

CGM을 이용한 緩傾斜方程式의 數值解析 Numerical Solution of the Mild Slope Equation by Conjugate Gradient Method

尹 鐘 台*
Jong Tae Yoon*

要 旨 : 球形 海底地形과 離岸堤를 가진 海岸에 대한 緩傾斜方程式의 解를 구하는데 反復技法(Conjugate Gradient Method, Panchang *et al.*, 1991)을 사용하였다. 地形 및 構造物로 인한 岬梁의 진파변형에 대한 계산결과가 實驗値와도 잘 일치하였다. 從來 過度한 記憶容量 때문에 廣域에는 緩傾斜方程式을 그대로 사용하기가 어려웠지만 이 技法을 사용하면 그런 어려움은 解決된 것으로 판단된다. 특히 所要되는 計算時間이 짧고 複雜한 地形 및 構造物에 대해서도 별 어려움 없이 적용할 수 있는 것이 큰 長點이다.

Abstract □ Iterative solution procedure (Conjugate Gradient Method, Panchang *et al.*, 1991) is implemented for solving the complete mild slope equation for the spherical shoal and the coast with detached breakwater. The numerical results agreed well with the experimental data. The disadvantage that mild slope equation could be solved only for small domains is now overcome by using this solution procedure. Moreover it can be easily applied to the coastal regions with complex geometry and structures, and needs not so much computer time as the conventional models.

1. 緒 論

海岸構造物의 設置나 海岸環境 문제를 다룰 때 가장 필수적인 것이 그 지역에서의 정확한 波浪資料이다. 파랑은 淺海로 傳播해 愈에 따라 水深 및 지형변화로 인한 廻折 및 屈折을 겪으면서 변화하게 되므로 복잡한 지형을 가진 海岸에서의 정확한 파랑계산은 용이한 일이 아니다. 이러한 波浪變化에 대한 研究는 Berkhoff(1972)가 緩傾斜方程式을 발표한 후 큰 진전을 보게 되는데 이로 인해 종래 개별적으로 다루던 廻折과 屈折을 함께 취급할 수 있게 되고 波向線이 교차할 때 생기는 不合理한 에너지의 집중(caustics)을 해결할 수 있게 되었다. 이 방정식은 상당히 유용하여 섬 주위에서의 波浪傳播(Kirby and Dalrymple, 1986 a), 浮船渠에 作用하는 浮力(Tsay and Liu, 1983), 灣에서의 波浪스펙트럼의 전파(Pearce and Panchang, 1985), 兩翼防波堤에서의 회절(Pos and Kilner, 1987)

등 다양한 공학적 문제에 적용될 수 있음이 밝혀졌다.

이러한 유용성에도 불구하고 方程式이 非分離 橢圓形이기 때문에 컴퓨터 容量 및 所要時間이 과도하게 커지는 領域에는 적용하기가 어려워 대부분 近似的인 방법으로 解를 구했다. 이런 근사기법으로는 크게 拋物形 方程式으로의 변환, Ebersole 등(1986)의 RC-PWAVE 模型, 그리고 EVP(Error Vector Propagation) 模型 등이 있는데 이들은 數值的인 어려움을 해결하는 대신 대부분이 主傳播方向을 가져야 하고 廻折效果는 한 方向에만 局限되던지 혹은 反射波가 무시할 만큼 작아야 한다는 物理的인 制約이 불가피해진다. 특히 領域이 사각형이 아니거나 입사각이 크게 변하는 경우엔 模型의 적용시 상당한 어려움을 겪게 된다.

최근에 개발된 形態가 雙曲形 偏微方程式으로 解析하는 경우인데(Copeland, 1985; Madsen and Larsen, 1987) 物理的인 制約으로 나타나는 事前 假定은 없지만

*慶星大學校 土木工學科 (Department of Civil Engineering, Kyung Sung University, Pusan, Korea)

Courant 조건으로 인한 작은 시간간격으로 여러 週期에 걸친 時間積分이 요구되고 開放境界의 취급이 까다로워지는 단점이 있다.

이상의 模型들이 부적합할 땐 결국 원래의 緩傾斜方程式을 사용해야 하는데 앞서 언급한 대로 Gauss 소거법으로 만족스럽게 다룰 수 있는 영역은 약 10 波長 이내이다. 반면에 反復技法을 사용하면 이와 같은 容量 문제를 피할 수 있고 비사각형 領域에도 쉽게 사용할 수 있지만 본 方程式이 일반적인 반복 기법의 收斂條件을 만족하지 않기 때문에 사용할 수가 없다. 본 논문에서는 差分化된 行列方程式을 반복 기법이 가능하게끔 變換시켜 CG(Conjugate Gradient) 技法을 사용하여 해를 구해 보았다. Panchang 등 (1991)에 의해 제안된 이 기법을 Ito와 Tanimoto(1972)의 球形 海底地形과 離岸堤가 설치된 波浪場에 적용하여 雙曲線 모형의 계산치 및 실험치와 비교하여 模型의 正確度 및 效率性을 檢討해 보았다.

2. 波浪變形 模型

2.1 支配方程式

緩傾斜 海域에서의 廻折과 屈折을 나타내는 微小 振幅波의 傳播는 다음 式으로 표시된다(Berkhoff, 1972).

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + \frac{C_g}{C} \sigma^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

여기서 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\Phi(x, y)$ 는 定狀狀態의 평균 해수면상의 속도포텐셜, σ 는 각 주파수, $C(x, y)$ 는 波速, $C_g(x, y)$ 는 群速度 그리고 k 는 波數이다. 分散方程式은 $\sigma^2 = gk \tanh(kh)$ 를 사용한다. 식 (1)은 Φ 의 연직분포가 수평 해저지형에서의 경우와 동일하다는 가정하에 線形進行波에 대한 式을 水深積分한 것이다. 따라서 윗식은 $\nabla h/kh / 0(\epsilon) \ll 1$ 인 완경사해역에서만 유용하다. 식 (1)을 간단히 變換하면

$$\nabla^2 \phi + K^2(x, y)\phi = 0 \quad (2)$$

여기서

$$\phi = \Phi(CC_g)^{0.5}, \quad K^2 = k^2 - \frac{\nabla^2(CC_g)^{0.5}}{(CC_g)^{0.5}} \quad (3)$$

위 變換은 편의를 위한 것일 뿐 추후 記述할 해석기

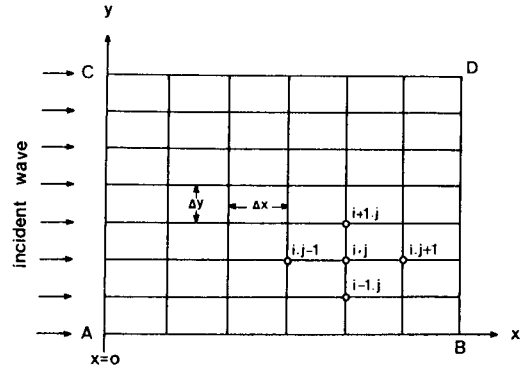


Fig. 1. Model grid.

법은 원 방정식에도 그대로 적용할 수 있다.

2.2 境界條件

식 (2)은 橢圓形 方程式이므로 解析領域(Fig. 1)의 全 閉境界에서 조건이 주어져야 한다. 境界 AC에서 入射波는 $\phi_{in} = A_{in} \exp(ikx)$ 이고 A_{in} 을 1로 둘 수 있다 ($i = \sqrt{-1}$). 反射波를 고려하여 이를 $\phi_r = B \exp(-ikx)$ 로 두고 미분하면(Booij, 1983)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = iK(\phi_{in} - \phi_r) = iK(\phi_{in} - (\phi - \phi_{in})) \quad (4)$$

따라서

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = iK(2\phi_{in} - \phi) \quad (5)$$

식 (5)는 入射境界 AC에서의 한 境界조건이 될 수 있다. 혹은 造波機가 있을 때는 다음 條件을 사용할 수 있다(Berkhoff and Booij, 1982).

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \text{const.} \quad (6)$$

AC에서의 波浪條件이 주어져 있거나 다른 廣域格子에서 미리 계산되어져 있다면 Dirchlet 조건을 사용할 수도 있다. 다른 境界들은 地形의 으로 岸壁, 海岸線 혹은 外海가 될 것인데 이 경우엔 다음 조건을 사용할 수 있다(Tsay and Liu, 1983).

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - iK\alpha\phi = 0 \quad (7)$$

여기서 n 은 경계에 수직한 단위벡터이고 α 는 反射 계수이다.

2.3 數式的 有限差分

격자점(i,j)에서의 포텐셜을 ϕ_i 라 할 때 式 (2)를 2 次的 技法으로 差分化하면($\Delta x = \Delta y$),

$$\phi_i^{-1} + \phi_i^{+1} + \phi_{i-1}^j + \phi_{i+1}^j + [(K\Delta x)^2 - 4]\phi_i^j = 0 \quad (8)$$

對象 海域의 全 格子點에서 위와 같은 차분식을 구성하면 行列로 표시되는 다음과 같은 연립방정식을 얻게 된다.

$$[A] \{\phi\} = \{f\} \quad (9)$$

여기서 $[A]$ 는 계수행렬, $\{\phi\}$ 는 미지벡터 그리고 $\{f\}$ 는 境界條件의 差分화로부터 생기는 係數벡터이다.

3. 反復技法

앞서 언급한 대로 消去法을 사용하기엔 係數行列 $[A]$ 때문에 과도한 記憶容量이 요구되므로 反復技法이 보다 바람직한데 반복기법이 收斂하려면 계수행렬 $[A]$ 가 對角要素가 支配的이거나(diagonally dominant) 혹은 대칭이면서 陽의 定數(positive definite) 이어야 한다. 그러나 式 (8)은 일반적으로 대각要素가 支配的이지도 않고 또한 境界條件으로 인해 $[A]$ 는 non-Hermitian이므로 陽의 定數가 아니다. 고로 SOR 등의 일반적인 反復技法은 적절하지 못하고 여기서는 收斂速度가 여타 技法보다 여러 段階 빠른 것으로 알려진 CG 技法을 사용하고자 한다. CG 기법 또한 收斂을 위해선 $[A]$ 가 對稱에 陽의 定數이어야 하는데 이를 만족시키기 위해선 $[A]$ 에 $[A]$ 의 공액전치행렬 $[A^*]$ 를 곱해 주면 된다.

$$[A^*][A]\{\phi\} = [A^*]\{f\} \quad (10)$$

式 (10)의 계수행렬 $[A^*][A]$ 는 항상 對稱에 陽의 定數이므로 CG기법을 적용할 수 있다. 하지만 새 계수행렬의 스펙트럼 領域이 커져 收斂速度가 썩 빠르지는 못하므로 다음과 같이 후술할 實行列 Q 를 사용하여 수렴속도를 향상시킨 PCG(Preconditional Conjugate Gradient)技法을 사용하였다(Panchang *et al.*, 1991).

$$[A']\{\phi'\} = \{f'\} \quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned} [A'] &= ([Q]^{-1}[A][Q]^{-T}) \\ \{\phi'\} &= [Q]^{-T}\{\phi\} \\ \{f'\} &= [Q]^{-1}\{f\} \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12)에 대해 앞서처럼 Gauss 變換을 적용하면

$$[A^*][A']\{\phi'\} = [A^*]\{f'\} \quad (13)$$

式 (13)에 대해 PCG 技法의 알고리즘은 다음과 같다.

1. 초기치 ϕ_0 를 적절히 선택한다.
2. 전 격자점에서 $R_0 = A^*M^{-1}(f - A\phi_0)$ 와 $P_0 = M^{-1}R_0$ 를 계산한다.

3. i 번째 反復에서

$$\alpha_i = \frac{(R_i, M^{-1}R_i)}{(AP_i, M^{-1}AP_i)}$$

를 계산한다.

4. $\phi_{i+1} = \phi_i + \alpha_i P_i$ 로 새로운 ϕ_{i+1} 을 결정한다.
5. 收斂 與否를 許容誤差 ε 에 대해 검사한다.

$$\frac{\sum |(\nabla^2 \phi + K^2 \phi)|^2}{\sum |\phi|^2} < \varepsilon$$

6. 각 격자에서 $R_{i+1} = R_i - \alpha_i A^*M^{-1}AP_i$ 를 계산한다.
7. i 번째 반복에서

$$\beta_i = \frac{(R_{i+1}, M^{-1}R_{i+1})}{(R_i, M^{-1}R_i)}$$

을 계산한다.

8. $P_{i+1} = M^{-1}r_{i+1} + \beta_i P_i$
9. $i = i+1$ 로 두고 3)과정으로 돌아간다.

여기서

$$M = QQ^T \text{ 혹은 } M^{-1} = Q^{-T}Q^{-1} \quad (14)$$

실행렬 Q 는 Axelsson 등(1984)이 提案한 다음 式을 사용한다.

$$Q = [(2-\omega)\omega]^{-1/2}(D_0 + \omega L_0)D_0^{-1/2} \quad (15)$$

D_0 , L_0 , U_0 는 각각 行列 $[A]$ 에서 $K=0$ 일 때의 對角行列 그리고 아래 위의 삼각행렬이다. ω 는 SOR에서 나타나는 弛緩係數(relaxation parameter)와 같은 것이다.

계산과정에서 특별한 것은 반복되는 $[M^{-1}]$ 와 다른 벡터와 곱인데 그 과정은 다음과 같다. $M^{-1}R$ 을 Y 로 표시하면 식 (14)와 (15)로부터

$$Y = (D_0 + \omega U_0)^{-1} D_0 (2 - \omega) (D_0 + \omega L_0)^{-1} \omega R \quad (16)$$

식 (16)을 다시 쓰면

$$Y' = (D_0 + \omega L_0)^{-1} \omega R \quad (17)$$

$$Y = (D_0 + \omega U_0)^{-1} D_0 (2 - \omega) Y' \quad (18)$$

고로 식 (16)의 계산은 두 段階로 나누어질 수 있다. 식 (17)로부터

$$Y' = D_0^{-1} \omega (R - L_0 Y') \quad (19)$$

즉 (1,1)격자로부터 (M,N)격자까지 다음 式을 사용해 Y' 벡터를 구한다.

$$Y'(i,j) = \left(\frac{-2}{\Delta x^2} + \frac{-2}{\Delta y^2} \right)^{-1} \omega \left[R(i,j) - \left(\frac{Y'(i-1,j)}{\Delta x^2} + \frac{Y'(i,j-1)}{\Delta y^2} \right) \right] \quad (20)$$

式 (18)로부터

$$Y = (2 - \omega) Y' - D_0^{-1} \omega U_0 Y \quad (21)$$

이는 逆順으로 계산해 다음 式으로 Y 벡터를 계산할 수 있다.

$$Y(i,j) = (2 - \omega) Y'(i,j) - \left(\frac{-2}{\Delta x^2} + \frac{-2}{\Delta y^2} \right)^{-1} \omega \left(\frac{Y(i+1,j)}{\Delta x^2} + \frac{Y(i,j+1)}{\Delta y^2} \right) \quad (22)$$

4. 適用 및 檢討

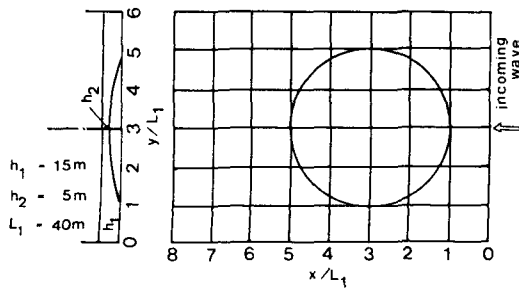


Fig. 2. Spherical shoal.

4.1 球形 海底地形 實驗

Ito와 Tanimoto(1971)는 緩傾斜方程式의 解析을 위해 球形 海底地形(Fig. 2)에 대한 水理實驗을 행하였다. 波長은 40m, $\Delta x = \Delta y = 4m$, $\omega = 1.5$ 로 계산한 결과를 實驗値와 비교한 것이 Fig. 3, 4, 5이다. 豫상되는 物理的 現象이 제대로 잘 나타나고 結果의 精確度 또한 대단히 양호한 것으로 判단된다. 弛緩係數는 이론적인 最適値를 제시하기가 어려워 Panchang 등(1991)이 數值實驗을 통해 제안한 값을 사용하였다. Panchang에 의하면 Kirby와 Dalrymple(1986b)이 사용한 다음의 비선형분산식을 이용하여 結果의 精確도를 높일 수 있다.

$$\sigma^2 = gk [1 + (ka)^2 F_1 \tanh^5 kh] \tanh[kh + (ka) F_2] \quad (23)$$

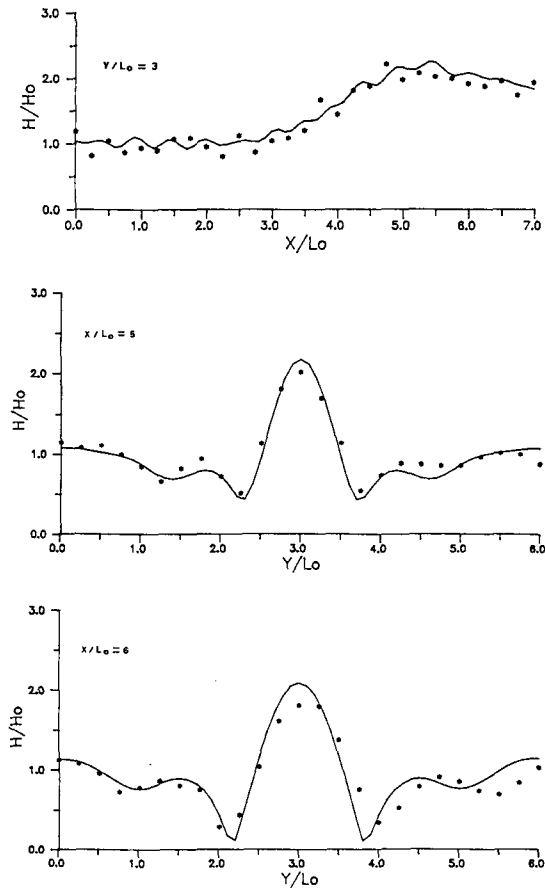


Fig. 3. Wave height comparison using linear dispersion equation. (—; numeric results, **, experimental data)

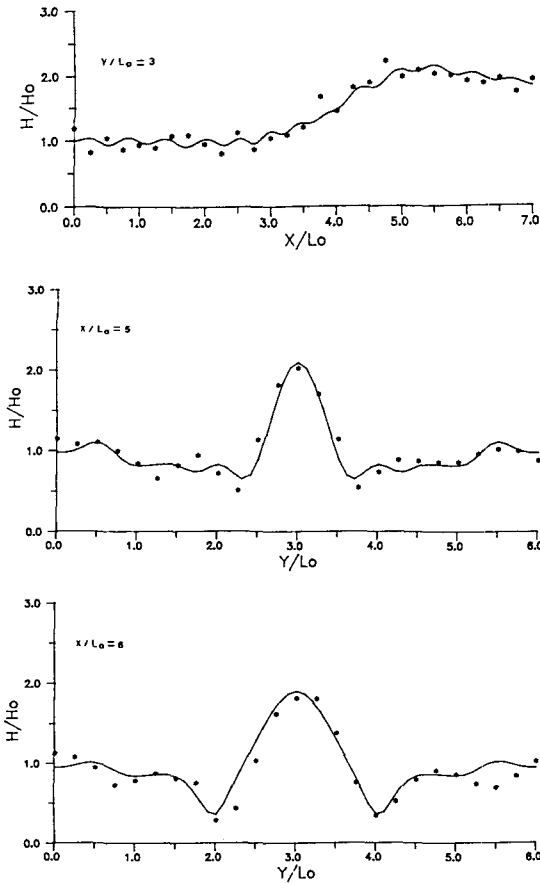


Fig. 4. Wave height comparison using nonlinear dispersion equation.
(—; numeric results, **; experimental data)

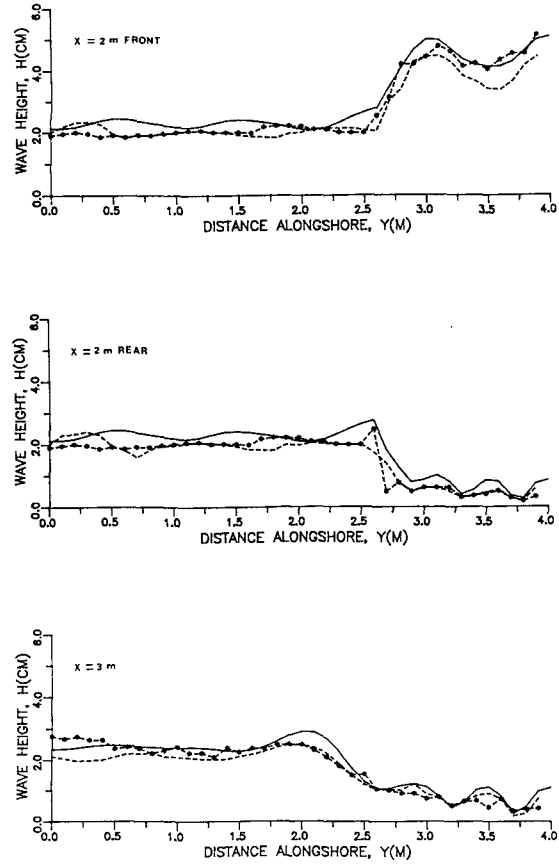


Fig. 6. Alongshore distribution of wave height.
(—; elliptic, --; hyperbolic, -*-; experiment)

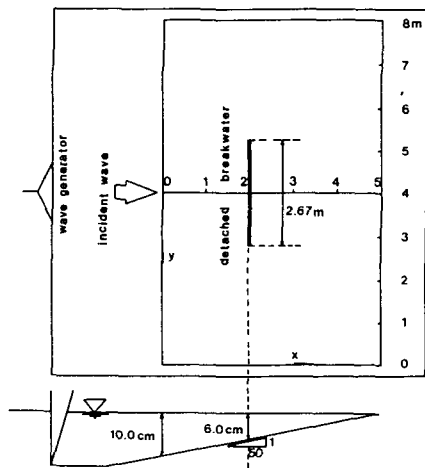


Fig. 5. Experimental setup and coordinates (Watanabe and Maruyama, 1985).

여기서

$$F_1 = \frac{\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh}{8 \sinh^5 kh}$$

$$F_2 = \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^4$$

이다. 식 (23)을 사용할 경우 振幅 a 가 未知數이므로 먼저 식 (2)를 全領域에 걸쳐 선형 분산방정식을 사용하여 계산한 후 계산된 a 값으로부터 k 를 결정하고 새로운 k 값으로 계산을 반복하는 방법이 사용되어야 한다. 계산된 결과는 Fig. 4이다.

선형 분산방정식을 사용한 경우와 비교하여 약간의 평탄화가 생길 뿐 顯著한 정확도의 增加는 볼 수 없었다. 비선형방정식을 사용할 경우 前者에 비해 최소

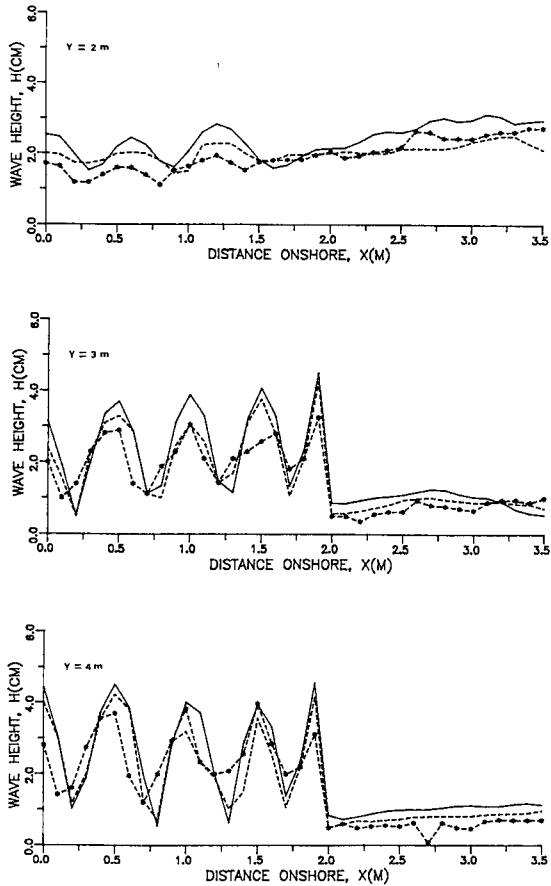


Fig. 7. Cross-shore distributin of wave height.
(—; elliptic, --; hyperbolic, -*-; experiment)

3~4배의 計算時間이 所要됨을 생각하면 線形式을 사용해도 대부분의 工學的 問題의 解決에는 充分하리라 생각된다.

4.2 離岸堤에 대한 實驗

構造物에 의한 反射波가 存在하는 重疊 波浪場을 解析하기 위해 離岸堤가 設置된 平面水槽의 形態는 Fig. 5와 같다. 對岸距離 3m, 수심 6 cm의 위치에 길이 2.67m의 이안제가 海岸線에 平行하게 설치되어 있고 海底傾斜는 1/50이다. 入射波高는 2 cm, 境界條件은 이안제에서 완전반사조건을 適用하고 $\Delta x = \Delta y = 5$ cm를 사용하였다. 계산결과를 Watanabe 등(1984)이 雙曲線方程式을 풀어 계산한 計算值 및 實驗值와 비교해 보았다. 橫斷方向의 계산치를 나타낸 것이 Fig.

6이다. 全般的으로 실험치와 잘 일치하고 특히 離岸堤 前面의 反射波 計算이 매우 良好하다. 실험치와 비교해 雙曲線模型은 약간 작은 값을 그리고 本 橢圓形模型은 약간 큰 값을 보여주고 있다.

縱斷方向의 結果值를 보면(Fig. 7) 이안제 前面의 波高分布는 구조물로 인한 反射效果 때문에 重複波의 波形을 뚜렷이 형성하고 있고 구조물 後面에선 廻折效果가 잘 나타나고 있다. 이안제 전면의 파고분포는 지점별로 제법 큰 差異를 보이고 특히 本 模型의 경우 한결같이 실험치보다 큰 값을 보여주고 있다. 이는 여기서 사용한 境界조건 식 (4)가 反射波를 충분히 透過시키지 못하여 나타난 結果로 생각된다. 이안제의 影響이 없는 곳에서는 ($y=2m$) 淺水效果를 뚜렷이 볼 수 있다.

5. 結 論

球形 海底地形 및 離岸堤를 가진 海域에 대해 反復技法을 사용해 緩傾斜方程式을 解析해 보았다. 反射, 廻折, 屈折 및 淺水を 포함한 豫想되는 파장전과 변형 현상이 잘 再現되었고 實驗值와도 좋은 일치를 보여주었다. 反射波가 존재할 경우 약간 큰 波高分布를 보여주었는데 境界條件이 반사파를 충분히 透過시키지 못하여 생긴 것으로 판단된다. 非線形 分散方程式을 사용해 본 결과 늘어나는 計算時間에 비해서는 結果의 精確도는 약간 향상되었다. 從來 過度한 記憶容量 때문에 廣域에는 緩傾斜方程式을 그대로 適用하기 어려웠던 短點은 本 技法으로써 해결되었다고 判斷된다. 또한 복잡한 지형 및 구조물에 대해서도 별 어려움없이 적용할 수 있고 특히 기능이나 精確도는 본 모형과 비슷하지만 한 파장당 10개 이상의 공간격자를 구성함으로써 인해 과도한 계산시간이 요구되는 쌍곡형 모형에 비해 소요되는 계산시간이 짧은 것도 본 기법의 큰 장점이다. 추후 底面 摩擦, 흐름, 碎波 등도 本 技法의 構造 및 特性을 생각할 때 容易하게 追加될 수 있을 것이다. 아울러 收斂速度를 支配하는 弛緩係數 및 事前 調整行列 [Q]에 대해서도 보다 많은 研究가 필요하다.

謝 辭

이 論文은 1992年度 慶星大學校 校費研究費에 의

하여 연구되었습니다.

参考文献

- Axelsson, O., Brinkemper, S. and Ilin, V.P., 1984. On some versions of incomplete block-matrix factorization iterative methods, *Linear Algebra and its Applications*, **58**, pp. 3-15.
- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction and diffraction, *Proc. 13th Conf. on Coastal Engineering*, pp. 471-490.
- Berkhoff, J.C.W., 1976. Mathematical models for simple harmonic linear water waves: Wave refraction and diffraction, Delft Hydraulics Lab., Publication No. 163.
- Booij, N., 1981. Gravity waves on water with nonuniform depth and current, Rep.81-1, Dep. of Civ. Eng., Delft Univ. of Technol., Delft.
- Booij, N., 1983. A note on the accuracy of the mild slope equation method, *Coastal Engng.*, **9**, pp. 191-203.
- Copeland, G.J.M., 1985a. A numerical model for the propagation of short gravity waves and the resulting circulation around nearshore structures. Ph.D. Thesis, University of Liverpool.
- Copeland, G.J.M., 1985b. A practical alternative to the mild-slope wave equation, *Coastal Engng.*, **9**, pp. 125-149.
- Ebersole, B.A., 1985. Refraction-diffraction model for linear water waves, *J. of Waterways, Port, Coastal and Ocean Engng.*, ASCE, **111**(6), pp. 939-953.
- Ebersole, B.A., Cialone, M.A. and Prater, M.D., 1986. Regional coastal processes numerical modeling system: Report 1, RCWAVE-A linear propagation model for engineering use, Technical Report CERC-86-4.
- Houston, J.R., 1981. Combinational refraction and diffraction of short waves using the finite element method, *Appl. Ocean Res.*, **3**(4), pp. 163-170.
- Ito, Y. and Tanimoto, K., 1971. A method of numerical analysis of wave propagation-application to wave diffraction and refraction, *Proc. 13th ICCE*, ASCE, pp. 503-522.
- Kirby, J.T., 1984. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, *J. Geophys. Res.*, **89**(C1), pp. 745-747.
- Kirby, J.T., 1986. Higher-order approximation in the parabolic equation method for water waves, *J. Geophys. Res.*, **91**(C1), pp. 933-952.
- Kirby, J.T. and Darlymple, R.A., 1986a. Modeling waves in surfzones and around islands, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng.*, **112**(1), pp. 78-93.
- Kirby, J.T. and Darlymple, R.A., 1986b. An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models, *Coastal Engng.*, **9**, pp. 545-561.
- Madsen, P.A. and Larsen, J., 1987. An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation, *Coastal Engng.*, **11**, pp. 329-351.
- Panchang, V.G., Cushman-Roison, B. and Pearce, B.R., 1988. Combined refraction-diffraction of short-waves in large coastal regions, *Coastal Engng.*, **12**, pp. 133-156.
- Panchang, V.G., Pearce, B.R., Wei, G. and Cushman-Roison, B., 1991. Solution of the mild-slope wave problem by iteration, *Applied Ocean Res.*, **13**(4), pp. 187-199.
- Pearce, B.R. and Panchang, V.G., 1985. A method for the investigation of steady state wave spectra in bays, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng.*, **111**(4), pp. 629-644.
- Pos, J.D. and Kilner, F.A., 1987. A breakwater gap wave diffraction: An experimental and numerical study, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng.*, **113**(1), pp. 1-21.
- Radder, A.C., 1979. On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, **95**, pp. 159-176.
- Tsay, T.K. and Liu, P.L.F., 1983. A finite element model for wave refraction and diffraction, *Appl. Ocean Res.*, **5**(1), pp. 30-37.
- Watanabe, A. and Maruyama, K., 1986. Numerical modeling of nearshore wave field under combined refraction, diffraction and breaking, *Coastal Eng. in Japan*, **29**, pp. 19-39.