

類似變換技法을 利用한 3次元 모델의 開發 Developing a Three-dimensional Spectral Model Using Similarity Transform Technique

姜官秀* · 蘇在貴* · 鄭景太* · 鮮于仲皓**

Kwan Soo Kang*, Jae Kwi So*, Kyung Tae Jung* and Jung Ho Sonu**

要 旨 : 本 論文은 類似變換技法을 利用한 새로운 3次元 鉛直 모우드 展開 모델의 開發에 대하여 敘述한다. 基本方程式을 External 모우드와 Internal 모우드로 分離시킨 다음 Internal 모우드식에 Galerkin 方法을 適用하고 구성되는 行列方程式에 類似變換技法을 적용, 基底函數의 계수 값을 구하였다. 최종 얻어지는 基底函數의 계수 값은 摩擦場을 제외하고는 非連繫되어 시간 間격의 제약을 거의 받지 않고 鉛直 構造를 구할 수 있기 때문에 經濟性面에서 탁월하다. 수립된 모델은 어떤 基底函數라도 適用 可能하나 現 段階에서는 Chebyshev 多項式函數가 사용되었으며, 바람應力은 一定한 것으로 가정하였다. 모델 테스트로서 定常狀態의 均一한 바람應力이 가해지는 長方形 Basin에 적용하여 모델의 適用 可能性을 檢證하였다.

Abstract □ This paper presents a new modal solution of linear three-dimensional hydrodynamic equations using similarity transform technique. The governing equations are first separated into external and internal mode equations. The solution of the internal mode equation then proceeds as in previous modal models using the Galerkin method but with expansion of arbitrary basis functions. Application of similarity transform to resulting full matrix equations gives rise to a set of uncoupled partial differential equations of which the unknowns are coefficients of mode vector. Using the transform technique a computationally efficient time integration is possible. In present form the model use Chebyshev polynomials for Galerkin solution of internal mode equations. To examine model performance the model is applied to a homogeneous, rectangular basin of constant depth under steady, uniform wind field.

1. 緒 論

流速의 鉛直分布를 알기 위한 方案의 하나로 Galerkin 函數 展開모델에 대한 研究가 활발히 進行되어 왔다(Heaps, 1972 ; Davies and Owen, 1979 ; Davies, 1985 ; 崔, 1983 ; 蘇 等, 1992). Galerkin 函數 利用 3次元 모델은 垂直座標上의 水平流速 成分을 水平座標, 時間에 따라 變하는 係數와 水深에 따라 變하는 函數群의 곱의 형태로 線形展開하며, 係數의 값은 Galerkin 方法을 써서 구한다. Galerkin 모델의 類型은 사용하는 基底函數群(basis function set)에 의해 결정된다. Heaps(1972)가 基底函數(basis function)로 鉛直 渦粘性係數를 포함하는 二次微分項의 固有函數

(eigenfunction)를 사용한 이래 다양한 基底函數를 이용한 研究가 進行되었다. Davies(1977)는 基底函數로 Piecewise 함수인 B-spline 함수를 사용하여 모델을 개발하였으며, Davies and Owen(1979)은 Global 함수인 Chebyshev, Legendre 다항식 함수 등 일반적인 함수를 基底函數로 사용하였다.

基底函數로 固有函數를 사용할 경우(Galerkin-eigenfunction model) 鉛直 渦粘性係數를 포함하는 2차 微分項이 固有值와 固有函數의 곱으로 나타나는 Eigensystem으로 형성되어, 海底面 摩擦應力항을 통해서만 연관될 뿐이므로 계산 속도가 빠르다. 또한 난류 확산계수의 鉛直構造가 일정한 형태로 가정 가능한 경우 固有函數 정의시 사용된 境界條件과 物理現狀

*韓國海洋研究所 沿岸工學研究室 (Coastal Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea)

**서울대학교 공과대학 토목공학과 (Department of Civil Engineering, Seoul National University, Seoul, Korea)

境界條件이 일치하지 않는 경우를 제외하고는 他 基底函數에 비해 수렴성이 뛰어난 것으로 알려져 있다 (Davies, 1985). 그리고 固有函數를 사용할 경우 각 모우드가 물리적인 의미를 내포하고 있어 모우드 별 기여도를 해석하면 어떤 현상의 물리적인 해석이 가능하다.

반면 基底函數로 Chebyshev, Legendre 多項式函數를 사용하는 경우는 固有函數를 사용하는 경우보다 風成流 해수면 流速 재현시 收斂性이 뛰어난 것으로 보고되었다(Davies and Owen, 1979). 그러나 直交(orthogonal)하지 않는 Global 함수(예, Chebyshev 다항식 함수)를 사용할 경우에는 모우드 해가 full matrix를 포함하는 行列方程式으로 나타나 모우드를 많이 사용할 때 경제성이 뒤떨어지는 단점이 있다. 또한 각 모우드가 물리적 의미를 내포하지 않아 모우드별 기여도에 따른 물리 현상을 설명하기는 부적합하다.

기존의 Galerkin-eigenfunction 모델은 Sturm-Liouville system에 의해 결정되는 固有函數를 基底函數로 사용하여 Galerkin 방법을 적용 모우드해를 구한다. 반면에 本 研究에서 기술되는 모델은 水平流速의 鉛直 방향의 전개에 임의의 基底函數를 사용하여 Galerkin 방법을 적용한 후 類似變換技法을 도입, 새로운 접근 방식의 Galerkin 스펙트럴 모델이다. 일반적으로 임의의 기저함수를 사용, 水平流速을 鉛直 방향으로 전개할 경우 Galerkin 해는 full matrix를 포함하는 行列方程式 형태로 주어지며(Davies and Owen, 1979) 基底函數의 계수 값을 구하기 위해서는 逆行列을 구하고 行列方程式을 푸는 高價의 行列計算이 요구된다. 새로 개발된 모델의 核心은 經濟性 提高를 위해 類似變換技法을 도입, 基底函數의 각 계수 값을 다시 고유벡터 行列로 전개하는 것이다. 그 결과 각 고유벡터 行列의 加重值를 미지수로 하는 非連繫된 方程式이 구성되어 초기치가 적절히 주어지면 특정 시각의 해를 해석적으로 구할 수 있다. 고유벡터 行列의 加重值가 결정되면 고유벡터를 곱하여 水平流速 관계에 사용된 基底函數의 계수 값을 구할 수 있다.

類似變換技法을 사용할 경우의 長點은 기존의 Galerkin-eigenfunction 모델이 기저함수가 고유함수일 경우만 적용 가능했던 한계를 벗어나 임의의 기저함수에도 적용 가능하다는 것이다. 기존의 Galerkin-ei-

genfunction 모델의 접근 방식을 검토하면 Galerkin 해인 行列方程式의 行列들이 대각 성분만으로 표시 되어 本 研究에서 제시한 類似變換技法에서 기저함수로 Sturm-Liouville system으로부터 결정되는 고유함수를 사용할 때에 해당된다. 또한, 直交(orthogonal)하지 않는 基底函數(예, Chebyshev 다항식 함수)를 사용할 경우에 full matrix의 역함수를 구한 후 Galerkin 해를 구해야 하나 類似變換技法은 역함수를 구할 필요가 없고 流速의 鉛直分布를 해석적으로 구할 수 있어 경제성이 탁월하다. 本 研究에서는 經濟性 提高를 위한 추가적인 노력으로 기본방정식을 External 모우드와 Internal 모우드를 분리하는 모우드 분리 기법을 적용하였다. 실제 적용시 基底函數는 직교성이 없고 자연적으로 모우드 분리되지 않는 Chebyshev 다항식 함수를 사용하였으나 어떤 基底函數에도 사용 가능하다.

類似變換技法을 사용한 기존의 연구는 Hwang 등 (1984)에 의해 有限要素法을 사용하여 地下水 오염 문제에 적용한 연구가 있었으나, 海流循環모델에서는 적용 사례가 아직 없다. 모델 테스트로써 Davis and Owen (1979)과 동일한 조건(Heaps' basin)에 대해 수치실험을 수행, 비교하였으며 Internal 모우드 계산 간격 선정에 따른 모델 정확도에 대해서도 논의된다.

2. 3次元 流體 運動 方程式 및 鉛直函數 展開 技法에 의한 解

2.1 直交 座標系로 表示된 基本方程式

水平方向 擴散項, 비선형 移流項을 무시하고 靜水壓條件(hydrostatic approximation) 및 等海水密度(homogeneous condition)를 가정한 3次元 連續方程式과 運動方程式은 아래와 같이 표현된다(Heaps, 1972).

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v dz = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma v = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma u = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial G}{\partial z} \quad (3)$$

여기서, x, y : 平面上的 東向, 北向 直交座標系,

- z : 平均海面下의 垂直座標,
- t : 時間,
- ζ : 平均海面上의 海水位,
- u, v : 水深 z 에서의 x, y 方向 流速 成分,
- ρ : 海水密度,
- γ : Coriolis 係數,
- g : 重力加速度

이며, F, G 는 x, y 方向 内部摩擦 應力으로서 아래와 같이 표현된다.

$$F = -\rho\mu \frac{\partial u}{\partial z}, \quad G = -\rho\mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4)$$

여기에서, μ 는 鉛直 渦粘性係數이다.

해수면 $z=0$ 에서의 境界條件은

$$F = F_s, \quad G = G_s \quad (5)$$

로 주어지며, 여기서 F_s, G_s 는 해수면상 바람응력의 x, y 방향성분을 나타낸다.

마찬가지로, 海底面 $z=h$ 에서의 境界條件은

$$F = F_b, \quad G = G_b \quad (6)$$

로 주어지며, F_b, G_b 는 海底面 摩擦應力の x, y 방향성분을 나타낸다.

海底面 摩擦應力이 海底面 流速에 線形的으로 比例한다고 假定하는 境遇

$$F_b = k \rho u_h, \quad G_b = k \rho v_h \quad (7)$$

로 표현할 수 있으며, k 는 상수 또는 x, y 의 함수인 海底面 摩擦係數이고 u_h, v_h 는 x, y 방향 성분의 海底面 流速이다. 海底面 摩擦應力이 海底面 流速과 非線形 關係를 가지는 경우는 다음과 같이 표현된다.

$$F_b = K \rho u_h (u_h^2 + v_h^2)^{1/2}, \quad G_b = K \rho v_h (u_h^2 + v_h^2)^{1/2} \quad (8)$$

K 는 海底面 摩擦係數를 나타낸다. 경우에 따라서 아래와 같은 비활동조건(no slip condition)이 사용되기도 한다.

$$u_h = v_h = 0 \quad (9)$$

2.2 σ -變換된 External, Internal 모우드식 誘導

空間 및 時間 座標系上的 流速 $u(x, y, z, t)$ 및 $v(x, y,$

$z, t)$ 는 海水面 變異에 영향을 미치는 水深平均 流速 $u(x, y, t), \bar{v}(x, y, t)$ 와 흐름의 垂直變異만을 표현하는 流速成分 $u'(x, y, z, t), v'(x, y, z, t)$ 로 나눌 수 있으며, 이를 각각 External 모우드, Internal 모우드라고 부른다.

u, v 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v' \quad (10)$$

여기서, \bar{u}, \bar{v} 는 수심 평균 流速으로써 다음과 같다.

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v dz \quad (11)$$

External 모우드와 Internal 모우드를 분리하여 계산을 수행하는 경우 External 모우드는 CFL 안정성 조건에 의해 계산 시간 간격상 제한이 따르는데 비해 Internal 모우드는 이러한 제한이 없기 때문에 계산 시간을 크게 택할 수 있어 經濟性이 중요시되는 3차원모델에서 큰 장점이라 할 수 있다(Davies, 1982).

연속방정식 (1)에 식 (11)을 대입하면 다음과 같은 水深平均 連續方程式이 된다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) = 0 \quad (12)$$

또한, 運動方程式을 水深에 대하여 積分하면, 다음 식과 같은 水深平均 運動方程式을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \gamma \bar{v} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{F_b}{\rho h} + \frac{F_s}{\rho h} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \gamma \bar{u} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{G_b}{\rho h} + \frac{G_s}{\rho h} \quad (14)$$

식 (2)에서 식 (13)을, 식 (3)에서 식 (14)를 각각 빼면 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \gamma v' = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial u'}{\partial z} \right] + \frac{F_b}{\rho h} - \frac{F_s}{\rho h} \quad (15)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \gamma u' = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial v'}{\partial z} \right] + \frac{G_b}{\rho h} - \frac{G_s}{\rho h} \quad (16)$$

여기에서, 水深에 대해 식 (17)과 같이 變換(transformation)하면, 식 (15), (16)은 식 (18), (19)와 같이 변환된다.

$$\sigma = (2z - h)/h \quad (17)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \gamma v' = \frac{4}{h^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right] + \frac{F_b}{\rho h} - \frac{F_s}{\rho h} \quad (18)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \gamma u' = \frac{4}{h^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right] + \frac{G_b}{\rho h} - \frac{G_s}{\rho h} \quad (19)$$

境界條件(boundary conditions)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} -\rho \frac{2}{h} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_{-1} &= F_s, & -\rho \frac{2}{h} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_1 &= F_b \\ -\rho \frac{2}{h} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_{-1} &= G_s, & -\rho \frac{2}{h} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_1 &= G_b \end{aligned} \quad (20)$$

이상과 같이 支配方程式 (1), (2), (3)은 External 모우드인 식 (12)-(14)와 Internal 모우드인 식 (19), (20)으로 나누어진다.

2.3 Internal 모우드의 解를 위한 Galerkin 技法 適用

Galerkin 解法은 먼저 Internal 모우드 流速 u', v' 을 垂直座標 σ 의 함수인 $f_r(\sigma)$ 와 水平座標 및 時間의 함수인 계수 $A_r(x, y, t), B_r(x, y, t)$ 를 사용하여 식 (21)과 같이 표현함으로써 시작된다(식의 간편화를 위해 $u = u', v = v'$ 로 대치한다).

$$\begin{aligned} u(x, y, \sigma, t) &= \sum_{r=0}^m A_r(x, y, t) f_r(\sigma) \\ v(x, y, \sigma, t) &= \sum_{r=0}^m B_r(x, y, t) f_r(\sigma) \end{aligned} \quad (21)$$

Gordon(1982)은 基底函數를 Legendre 多項式函數를 사용할 경우에 자연적으로 모우드 분리가 됨을 보였고 Davies(1982)는 任意的 基底函數를 사용할 시에도 모우드 분리가 가능함을 보였다. 본 연구에서 기술되는 방법은 임의의 기저함수를 사용할 수 있으나 본 연구에서는 基底函數(basis function)를 자연적으로 모우드 분리가 되지 않는 Chebyshev 다항식 함수를 사용한다. Chebyshev 다항식 함수를 $f_r(\sigma), r=0, 1, \dots, m$ 이라 하면, $-1 \leq \sigma \leq 1$ 인 구간에서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} f_{r+1}(\sigma) &= 2\sigma f_r(\sigma) - f_{r-1}(\sigma) \\ f_0(\sigma) &= 1, f_1(\sigma) = \sigma \end{aligned} \quad (22)$$

식 (18), (19)에 $f_r(\sigma)$ 를 곱하여 수심에 대해 적분한다. 식 (18)에 적용하면 식 (23)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial t} f_k d\sigma &= \gamma \int_{-1}^1 v f_k d\sigma + \frac{4}{h^2} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) f_k d\sigma \\ &\quad + \frac{F_b - F_s}{\rho h} \int_{-1}^1 f_k d\sigma \end{aligned} \quad (23)$$

二次微分項을 部分積分하여 식 (20)을 대입하면 식 (24)와 같다.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial t} f_k d\sigma &= \gamma \int_{-1}^1 v f_k d\sigma + \frac{F_b - F_s}{\rho h} \int_{-1}^1 f_k d\sigma \\ &\quad + \frac{4}{h^2} \left[-F_b \frac{h}{2\rho} f_k(1) + F_s \frac{h}{2\rho} f_k(-1) \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{df_k}{d\sigma} d\sigma \right] \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)에 식 (21)을 대입하여 정리하면 식 (25)와 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^m \frac{\partial A_r}{\partial t} \int_{-1}^1 f_r f_k d\sigma &= \gamma \sum_{r=0}^m B_r \int_{-1}^1 f_r f_k d\sigma \\ &\quad - \frac{2F_b}{\rho h} f_k(1) + \frac{2F_s}{\rho h} f_k(-1) \\ &\quad - \frac{4}{h^2} \sum_{r=0}^m A_r \int_{-1}^1 \mu \frac{df_r}{d\sigma} \frac{df_k}{d\sigma} d\sigma \\ &\quad + \frac{F_b - F_s}{\rho h} \int_{-1}^1 f_k d\sigma \quad (k=0, \dots, m) \end{aligned} \quad (25)$$

유사한 방법으로 정리하면, 식 (19)는 식 (26)과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^m \frac{\partial B_r}{\partial t} \int_{-1}^1 f_r f_k d\sigma &= -\gamma \sum_{r=0}^m A_r \int_{-1}^1 f_r f_k d\sigma \\ &\quad - \frac{2G_b}{\rho h} f_k(1) + \frac{2G_s}{\rho h} f_k(-1) \\ &\quad - \frac{4}{h^2} \sum_{r=1}^m B_r \int_{-1}^1 \mu \frac{df_r}{d\sigma} \frac{df_k}{d\sigma} d\sigma \\ &\quad + \frac{G_b - G_s}{\rho h} \int_{-1}^1 f_k d\sigma \quad (k=0, \dots, m) \end{aligned} \quad (26)$$

식 (25), (26)은 다음과 같은 行列方程式으로 나타낼 수 있다.

$$[C] \{\dot{a}\} = \gamma[C]\{b\} - \frac{2F_b}{\rho h} \{f_1\} + \frac{2F_s}{\rho h} \{f_{-1}\} - \frac{4}{h^2}[D] \{a\} + \frac{F_b - F_s}{\rho h} \{f\} \quad (27)$$

$$[C] \{\dot{b}\} = -\gamma[C]\{a\} - \frac{2F_b}{\rho h} \{f_1\} + \frac{2F_s}{\rho h} \{f_{-1}\} - \frac{4}{h^2}[D] \{b\} + \frac{G_b - G_s}{\rho h} \{f\} \quad (28)$$

여기에서, $[C]$ 는 r, k 위치의 요소가 $\int_{-1}^{+1} f_r f_k d\sigma$ 로 되는 $(m+1) \times (m+1)$ 行列이며, $\{f_1\}, \{f_{-1}\}$ 는 k 요소가 $f_k(+1), f_k(-1)$ 로 정의되는 행벡터이고, $\{f\}$ 는 k 요소가 $\int_{-1}^{+1} f_k d\sigma$ 로 정의되는 행벡터이다. 또한 $\{a\}, \{\dot{a}\}, \{b\}, \{\dot{b}\}$ 는 상수 A, B 과 그 미분항으로 정의되는 $(m+1)$ 행벡터, F_b, F_s 는 海底面 摩擦應力과 海水面 摩擦應力, $[D]$ 는 요소 r, k 가 $\int_{-1}^{+1} \mu_r' f_k' d\sigma$ 로 되는 $(m+1) \times (m+1)$ 行列이다. 여기에서 $f_i' = df_i/d\sigma$ 이다.

2.4 類似變換技法을 利用한 基底函數의 係數값 計算

2.3에서 행렬식으로 표현된 Galerkin해인 식 (27), (28)은 行列 $[C], [D]$ 가 full matrix로 형성되어 $[C]$ 行列의 역행렬를 구하여 양변에 곱한 다음 수치적인 방법으로 기저함수의 계수 값을 구할 수 있다. 본 연구에서는 類似變換技法(Strang, 1980)을 사용 기저함수의 계수 값을 해석적으로 구한다. 먼저, x방향 모우드 해인 식 (27)에 類似變換技法을 적용한다. 식 (27)은 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$[C] \{\dot{a}\} = -\frac{4}{h^2} [D] \{a\} + \{p\} \quad (29)$$

여기에서,

$$\{p\} = \gamma[C]\{b\} - \frac{2F_b}{\rho h} \{f_1\} + \frac{2F_s}{\rho h} \{f_{-1}\} + \frac{F_b - F_s}{\rho h} \{f\} \quad (30)$$

$[C]^{-1}[D]$ 의 고유벡터와 固有値는 다음 식으로 부터 결정될 수 있다.

$$(\lambda[C] - [D])\{\gamma\} = \{0\} \quad (31)$$

여기에서 $\lambda, \{\gamma\}$ 는 $[C]^{-1}[D]$ 의 고유치와 고유벡터

이다.

m 개의 모우드를 사용할 경우 식 (31)을 풀면 다음 식과 같이 표현되는 m 개의 고유치와 고유벡터를 구할 수 있다.

- 고유치 : $\lambda_n \quad (n=1, \dots, m)$
- 고유벡터 : $[\Gamma] = [\{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \dots, \{\gamma_m\}]$

여기서 식 (29)에 類似變換技法을 적용하기 위하여 $\{a\}$ 를 다음 식과 같이 變換한다.

$$\{a\} = [\Gamma]\{\xi\} \quad (32)$$

여기에서, $[\Gamma]$ 는 앞서 표현된 고유벡터의 行列 형태이고, $\{\xi\}$ 는 도입된 행벡터이다. 식 (29)에 $[\Gamma]^T$ 를 곱하면 식 (33)과 같이 표현될 수 있다.

$$[\Gamma]^T[C][\Gamma]\{\xi\} = -\frac{4}{h^2} [\Gamma]^T[D][\Gamma]\{\xi\} + \{p'\} \quad (33)$$

여기에서, $\{p'\} = [\Gamma]^T\{p\}$ 이고, 고유벡터 行列 형태인 $[\Gamma]$ 는 $[C], [D]$ 行列에 直交(orthogonal)하므로 $[\Gamma]^T[C][\Gamma], [\Gamma]^T[D][\Gamma]$ 는 대각성분만이 존재하며, 각각의 대각 성분을 α_n, β_n 라 하면 식 (33)은 다음과 같은 독립적인 方程式 형태로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_n \dot{\xi}_n &= -\frac{4}{h^2} \beta_n \xi_n + p_n' \quad (n=1, \dots, m) \\ \dot{\xi}_n &= -\frac{4}{h^2} \lambda_n \xi_n + \frac{p_n'}{\alpha_n} \quad (n=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (34)$$

여기에서, $\lambda_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}$ 이다.

그런데 식 (34)는 고유치 즉 λ_n 가 특정 상수 값을 가질 경우 解析解를 구할 수 있는데 고유치가 0일 경우 식 (34)는 다음 식과 같이 표현된다.

$$\dot{\xi}_n = \frac{p_n'}{\alpha_n} \quad (n=1, \dots, m) \quad (35)$$

따라서 식 (34), (35)는 초기치를 알 수 있을 경우 解析解를 구할 수 있다.

초기치를 $t=0$ 일 때 $\xi_n = \xi_n^0$ 이라고 하면 解析解는 다음과 같다.

- i) λ_n 가 0이 아닐 경우,

$$\xi_n' = \left(\xi_n^0 - \frac{p_n'}{\alpha_n} \right) e^{(-4/h^2)\lambda_n t} + \frac{p_n'}{4\lambda_n} \quad (n=1, \dots, m) \quad (36)$$

ii) λ_n 가 0일 경우,

$$\xi_n' = \xi_n^0 + \frac{p_n'}{\alpha_n} t \quad (n=1, \dots, m) \quad (37)$$

식 (36), (37)를 이용하여 일정 시간에서의 ξ_n' 를 구하면 식 (31)을 이용 Internal 모우드의 基底函數의 계수 값을 구할 수 있다.

이상과 같은 방법으로 구한 基底函數의 계수 값은 앞서도 논의하였지만 일정 시간 단계에서 해를 해석적으로 구할 수 있어 계산 시간 간격의 제한을 받지 않고 해를 구할 수 있고 [C] 行列의 역행렬을 구하지 않아도 되어 行列 계산 시의 시간을 절약할 수 있다. 그러나 식 (36), (37)은 海底面 摩擦應力項이 연관되어 (coupled) 있다는 것을 알 수 있는데 海底面 摩擦應力 값의 보정은 후술하겠으나 계산 단계에서의 오차를 최소화하는 반복계산법을 사용하였다.

Galerkin-eigenfunction 방법을 사용하는 경우 기저함수가 Sturm-Liouville system에 의해 결정되는 고유함수가 되어 [C], [D] 行列은 유사변환 기법을 사용하지 않아도 대각 행렬이 된다.

3. 數值計算式

3.1 External 모우드

數值計算은 External 모우드와 Internal 모우드로 분리하여 수행한다. External 모우드의 水深平均 2次元 連續方程式과 運動方程式은 양해 유한차분법, 음해 유한차분법, 유한요소법을 이용하여 구할 수 있다. 본 연구에서는 양해 유한차분법을 이용하였으며, 격자 체계는 Fig. 1과 같은 Staggered grid system인 Arakawa-C grid를 사용하였다.

External 모우드의 數值計算式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \zeta(t + \Delta t) = & \zeta_i(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} [h_{ie}\bar{u}_i(t) - h_{iw}\bar{u}_{i-1}(t)] \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} [h_{in}\bar{v}_{i-n}(t) - h_{is}\bar{v}_i(t)] \end{aligned} \quad (38)$$

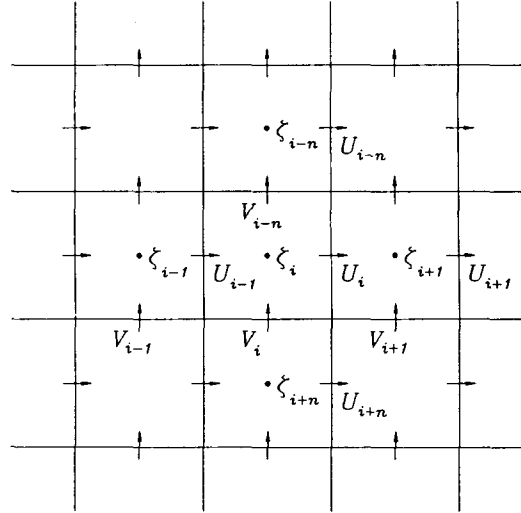


Fig. 1. The staggered Arakawa-C grid system.

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(t + \Delta t) = & \bar{u}_i(t) + \gamma \Delta t \hat{u}_i(t) \\ & - g \frac{\Delta t}{\Delta x} [\zeta_{i+1}(t + \Delta t) - \zeta_i(t + \Delta t)] \\ & - \frac{\Delta t}{\rho h_{ie}} F_{bi} + \frac{\Delta t}{\rho h_{ie}} F_{si} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_i(t + \Delta t) = & \bar{v}_i(t) + \gamma \Delta t \hat{v}_i(t) \\ & - g \frac{\Delta t}{\Delta y} [\zeta_i(t + \Delta t) - \zeta_{i+n}(t + \Delta t)] \\ & - \frac{\Delta t}{\rho h_{is}} G_{bi} + \frac{\Delta t}{\rho h_{is}} G_{si} \end{aligned} \quad (40)$$

여기서,

$$\hat{u}_i(t) = [\bar{u}_i(t) + \bar{u}_{i-1}(t) + \bar{u}_{i+n}(t) + \bar{u}_{i+n-1}(t)]/4 \quad (41)$$

$$\hat{v}_i(t) = [\bar{v}_i(t) + \bar{v}_{i+1}(t) + \bar{v}_{i-n}(t) + \bar{v}_{i-n+1}(t)]/4 \quad (42)$$

$$*_{ie} = (*_i + *_{i+1})/2 \quad (43)$$

$$*_{in} = (*_i + *_{i-n})/2 \quad (44)$$

$$*_{iw} = (*_i + *_{i-1})/2 \quad (45)$$

$$*_{is} = (*_i + *_{i+n})/2 \quad (46)$$

Δt : 計算時間 間隔(sec)

Δx : x方向 格子크기(m)

Δy : y方向 格子크기(m)

n : 計算領域 x方向 格子數.

위와 같이 양해 유한차분법을 사용하는 수치계산식에서는 계산의 安定性이 계산 시간 간격, 격자 크기, 수심 등을 고려하는 CFL조건(Courant-Friedrichs-Lewy stability condition)을 따른다.

$$\text{즉, } \Delta t \leq \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} \{ (gH)^{1/2} + U \}} \quad (47)$$

여기서, H : 計算領域내 最大水深

U : 計算領域내 最大流速

이다. 초기 조건으로는 계산 영역 내의 모든 격자점에서 $t=0$ 일때, $\xi_i = \bar{u}_i = \bar{v}_i = 0$ 으로 Cold start 조건을 주었다. 境界條件은 기존 연구 결과와 比較 檢討하기 위하여 Heaps' basin을 사용하였기 때문에 육지 경계, 즉 閉境界를 사용하였다. 閉境界에는 法線流速(normal velocity)이 0인 閉境界條件이 사용되었다.

3.2 Internal 모우드

앞서 2.4에서 논의한 類似變換技法을 사용한다. Internal 모우드해는 식 (36), (37)과 같은 解析解의 형태로서 모우드 벡터 ξ 를 구하고 난 뒤 식 (30)을 이용하면 독립적인 方程式의 해로써 각 기저함수의 계수값을 구할 수 있으나 오른쪽 항의 海底面 摩擦應力(bottom stress)항은 연관되어(coupled) 있다. Internal 모우드 계산 시에 이론상으로는 계산 시간 간격의 제한을 전혀 받지 않으나 Internal 모우드에서 구한 海底面 摩擦應力값이 External 모우드 계산 시에 海底面 摩擦應力값으로 계산되어 지기 때문에 계산 시간 간격 효과를 검토한 후 계산 시간 간격을 결정해야 할 것이다. 따라서 본 연구에서는 계산 시간 효과를 검토한 후 계산 시간 간격을 정한 후 다음과 같은 방법을 사용하여 Internal 모우드의 해를 구하였다.

초기치를 $t=0$ 일 때 $\xi=0$ 이라고 하고 t시간 경과 후의 값을 $\xi=\xi_l$ 라 하면 다음 단계 시간, $t+\Delta t$ 시간에서의 解析解는 다음 식과 같이 구할 수 있다.

i) λ_l 가 0이 아닐 경우,

$$\xi_l^{t+\Delta t} = \left(\begin{array}{c} \frac{p_l'}{\alpha_l} \\ \frac{4}{h^2} \lambda_l \end{array} \right) e^{(-4/h^2)\lambda_l \Delta t} + \frac{p_l'}{\alpha_l} - \frac{4}{h^2} \lambda_l \quad (48)$$

($l=1, \dots, m$)

ii) λ_l 가 0일 경우,

$$\xi_l^{t+\Delta t} = \left(\xi_l^t + \frac{p_l'}{\alpha_l} \right) \Delta t \quad (l=1, \dots, m) \quad (49)$$

식 (48), (49)에서 일정 시간 단계에서의 ξ 를 구하면 식 (30)을 이용 Internal 모우드의 해를 구할 수 있다. 그러나 식 (48), (49)는 海底面 摩擦應力항이 연관되어(coupled) 있어 Internal 모우드 계산시에 海底面 摩擦應力값을 반복계산법으로 보정하였다. 반복계산법 계산 순서는 Internal 모우드의 전 단계의 값으로 海底面 流速을 계산하여 海底面 摩擦應力값을 구한 후 각 모우드의 기저함수의 계수 값을 구하면 계산된 기저함수의 계수 값으로 부터 다시 海底面 流速과 海底面 應力값을 구할 수 있다. 새로 구한 海底面 摩擦應力값은 처음 구한 海底面 摩擦應力값과 차이가 생기는데 이 차이가 오차 범위 내에 들어오지 않으면 다시 반복 계산하고 오차범위 내에 들어오면 계산을 중단하고 다음 단계로 넘어간다. 계산 시에 오차범위는 전 단계에서 구한 海底面 流速과 새로 구한 海底面 流速의 오차를 10^{-6} 으로 하였다. Internal 모우드의 초기치도 External 모우드와 마찬가지로 Cold start條件을 주었다.

4. 數值實驗 및 結果

4.1 모델의 領域

Heaps(1972)와 Davies and Owen(1979)은 North Sea 규모의 一定水深 長方形 Basin에 3차원 스펙트랄 모델을 적용하여 風成流의 循環을 재현한 바 있다. 본 연구는 Heaps(1972), Davies and Owen(1979)의 계산 결과를 비교하기 위하여 동일한 條件 하에서 數值實驗을 실시하였다. 計算 領域 $400 \text{ km} \times 800 \text{ km}$ 에 9×17 개의 格子網을 구성하였으며, 水深은 일정 수심 65m, 전향력상수는 $0.44h^{-1}$ 로 주었다. 바람 條件은 북풍에 의한 바람응력이 -1.5 N/m^2 으로 전 영역에 일정하게 주었다. 境界條件은 閉境界條件을 사용하였다. 계산에 사용된 격자망은 Fig. 2와 같다.

4.2 數值計算 結果

Davies and Owen(1979)은 基底函數로 여러 가지

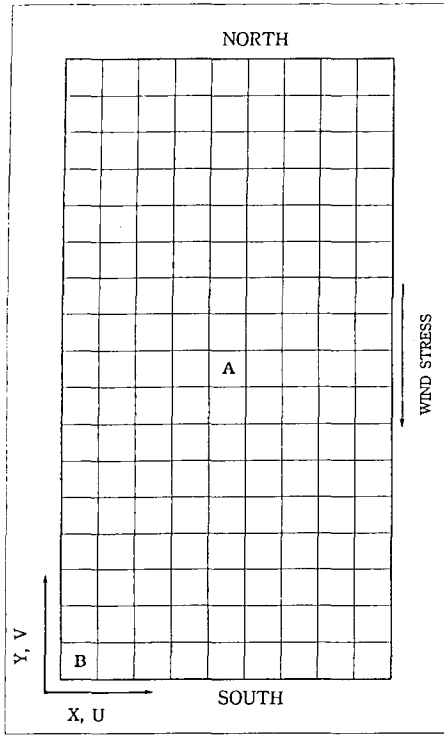


Fig. 2. Closed rectangular sea basin (Heaps' Basin).

多項式 函數를 사용하고, 계산 시간 간격은 180초, 모우드 수를 2~10까지 변화시키면서 수치실험을 하여 海底面조건과 鉛直 渦粘性係數의 鉛直分布을 달리하면서 流速의 연직구조 등을 比較, 檢討하였다. 그 결과 多項式函數를 기저함수로 채택하는 경우에 風成流 再現 시에 固有函數技法을 사용한 경우보다 해수면 流速의 수렴성이 뛰어난 것으로 나타났다. 본 연구에서는 계산 시간 간격을 External 모우드의 경우 $\Delta t=180$ 초, Internal 모우드인 경우 계산 시간 간격을 달리하면서 계산을 수행하여 계산 시간 간격 효과를 검토하였고 모우드 수에 따른 결과도 아울러 검토하였다. Davis and Owen(1979)이 사용한 모델과 비교를 위하여 모우드분리 모델과 모우드분리후 類似變換技法을 사용하는 類似變換技法 모델을 개발하여 각 모델 간의 결과를 비교, 검토하였다. 결과 검토를 위하여 다음과 같은 數值實驗을 수행하였다.

1) 實驗 1: 鉛直 渦粘性係數의 鉛直分布을 常數 $N=0.065 \text{ N/m}^2$, 海底面 摩擦應力의 계산시 線形 摩擦關係式(linear friction law)을 사용하였고(海底面

摩擦係數는 $k=0.002 \text{ m/sec}$) 모우드 수, Internal 모우드 계산 시간 간격 효과 검토.

2) 實驗 2: 모우드 수는 4개를 사용하고, 鉛直 渦粘性係數의 鉛直分布을 상수 $N=0.065 \text{ N/m}^2$, 海底面 摩擦應力의 계산시 線形 摩擦關係式(linear friction law)과, 非線形 摩擦關係式(quadratic friction law)을 사용하면서 마찰계수의 차이에 따른 결과 검토.

3) 實驗 3: 모우드 수는 4개를 사용하고, 海底面 摩擦應力의 계산시 線形 摩擦關係式(linear friction law)을 사용하고, 鉛直 渦粘性係數 값의 차이에 따른 결과 검토.

4.2.1 實驗 1

먼저 Internal 모우드 수의 갯수를 달리하면서 계산을 수행하였다. 計算 時間은 External, Internal 모우드 계산시 공히 180초로 하였다. Fig.3은 모우드 수를 2, 4, 8로 변화시키면서 중앙 점에서의 鉛直 流速分布을 나타낸 그림인데 그림에서 알 수 있듯이 모우드 수가 2개일 때 값의 차이가 있고 4, 8개를 사용할 경우 x방향 流速分布가 약간 차이가 나타나 거의 비슷하게 재현함을 볼 수 있다.

Fig.4는 鉛直 流速分布에 기여하는 각 모우드별 기여도를 나타낸 그림인데 그림에서 알 수 있듯이 4번째 모우드까지가 기여도가 가장 크고 5번째 모우드부터는 기여도가 거의 없는 것을 볼 수 있는데 4개의 모우드만 사용하여도 수렴성이 뛰어나다고 한 Davies and Owen(1979)의 결과와도 같은 결론을 얻을 수 있다. 이후의 數值實驗에서는 모우드 수는 4개를 사용한다.

Internal 모우드 계산 시 計算時間 間隔 效果를 檢討하기 위하여 계산 시간 간격을 External 모우드인 경우 180초, Internal 모우드인 경우 External 모우드와의 계산 간격을 1, 10, 20, 50으로 주어 계산하였다. Fig.5는 計算時間 間隔을 달리하면서 300시간 후의 중앙 점에서의 流速 分布를 비교하여 본 그림인데 그림에서 보듯이 計算時間 間隔을 10으로 주었을 경우 1로 주었을 경우와 거의 같고, 20의 경우 y방향 流速이 조금 차이가 나고, 50의 경우 결과가 크게 다름을 볼 수 있다. 이 결과로 볼 때 Davies(1985)가 계산 시간 간격을 4-10으로 제한한 것이 타당하다고 볼 수 있다. 이 후의 數值實驗에서는 Internal 모우드 계산 시간 간격은 10, 즉 1800초를 사용한다.

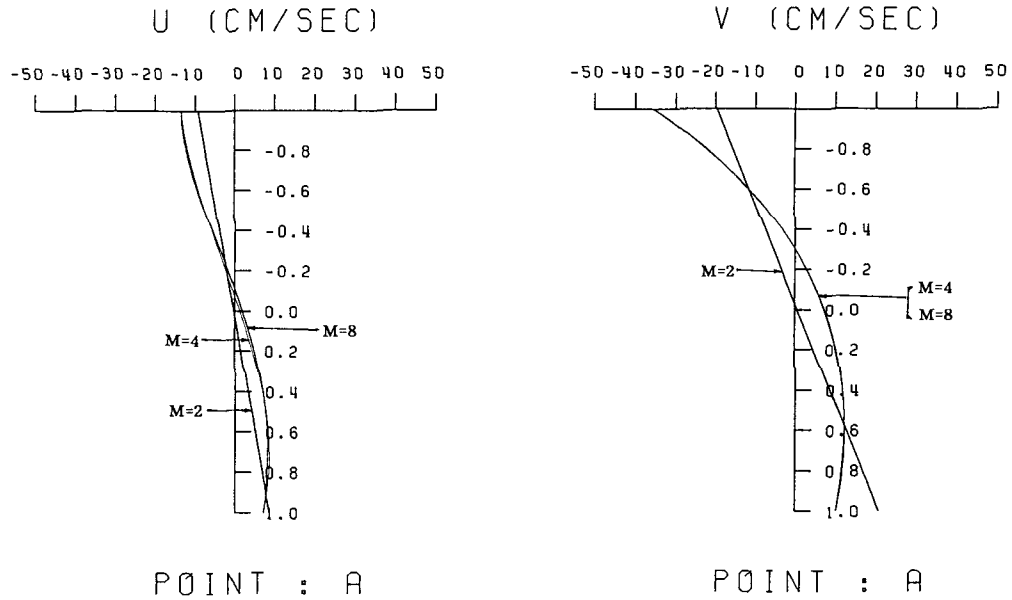


Fig. 3. Velocity profiles at the central point A for various mode numbers (M=2, 4, 8).

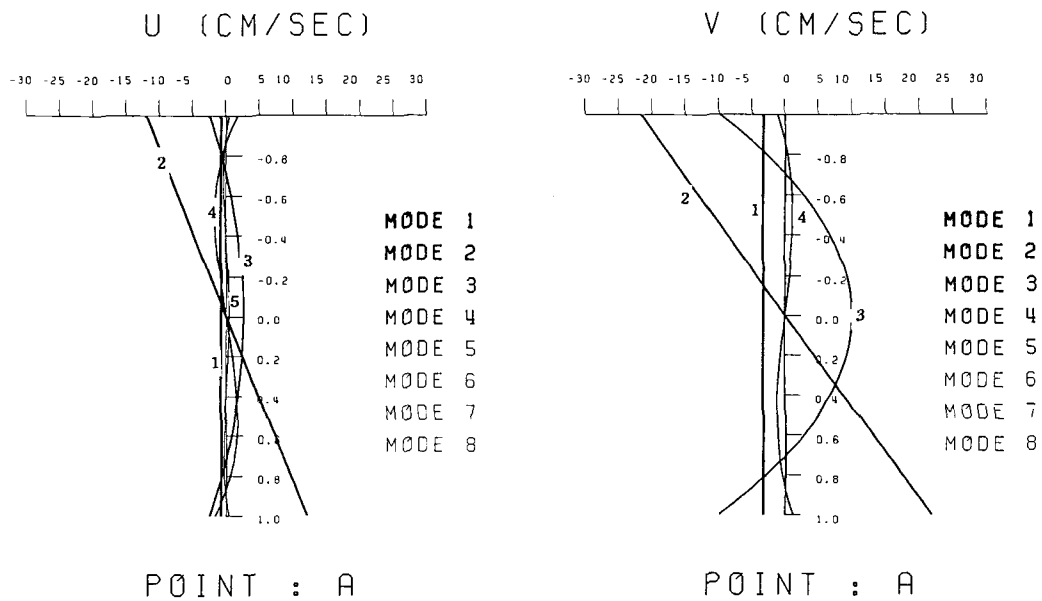


Fig. 4. Contribution to velocity profiles of the first 8 modes.

Table 1은 모우드 수는 4개를 사용하고 Internal 모우드 계산 시간 간격을 1로 주어 300시간 경과 후 중앙 점에서의 流速 및 B점에서의 海水面 上昇을 類似變換技法 모델과 모우드분리 모델, Davies and

Owen (1979)의 결과와 비교하여 본 포인트, 표에서 알 수 있듯이 결과가 거의 같음을 알 수 있다. 결과로 볼 때 임의의 基底函數에도 모우드 분리가 가능하다고 한 Davies(1982)의 결론은 타당하다고 여겨지며 類

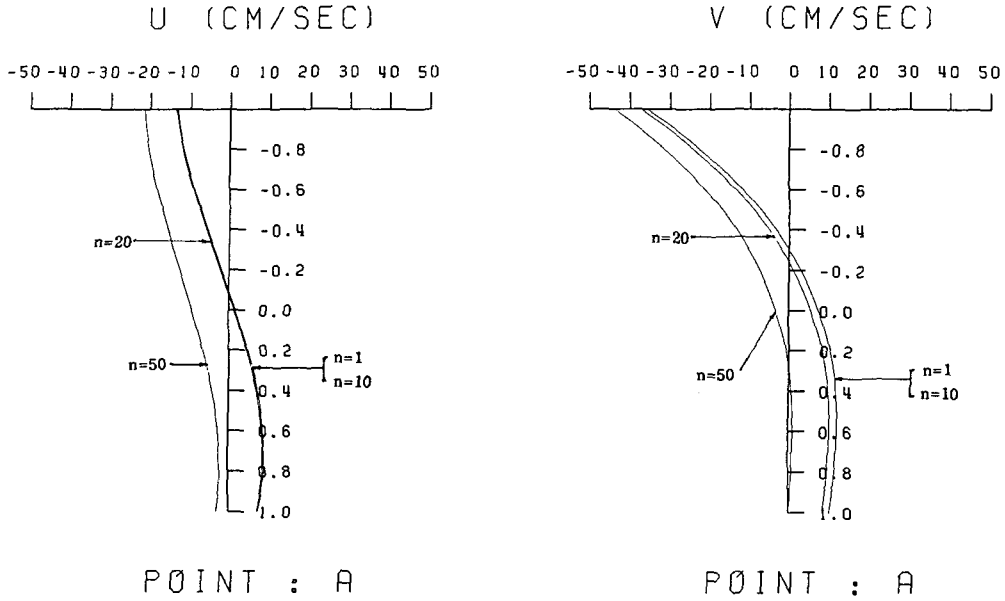


Fig. 5. Velocity profiles at the central point A for time splitting steps (n=1, 10, 20, 50).

Table 1. U and V components of current and surface elevation, 300 hours after onset of wind field, computed using various models

Depth	Component of current (cm/sec)	Davies and Owen	Mode splitting model	Similarity transform model
Surface	U	-13.52	-13.53	-13.52
	V	-35.66	-35.66	-35.66
Bottom	U	7.16	7.15	7.16
	V	10.14	10.14	10.14
Surface Elevation(m)		1.016	1.019	1.016

似變換技法은 鉛直 流速分布와 해수면 변이를 잘 재현해 주는 것으로 판단된다. 실제 지형에 적용할 경우에 따르는 시간 제약 문제를 고려하여 볼 때 개발된 모델의 적용은 유용하리라 여겨진다.

4.2.2 實驗 2

Fig. 6은 海底面 摩擦係數에 따른 해수면 변이를 나타낸 그림인데 비선형관계를 가질 때는 $K=0.002$ 일 경우 감쇄(damping)가 매우 약하여 진동이 오랫동안 지속되었고 $K=0.01$ 일 경우에는 진동 양상은 $k=0.002$ 일 경우와 비슷하였으나 해수면이 낮게 계산되었다. $K=0.02$ 일 경우 감쇄 속도가 빠르고 최종 해수면이 약간 높게 계산되었다. $K=0.015$ 일 경우 $k=0.002$ 의 경우와 비교하여 볼 때 감쇄 속도가 약간 빠르고 최종 값은 거의 비슷하다는 것을 알 수 있다.

Fig. 7은 선형마찰관계를 사용할 경우에 $k=0.002$ 를 주고 비선형마찰 관계일 때 $K=0.01, 0.015, 0.02$ 등으로 변화시켜 계산한 중앙 점에서의 鉛直流速 比較圖이다. 그림에서 알 수 있듯이 $K=0.015$ 일 경우 $k=0.002$ 와 가장 유사함을 알 수 있다.

Davies(1985)는 k 와 K 의 관계를 다음 식으로 표현하면서 K 의 값은 0.002-0.005가 전형적이라고 보았다.

$$k = 4 KU/\pi \tag{50}$$

여기서, k : 線形關係式에서의 海底面 摩擦係數(cm/s)

K : 非線形關係式에서의 海底面 摩擦係數

U : 流速의 振幅

본 연구의 결과로 볼 때 流速의 진폭을 0.1 m/s로

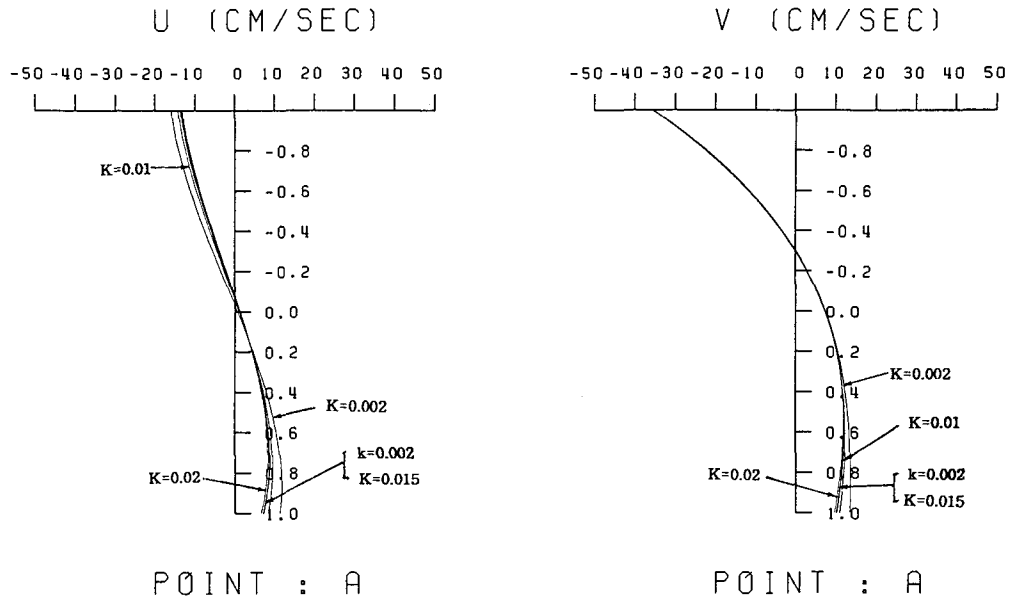


Fig. 6. Time variations of surface elevation at the corner point B for various bottom friction coefficients.

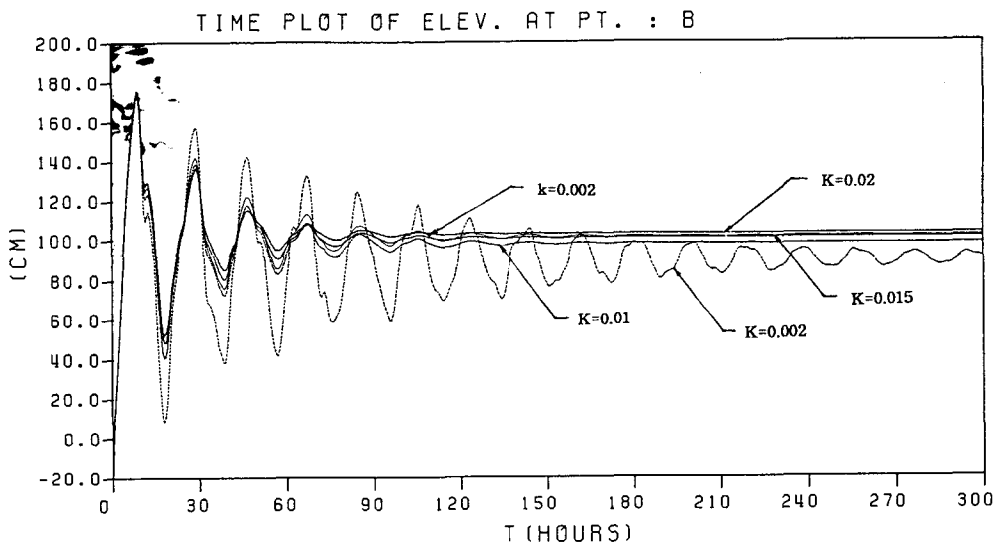


Fig. 7. Velocity profiles at the central point A for various bottom friction coefficients.

주면 Fig. 6, 7의 결과로 볼 때 $k=0.002$ 일 때 $K=0.016$ 정도의 값을 가져서, Davies의 식이 타당하다는 것을 알 수 있는데 선형 마찰 관계식을 사용할 경우의 저면 마찰계수가 너무 낮게 평가되는 문제가 생긴다.

4.2.3 實驗 3

Fig. 8은 海底面 摩擦關係는 線形關係式($k=0.002$)을 사용하고 鉛直 渦粘性係數를 常數 $N=0.013, 0.065, 0.1020 \text{ N/m}^2$ 로 주어 鉛直 渦粘性係數의 차이에 의한 鉛直 流速分布를 나타낸 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이 鉛直 渦粘性係數 값의 차이로 인한 결과가

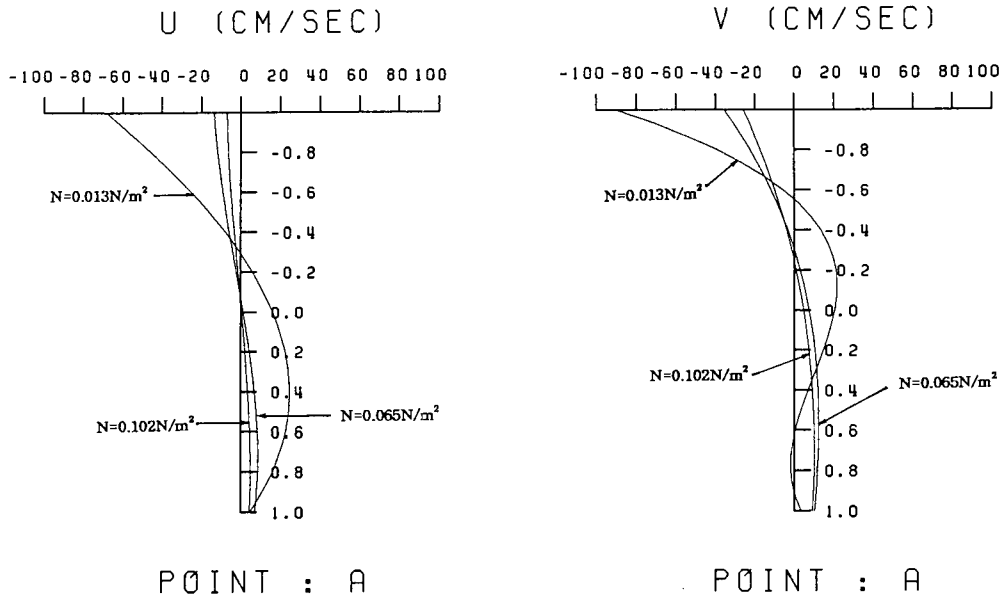


Fig. 8. Velocity profiles at the central point A for a range of eddy viscosity values.

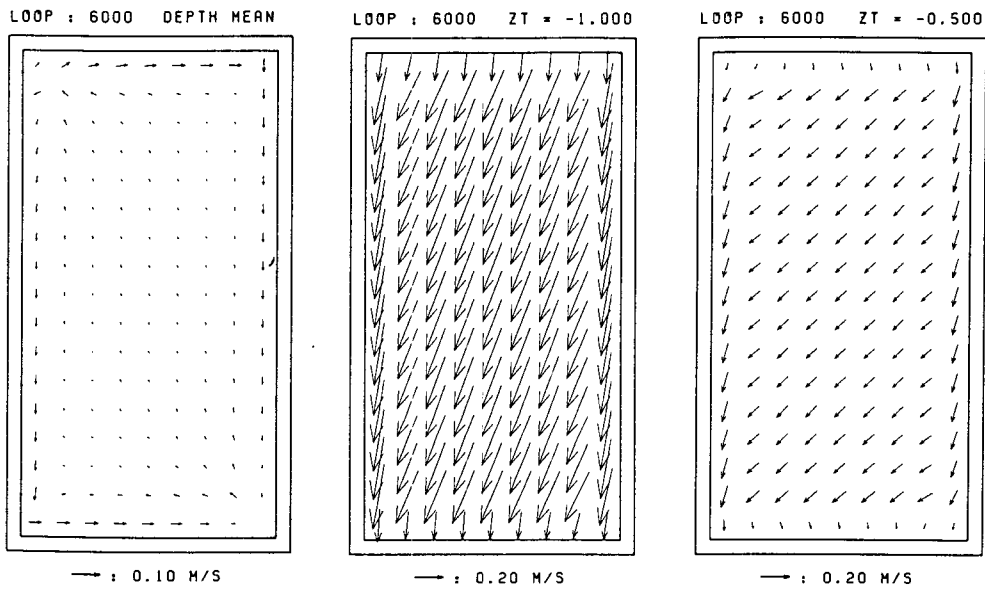


Fig. 9. Depth-mean current vectors and current field at various levels from surface to bottom.

다름을 알 수 있고, 재현 양상이 Davies(1985)의 결과와 같다는 것을 알 수 있다. 이는 風成流 재현시鉛直 渦粘性係數 값의 차이로 인한 결과가 상당히 다르게 나타날 수 있다는 것으로 실제 적용시 세심한 주의가 요구된다.鉛直 渦粘性係數의鉛直分布의 차

이에 의한 후속적인 연구가 필요하며 차후 연구 과제로 남겨 둔다.

Fig.9는 實驗 1 수행시 300時間 후의 平均流速과 각 층별 流速分布를 나타낸 그림인데 전반적인 재현 양상이 기존의 연구(Heaps, 1972, Davies, 1977) 결

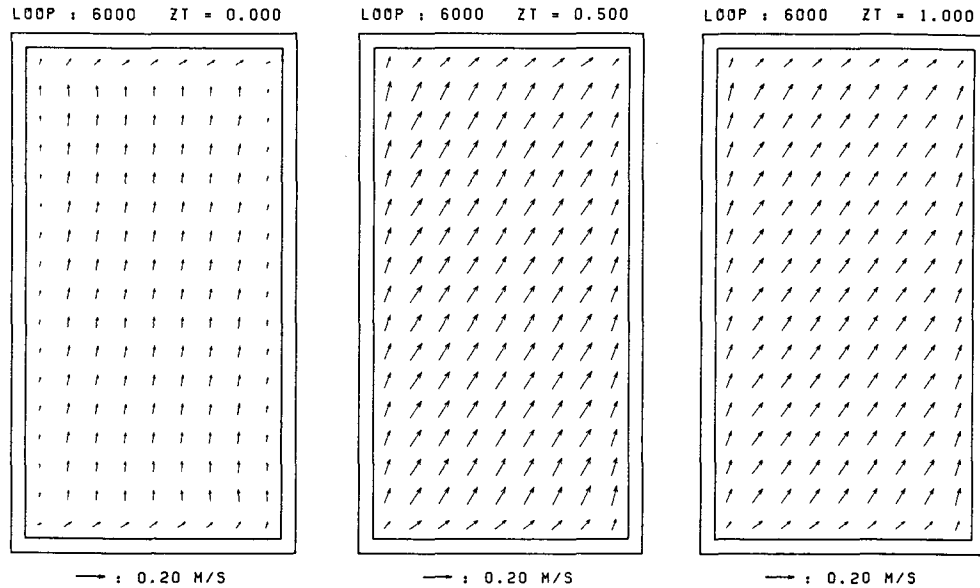


Fig. 9. Continued.

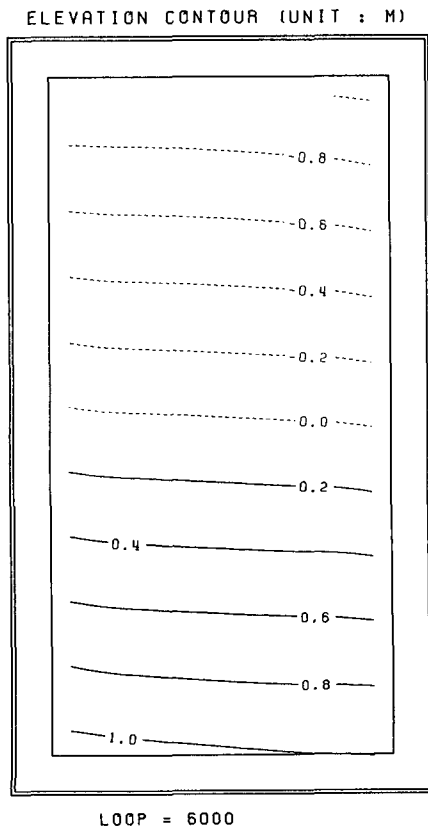


Fig. 10. Elevation contours at t=300 hours (steady circulation).

과와 상당히 유사하다. Fig.10은 實驗 1 수행시 300 시간 후의 海面 變化를 나타낸 것으로 기존의 연구 (Heaps, 1972) 結果와 상당히 유사하다.

5. 結論 및 討議

本 研究에서는 基本方程式을 모우드 分離한 후 Internal 모우드 계산시 類似變換技法을 사용하는 3차원 모우드 모델을 開發하였다. 개발된 類似變換技法 모델의 長點은 기존의 고유함수 방법(eigenfunction-Galerkin method) 사용시 基底函數가 Sturm-Liouville system의 해를 만족해야 하는 制限을 받지 않아 어떤 基底函數에도 적용이 가능하고 Internal 모우드의 해를 解析的으로 구할 수 있어 3차원 모델 數值 實驗시 항상 制限 조건으로 따르는 時間間隔의 制約을 거의 받지 않고 鉛直構造를 구할 수 있기 때문에 經濟性 面에서 탁월하다. 또한 類似變換技法 모델은 海底面摩擦係數가 비선형관계일 때도 적용이 가능하다.

모델의 檢證을 위해 Heaps(1972)가 사용한 一定水深 長方形 Basin에 適用하여 그 結果를 Heaps(1972) 및 Davies와 Owen(1979)의 연구 結果와 比較, 檢討 하였다. 검토 結果 개발된 모델은 기존의 연구 結果와 상당히 유사하여 실제 지형에 적용 가능하리라 판단

된다. 그러나, 본 모델을 실제 지형에 적용함에 있어서는 不規則 水深, 實際의 岸線, 조간대 및 外海 境界를 처리할 수 있게끔 확장해야 하며 現在 研究가 進行中에 있다.

參考文獻

- 崔秉昊, 1983, 京畿灣의 3次元 流動 解析 모델, 韓國海洋學會誌, 제18권 제1호, pp. 10-20.
- 蘇在貴, 鄭景太, 李光秀, 承永鎬, 1992, 吹送流 再現을 위한 3次元 스펙트랄모형 開發, 韓國海岸 · 海洋工學會誌, 제4권 2호, pp. 91-107.
- Davies, A.M., 1977. The numerical solution of the three-dimensional hydrodynamic equations using a B-spline representation of the vertical current profile. Bottom turbulence. Proc. of the 8th Liege Colloquium on Ocean Hydrodynamics, ed. by J.C.J. Nihoul, Elsevier Oceanographic Series 19, pp. 27-48.
- Davies, A.M. and Owen, A., 1979. Three dimensional numerical sea model using the Galerkin method with a polynomial basis set. *Appl. Math. Modelling*, V3, December, pp. 421-428.
- Davies, A.M., 1982. Formulating a three dimensional hydrodynamic sea model using a mixed Galerkin-Finite difference method, Finite elements in water resources, ed. by K.P. Holz et al., Springer-Verlag, Berlin, pp. 5.27-5.41.
- Davies, A.M. 1985. A three dimensional modal model of wind induced flow in a sea region, *Prog. Oceanog.*, V15, pp. 71-128.
- Gordon, R.B., 1982. Wind-driven circulation in Narragansett Bay. Ph.D Dissertation, University of Rhode Island, Kingston.
- Heaps, N.S., 1972. On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges. *Memoires Societe Royale des Sciences de Liege*, 6 serie, tome II, pp. 143-180.
- Hwang, J.C., Koerner, R.M., Cho, W.C. and Yeung, K.S., 1984. An eigenvalue technique for solute transport. *Jour. of Hyd. Eng.*, 110(10): pp. 1302-1314.
- Strang, G., 1980. Linear algebra and its applications, Academic Press, Inc., New York.