\phi})\, dV = \int\left(\bar{\phi}\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n}\right)dA \tag{12}$$

n의 방향은 경계면의 수직 방향을 나타내고 Green函數 G는 單位 크기의 外力에 의한 支配 方程式의 反應을 나타내는 것으로 式 (13)을 만족해야 한다.

$$\nabla^2 G(x_o, y_o, z_o;\ z, y, z) = \frac{\delta(r, z_o - z)}{2\pi r},$$
$$r = \sqrt{(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2} \tag{13}$$

여기서 첨자 o는 單位 크기의 外力이 位置하는 座標를, δ는 Delta函數를 각각 나타내며 r은 外力 位置로부터의 水平距離이다. 式 (13)에서는 Delta函數가 對稱인 것으로 看做하였다. 式 (6)과 (13)을 式 (12)의 왼편에 代入하면 外力에 의한 任意點에서의 속도포텐셜이 얻어진다. 式 (12)의 오른편 項은 境界面에서의 面積分이며 편의상 경계면을 表面(S_f), 海底面(S_b) 그리고 遠距離에 위치한 側面(S_∞)으로 나누면

$$\bar{\phi}(x, y, z, s) = \int_{(S_f + S_b + S_\infty)}\left(\bar{\phi}\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n}\right) dA \tag{14}$$

속도포텐셜에 주어진 境界條件 式 (7), (8)과 (11)을 고려하여 式 (14)를 計算할 수 있도록 다음과 같이 G에 대한 境界條件을 附與한다. 즉 이는 Green函數 문제에 附與될 齊次 境界條件이다.

$$\frac{\partial G}{\partial z_o} + \frac{s^2}{g}G = 0,\ z_o = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_o} = 0,\ z_o = -h \tag{16}$$

$$G \to 0 \text{ as } r \to \infty \tag{17}$$

式 (15)-(17)을 式 (14)에 代入하여 整理하면 式 (18)이 얻어진다.

$$\bar{\phi}(x, y, z, s) = \int_{S_f} G\zeta(x_o, y_o, 0)\ dA + \int_{S_b} G\overline{W}(x_o, y_o, s)\ dA \tag{18}$$

따라서 위에서 사용한 方法은 속도포텐셜을 직접 구하는 방법 대신 Green函數를 導入하여 보다 쉬운 問題로 轉換시킨 것임을 알 수 있다. 왜냐하면 Green函數의 境界條件은 齊次微分式이며 微分方程式 (13)은 다루기 쉬운 Delta函數로 表示되었기 때문이다. 이제 式 (13), (15)-(17)로 주어진 Green函數 문제를 풀어 式 (18)에 代入한 후 Laplace 逆變換을 하면 원하는 解를 구하게 된다.

Green函數 문제를 보다 용이하게 풀기 위해 Hankel 變換을 하자.

$$\tilde{f}(k) = \int_0^\infty rJ_o(kr)f(r)dr$$
$$f(r) = \int_0^\infty kJ_o(kr)\tilde{f}(k)dk \tag{19}$$

여기서 J_o는 제1종 0차 Bessel함수이다.

式 (13)을 圓柱 座標系를 이용하여 나타내고 Hankel 변환하여 積分할 때 境界條件 (17)과 Bessel函數의 微分方程式을 이용하면 式 (20)이 얻어진다.

$$\frac{d^2\tilde{G}}{dz_o} - k^2\tilde{G} = \frac{\delta(z_o - z)}{2\pi},\quad -h < z_o < 0 \tag{20}$$

境界條件 式 (15)와 (16)에도 Hankel 變換을 하면 다음 式들이 된다.

$$\frac{d\tilde{G}}{dz_o} + \frac{s^2}{g}\tilde{G} = 0,\ z_o = 0 \tag{21}$$

$$\frac{d\tilde{G}}{dz_o} = 0,\ z_o = -h \tag{22}$$

式 (20)의 微分方程式은 Delta函數를 包含하기 때문에 Hankel 변환된 Green函數는 kink를 가질 수 있어 z_o축을 다음과 같이 두 區間으로 나누어 생각한다.

$$\begin{cases} -h < z_o < z \\ z < z_o < 0 \end{cases} \tag{23}$$

그러면 各 區間에서 微分式 (20)은 齊次式으로 바뀌며 各 區間에 相應하는 境界條件 式 (21)과 (22)를 代入하여 풀면 式 (24)가 된다.

$$\tilde{G}(k, z_o;\ z)=\begin{cases} A\left(\cosh kz_o-\dfrac{s^2}{gk}\sinh kz_o\right), & z<z_o<0 \\ C\ \cosh k(z_o+h), & -h<z_o<z \end{cases} \tag{24}$$

여기서 A와 C는 未知 常數이다. 비록 點 z에서 Hankel 變換된 Green函數는 kink를 가지나 連續이여야 함으로 이 條件들로부터 未知 常數를 구한다. 점 z에서 微小 距離 만큼 떨어진 點들을 각기 z_+, z_-로 표기하여 式 (20)을 이 區間에 대해 積分하여 결과를 나타내면

$$\tilde{G}(k, z_+;\ z)-\tilde{G}(k, z_-;\ z)=0 \qquad \text{: 연속조건} \tag{25}$$

$$\frac{d\tilde{G}(k, z_+;\ z)}{dz_o}-\frac{d\tilde{G}(k, z_-;\ z)}{dz_o}=\frac{1}{2\pi} \qquad \text{: kink 조건} \tag{26}$$

式 (24)의 解를 각기 相應하는 式 (25)와 (26)에 代入하여 구한 Hankel 變換된 Green函數는 式 (27)이 된다.

$$\tilde{G}(k, z_o;\ z)=\begin{cases} -\dfrac{g}{2\pi}\ \dfrac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\ \dfrac{\cosh kz_o-\dfrac{s^2}{gk}\sinh kz_o}{(s^2+\omega^2)}, & z<z_o<0 \\ -\dfrac{g}{2\pi}\ \dfrac{\cosh k(h+z_o)}{\cosh kh}\ \dfrac{\cosh kz-\dfrac{s^2}{gk}\sinh kz}{(s^2+\omega^2)}, & -h<z_o<z \end{cases} \tag{27}$$

여기서 $\omega^2=gk\tanh kh$이다.

마지막으로 式 (27)에 Hankel 逆變換을 하면 Green函數가 얻어진다.

$$\begin{aligned} &-\frac{g}{2\pi}\int_0^\infty dk\ k\ J_o(kr)\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\ \frac{\cosh kz_o-\dfrac{s^2}{gk}\sinh kz_o}{(s^2+\omega^2)}\ , \quad z<z_o<0 \\ &-\frac{g}{2\pi}\int_0^\infty dk\ k\ J_o(kr)\frac{\cosh k(h+z_o)}{\cosh kh}\ \frac{\cosh kz-\dfrac{s^2}{gk}\sinh kz}{(s^2+\omega^2)}\ , \quad -h<z_o<z \end{aligned} \tag{28}$$

2.3 解析解 誘導

앞 절에서 구한 Green函數를 式 (18)에 代入하면 Laplace 變換된 속도 포텐셜이 얻어진다. Green函數 外力의 위치는 基準 座標系의 原點에만 限定된 것이 아니므로 外力 位置點으로 부터 解를 구하고자 하는 地點까지의 距離로 나타내져야 한다(Fig. 1). 즉,

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(r, \theta, z, s)= &-\frac{g}{2\pi}\int_0^\infty r_o dr_o\int_0^{2\pi}d\theta_o\int_0^\infty dk\, k\, J_o(k|\vec{r}-\vec{r}_o|)\ \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\ \frac{\zeta(r_o, \theta_o, 0)}{s^2+\omega^2} \\ &-\frac{g}{2\pi}\int_0^\infty r_o dr_o\int_0^{2\pi}d\theta_o\int_0^\infty dk\, k\, J_o(k|\vec{r}-\vec{r}_o|)\ \frac{\cosh kz-\dfrac{s^2}{gk}\sinh kz}{\cosh kh}\ \frac{\overline{W}(r_o, \theta_o, s)}{s^2+\omega^2} \end{aligned} \tag{29}$$

마지막으로 式 (29)를 Laplace 逆變換하면 구하고자 하는 속도 포텐셜이 얻어진다.

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta,z,t)&=L^{-1}\{\bar{\phi}(r,\theta,z,s)\}\\&=-\frac{g}{2\pi}\int_0^\infty r_o dr_o\int_0^{2\pi}d\theta_o\zeta(r_o,\theta_o,0)\int_0^\infty dk\,J_o(k|\vec{r}-\vec{r}_o|)\frac{k}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin\omega t\\&+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r_o dr_o\int_0^{2\pi}d\theta_o W(r_o,\theta_o,t)\int_0^\infty dk\,J_o(k|\vec{r}-\vec{r}_o|)\frac{\sin kz}{\cosh kh}\\&-\frac{g}{2\pi}\int_0^\infty r_o dr_o\int_0^{2\pi}d\theta_o\int_0^\infty dk\,J_o(k|\vec{r}-\vec{r}_o|)\frac{k}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh^2 kh}\int_0^t\sin\omega(t-\omega)W(r_o,\theta_o,t)\,d\tau\end{aligned}\tag{30}$$

式 (30)은 式 (1)-(4)로 표시된 Cauchy-Poisson 問題의 解로서 오른쪽 첫 項은 初期 海面에 의해 生成되는 波浪成分이며 나머지 두 항은 海底面의 變化에 의한 波浪成分이다.

3. 結果 比較 및 分析

제 2절에서 구한 解는 海底面의 運動에 의해 생성되는 波浪成分을 포함하는 一般的인 解이나 본 절에서는 보다 單純한 問題를 다루기 위해 이 成分을 無視하기로 한다. Carrier(1991)는 이러한 條件으로 부터 解析解를 구하였으나, 이들은 淺海 條件에서만 成立되는 線形 淺海 波浪式 및 線形 Boussinesq 波浪式에 관한 것이다. 따라서 본 절에서는 앞에서 구한 解를 이들과 比較하여 波浪의 分散 效果에 대한 特性를 分析하고자 한다.

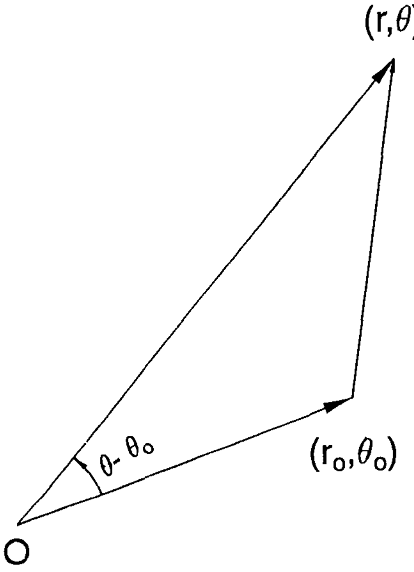

Fig. 1. Schematic sketch of vectors r and r_o.

波浪의 物理 變數(physical variable)중의 하나인 海面 變位는 動力學的 境界條件으로부터 계산된다.

$$\begin{aligned}\zeta(r,\theta,t)&=-\frac{1}{g}\frac{\partial\phi(r,\theta,0,t)}{\partial t}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r_o dr_o\int_0^{2\pi}d\theta_o\zeta(r_o,\theta_o,0)\\&\quad\int_0^\infty dk\,k\,J_o(k|\vec{r}-\vec{r}_o|)\cos\omega t\end{aligned}\tag{31}$$

式 (31)의 Bessel函數 因數는 Graf 公式(Abramowitz와 Stegun, 1972)에 의해 式 (32)로 나타낼 수 있다(Fig. 1 참조).

$$\begin{aligned}J_o(k|\vec{r}-\vec{r}_o|)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(kr)\,J_n(kr_o)\,\cos n(\theta-\theta_o)\\&=J_o(kr)\,J_o(kr_o)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(kr)\,J_n(kr_o)\\&\quad\cos n(\theta-\theta_o)\end{aligned}\tag{32}$$

式 (32)를 式 (31)에 代入하여 整理하면

$$\begin{aligned}\zeta(r,\theta,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r_o dr_o\int_0^{2\pi}d\theta_o\zeta(r_o,\theta_o,0)\\&\quad\int_0^\infty dk\,k\,J_o(kr)\,J_o(kr_o)\\&\quad+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty r_o dr_o\int_0^{2\pi}d\theta_o\zeta(r_o,\theta_o,0)\\&\quad\int_0^\infty dk\,k\,J_n(kr)\,J_n(kr_o)\,\cos n(\theta-\theta_o)\,\cos\omega t\end{aligned}\tag{33}$$

다음에는 Carrier가 提示한 解를 式 (33)으로부터 구하기로 한다. 初期海面이 z축에 對稱인 境遇 式 (33)의 둘째항은 없어지게 되므로 式 (34)를 얻게 된다.

$$\zeta(r,t)=\int_0^\infty dk\,k\,J_o(kr)\left(\int_0^\infty r_o\zeta(r_o,0)\,J_o(kr_o)dr_o\right)\cos\omega t\tag{34}$$

Fig. 2에 圖示된 바와 같은 Carrier의 初期海面 式 (35)

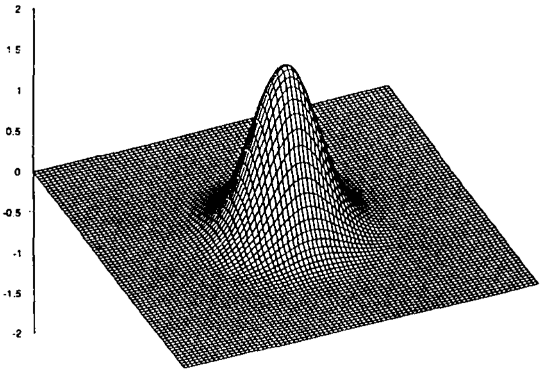

Fig. 2. Initial surface displacement for a Gaussian hump (Carrier, 1991).

를 式 (34)에 代入하면 式 (36)을 얻게 된다.

$$\zeta(r_o, 0) = 2e^{-(r_o/a)^2} \tag{35}$$

$$\zeta(r, t) = \int_0^{\infty} a^2 k J_o(kr) e^{-(ak/2)^2} \cos\omega t \, dk \tag{36}$$

여기서 a는 初期海面의 代表的인 길이(characteristic length)이다.

波浪 分散式을 kh에 대해 Taylor級數 展開를 하여 정리하면 式 (37)이 된다.

$$\begin{aligned} \omega^2 &= gk \tanh kh \\ &= ghk^2\left(1 - \frac{(kh)^2}{3} + \frac{2(kh)^4}{15} - \frac{17(kh)^6}{315} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{37}$$

kh가 작을 경우인 線形 淺海波浪의 경우 式 (37)에서 으뜸항만을 취하고 Carrier가 사용한 無次元 式 (38)을 사용하면 式 (36)은 式 (39)의 近似式으로 바뀐다.

$$ak = k_*, \quad \frac{r}{a} = r_*, \quad \frac{\sqrt{gh}\,t}{a} = t_*, \quad \frac{h}{a} = h_* \tag{38}$$

$$\zeta(r_*, t_*) = \int_0^{\infty} k_* e^{-(k_*/2)^2} \cos(k_* t_*) \, J_o(k_* r_*) \, dk_* \tag{39}$$

여기서 첨자 *를 가진 變數는 無次元 變數이다. 그리고 一般解에 대한 無次元 海面 變位式은 式 (40)이 된다.

$$\zeta(r_*, t_*) = \int_0^{\infty} k_* e^{-(k_*/2)^2} \cos[\omega(k_*) t_*] \, J_o(k_* r_*) \, dk_* \tag{40}$$

여기서 $\omega(k_*) = \dfrac{\sqrt{k_* h_* \tanh k_* h_*}}{h_*}$ 이다.

한편 kh가 작지만 淺海 波浪式 보다 適用 範圍가 넓은 線形 Boussinesq 波浪式으로 나타내면 式 (37)의 둘째항까지 취해 式 (41)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega^2 &\simeq gh\,k^2\left(1 - \frac{(kh)^2}{3}\right) \\ &\simeq gh\,k^2\left(1 + \frac{(kh)^2}{3}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{41}$$

式 (41)의 近似式을 써서 海面 變位式 (40)을 無次元 變數로 표시하면 式 (42)를 얻게 된다.

$$\zeta(r_*, t_*) = \int_0^{\infty} k_* e^{-(k_*/2)^2} \cos\left(\frac{k_* t_*}{\sqrt{+\frac{(k_* h_*)^2}{3}}}\right) J_o(k_* r_*) \, dk_* \tag{42}$$

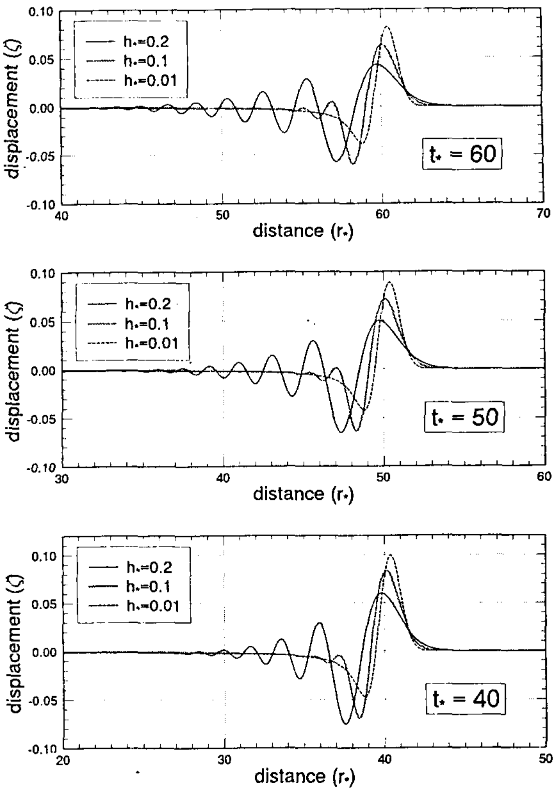

Fig. 3. Surface displacements by Boussinesq wave Eq. (42).

따라서 Carrier가 提示한 式 (39)와 (42)는 앞서 구한 보다 一般的인 式 (40)에서부터 誘導된다. 또한 線形 Boussinesq 波浪式에 의한 海面 變位는 kh가 작아질수록 式 (39)의 線形 淺海 波浪式으로 바뀌는 것을 알 수 있다.

Fig. 3에 式 (42)에 의한 海面變位를 無次元 時間

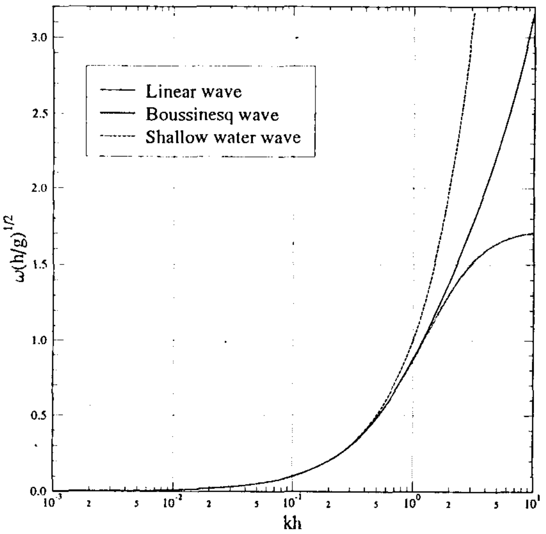

Fig. 4. Linear dispersion curves by different approximations.

$t_*=40$, 50과 60일 때 서로 相異한 세 水深 $h_*=0.01$, 0.1 그리고 0.2에 대해 각각 圖示하였다. 이 결과는 簡單한 數値積分(rectangular rule)을 使用하여 구하였다. 그림에서 알 수 있듯이 時間 또는 距離가 增加할수록 海面의 높이가 減少하고 波浪의 수가 增加한다. 이는 初期 海面에 包含된 여러 成分의 波浪이 波浪의 分散效果에 의해 점차 나타나는 것으로 풀이된다. 또한 時間이 一定한 境遇에는 水深이 낮을수록 波浪 分散效果가 작아짐을 알 수 있으며 淺海域이 아닌 境遇에는 geometric spreading뿐 아니라 分散에 의해 波高가 減少하는 것을 알 수 있다. 특히 淺海 波浪의 경우에는 分散效果가 없어 波高 減少는 geometric spreading에 의해서만 이루어짐을 알 수 있다.

위에서 言及한 바와 같이 Carrier의 解는 본 論文에서 유도된 式 (40)에 대한 特殊解들로 Carrier의 解가 成立하는 範圍를 나타내기 위해 Fig. 4에 線形 波浪 分散式과 그 近似式들에 대한 계산값을 나타내었다. 즉 無次元 角周波數 ω_*를 kh의 函數로 나타내면 式 (43)이 된다.

$$\omega_*=\omega\sqrt{\frac{h}{g}}=\sqrt{kh}\ \tanh kh;\ \text{선형 파랑분산식}$$

$$\omega_*=kh\qquad ;\ \text{천해 파랑분산식} \quad (43)$$

$$\omega_*=kh\left(1+\frac{(kh)^2}{3}\right)^{-1/2};\ \text{Boussinesq 파랑분산식}$$

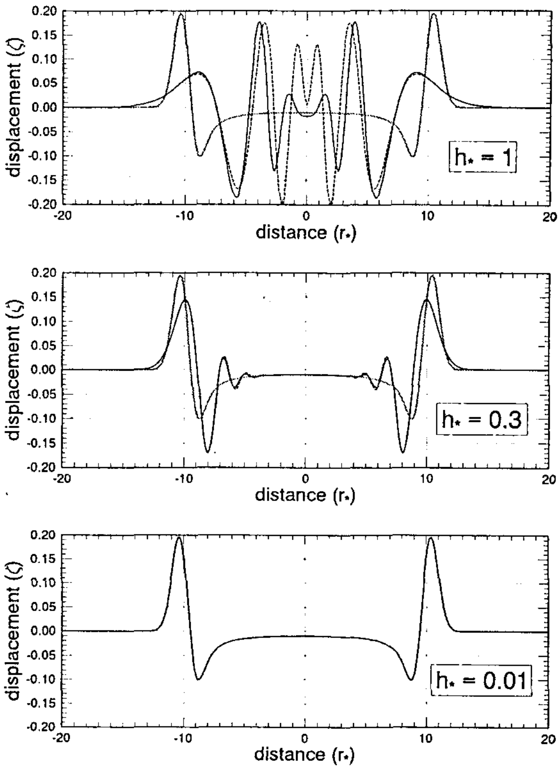

Fig. 5a. Surface displacements by different wave theories at $t_*=10$; ⋯: Shallow water wave, ---: Boussinesq wave, —: Linear wave.

淺海 波浪의 分散式은 kh 값이 0.5 보다 크면 線形 分散式과 뚜렷한 差異를 보이는 반면에 Boussinesq 分散式은 kh 값이 2 보다 클 때 상당한 差異를 나타낸다. 그리고 淺海域인 kh 값 0.314 보다 작은 境遇 세 式의 값은 거의 같음을 알 수 있다.

또, 水深에 따른 解의 特性을 比較하기 위해 相異한 세 水深 $h_*=0.01$, 0.3 과 1의 각 境遇에 대해 $t_*=10$, 60 그리고 200일 때의 海面 變位를 Fig. 5에 나타내었다. Fig. 5a에 나타낸 바와 같이 解析解는 z축에 대해 對稱이다. 淺海 波浪은 水深의 函數가 아니며 波浪分散이 없으므로 初期海面과 유사한 형태를 보여주며 波高 減少는 geometric spreading에 의해 減少됨을 여기서도 알 수 있다. 한편 線形 波浪과 Boussinesq 波浪은 分散效果가 가미되어 複雜한 海面을 나타내며 水深이 깊어질수록 分散에 의한 變化가 뚜렷이 나타난다. 그림에서 圖示된 水深 h_*만으로 淺海域을 구별할 수 없음은 式 (40)과 (42)의 初期海面의 에너지는 k_*

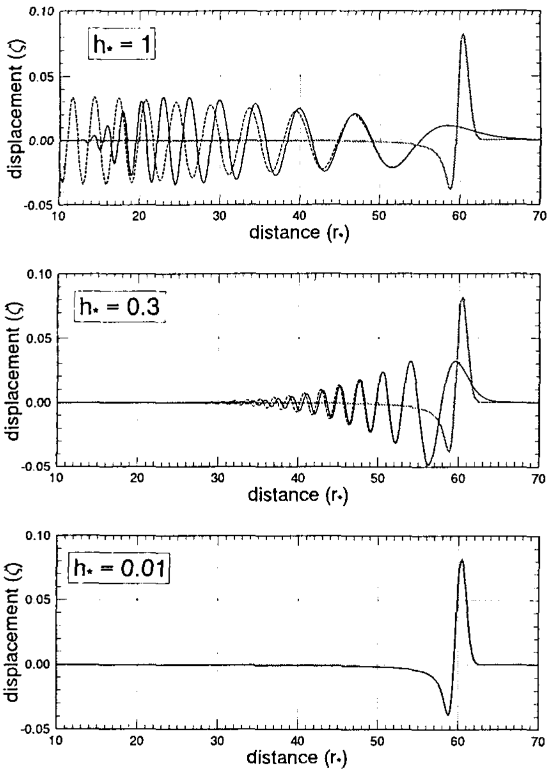

Fig. 5b. Surface displacements by different wave theories at $t_*=60$; ⋯: Shallow water wave, ---: Boussinesq wave, —: Linear wave.

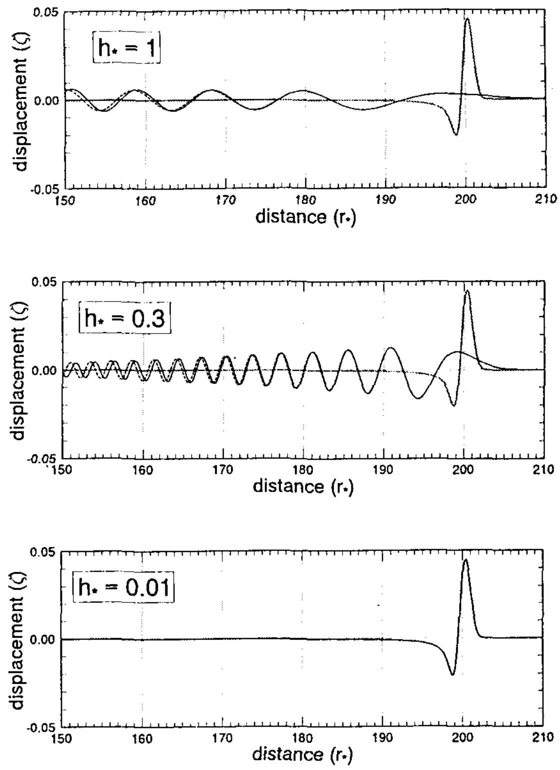

Fig. 5c. Surface displacements by different wave theories at $t_*=200$; ⋯: Shallow water wave, ---: Boussinesq wave, —: Linear wave.

값이 작은 부분에 集中되어 있고 에너지가 急速히 減少함으로 이를 고려하여 解析해야 하기 때문이다.

마지막으로 水深 $h_*=1$에서 線形 波浪과 Boussinesq 波浪의 分散效果를 보다 綿密히 나타내기 위해 Fig. 6에 $t_*=200$까지 時間에 따른 海面 變位를 圖示하였다. 앞에서 言及한 바와 같이 海面 變位는 z축에 대해 對稱이므로 $r_*=0$에서 210까지만 나타내었다. 여기서도 傳播 距離가 增加함에 따라 波高가 減少하고 波浪 數가 增加하는 것이 뚜렷이 나타난다. 波長이 작은 波浪의 成分은 그 波速이 작아 傳播速度가 늦게 되며 波長이 작아질수록 (또는 波數가 커질수록) Boussinesq 波浪은 線形 波浪보다 천천히 傳播되는 것을 알 수 있으며 이는 Fig. 4의 結果로부터 類推할 수도 있다. 結局 주어진 初期海面으로 부터 分散으로 인해 變形되는 波浪은 波浪의 先端部를 除外하면 아주 달라 波浪 變形 計算時 適切한 分散式이 使用되어야함을 알 수 있다.

結論的으로 波浪의 傳播는 水深, 初期海面의 形態 그리고 分散現象에 의해 그 波形이 달라지며 波浪의 變形을 計算할 때 適切한 波浪理論이 使用되어야 한다.

4. 結論 및 提言

初期 海面이 波浪의 分散效果에 의해 時間에 따라 變하는 過程을 나타내기 위해 Green函數를 사용하여 3次元 速度 포텐셜을 구하였고 이로부터 구한 海面 變位를 Carrier가 提示한 式과 比較함으로써 檢證하였다. 또한 本 論文에서 誘導한 解로부터 波浪 分散式을 近似시켜 Carrier의 解를 얻음으로써 여기에서 誘導한 解가 보다 一般的인 解임을 立證하였다.

2次元 淺海 波浪의 海面變位의 時間 變化는 1次元 海面 變位의 變化와는 달리 geometric spreading에 의해 波高가 減少한다. 初期 海面을 構成하는 波浪

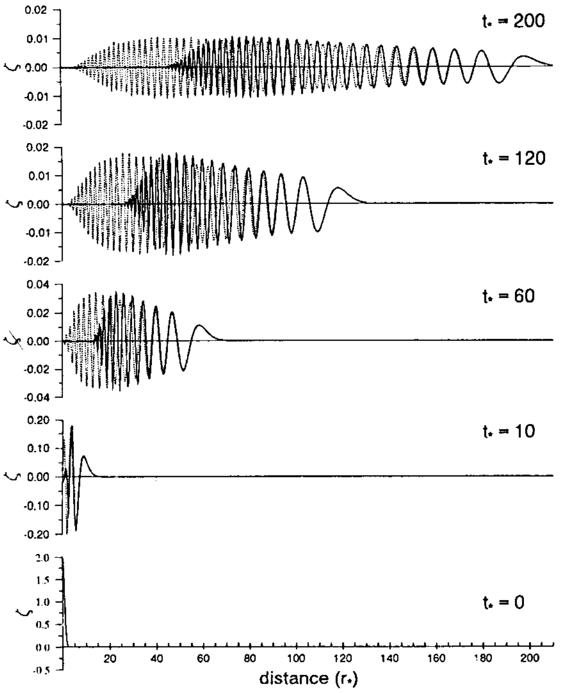

Fig. 6. Surface displacements of linear and Boussinesq waves for $h_* = 1$; ···: Boussinesq wave, —: Linear wave.

에너지의 分布중 그 크기를 無視할 수 없는 相當 部分의 成分 波浪이 淺海域에 속하지 아니하는 경우에는 傳播 距離에 따른 波高 減少는 geometric spreading뿐 아니라 分散效果에 의해 작아짐을 보였다.

海面을 나타내는 式은 Bessel函數와 Cosine函數의 곱을 包含하여 波數가 增加하면 이들에 의한 積分函數의 振動도 增加한다. 이러한 境遇에는 stationary phase 方法을 使用하여 積分의 近似값을 구할 수 있으며 따라서 이에 대한 物理的 特性을 보다 쉽게 把握할 수 있다. 그러나 本 論文에서 다루지 못한 近似法인 stationary phase 方法과 또 다른 解析解의 誘導는 다음의 論文에서 다루고자 한다.

謝 辭

本 硏究는 1993년 韓國海洋硏究所에서 실시한 基本硏究事業의 硏究結果이며 硏究費 支援에 感謝를 드립니다.

參考文獻

Abramowitz, M., and Stegun, I.A., 1972. Handbook of mathematical functions, *Dover Publications, Inc.,* New York.

Carrier, G.F., 1991. Tsunami propagation from a finite source, *Proc. of 2nd UJNR Tsunami Workshop,* NGDC, Honolulu, Hawaii, 101-115.

Greenberg, M.D., 1978. Foundations of applied mathematics, *Prentice-Hall Inc.,* New Jersey.

Kajiura, K., 1963. The leading wave of a tsunami, Bull. Earthquake Res. Inst. University of Tokyo, Vol. **41**: 525-571.

Mei, C.C., 1989. The applied dynamics of ocean surface waves, *World Scientific Publishing Co.,* Singapore.

Phillips, O.M., 1977. Dynamics of the Upper Ocean, 2nd ed. *Cambridge University Press,* London.

U.S. Army Coastal Engineering Research Center, 1984. *Shore Proection Manual,* Vol. I-III, U.S. Government Printing Office, Wahington, D.C.

Wehausen, J.V., and Laitone, E.V., 1960. Handbuch der Physik, edited by W. Flügge, *Springer-Verlag,* Berlin. Vol. 9: 446-778.