

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 제 30 卷 第 4 號 1993 年 11 月  
 Transactions of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 30, No.4, November 1993

## 등가선형화방법을 이용한 선체의 불규칙 횡동요 운동의 통계적 해석

김동수\*, 이원경\*\*

### Statistical Analysis of Random Ship Rolling Using Equivalent Linearization Method

by

Dong Soo Kim\* and Won Kyoung Lee\*\*

#### 요 약

불규칙 해상에서의 선체의 횡동요운동을 해석하기 위하여 등가선형화방법을 사용 하였다. 일자유도 선형 횡동요운동 모델에다가 2차의 비선형 감쇠항과 3차 및 5차의 비선형 복원 모멘트를 추가 하였으며 불규칙 기진 모멘트는 가우스 백색잡음으로 가정 하였다. 등가선형화 방법을 사용하여 예측한 응답의 통계적 특성을 Simulation 결과와 비교 하였다.

#### Abstract

In order to analyze the rolling motion of a ship in random beam waves we have used the equivalent linearization method. The quadratic nonlinear damping, the cubic and quintic nonlinear restoring moments were added to a single degree of freedom linear equation of roll motion. The irregular excitation moment was assumed to be the Gaussian white noise. The statistical characteristic of the response by the equivalent linearization method was compared with the simulation result.

#### 1. 서 론

선체운동을 정확하게 예측하는 일은 선박의 안전한 운항을 바라는 인류의 오랫동안의 숙제이므로 많

은 연구가 이루어져 왔으나 이론이 간단하여 일찍 정립된 선형해석은 운동이 작은 경우에만 만족할 만한 정보를 준다는 한계 때문에 비선형 선체 운동 해석이 불가피하게 되었다. Froude 이래 몇몇 연구자들

---

접수일자 : 1993년 5월 6일, 재접수일자 : 1993년 8월 14일

\* 영남대학교 대학원 정밀기계공학과

\*\* 정회원, 영남대학교 기계공학과

[1-3]이 횡동요(roll)와 종동요(pitch)와의 연성운동(coupled motion)을 연구하고 있으나 더 많은 연구자들[4-19]은 횡동요운동이 선체운동을 지배하는 경우를 생각해서 선체의 횡동요운동만을 집중적으로 연구해오고 있다. 그 중에서도 선체 주위의 환경, 즉 해상이 규칙적인 파도를 가졌느냐[4-10, 13] 혹은 불규칙적인 파도를 가졌느냐[11-17, 19]에 따라 확정적(deterministic) 혹은 불확정적(nondeterministic) 해석 방법을 사용하고 있다.

여러 해석방법 중에는 선형계의 해석이 간편하고도 완벽하다는 점에 착안하여 원래의 비선형계와는 어떤 의미로는 등가인 성격을 가지는 선형계로 대체하여 해석하는 방법이 있는데 이 방법을 등가선형화(equivalent linearization) 방법이라고 한다. 이 방법은 확정계나 불확정계에 두루 사용될 수 있지만 특히 불확정계의 해석으로 사용될 때에는 통계적 선형화(statistical linearization) 방법이라고 부르기도 한다. Caughey[20] 이래 많은 연구자들이 이 방법을 연구해오고 있는데 Iwan 과 Yang[21]은 다자유도에 적용하였으며 Atalik과 Utku[22], Spanos[23], Bolotin[24] 등에 의해 더욱 일반화 되었다. 특히 최근에는 원래의 비선형계를 완전해가 주어진, 등가인 비선형계로 대체하는 방법 즉 부분선형화(partial linearization) 방법 혹은 등가비선형화(equivalent nonlinearization) 방법으로 발전되고 있는 중이다 [25-31]. 이와 관련된 국내의 주목할 만한 연구로는 등가비선형화방법을 이용하여 선체의 횡동요운동의 level crossing을 해석한 권순홍 등[19]의 연구가 있다.

본 연구에서는 등가선형화방법을 이용하여 불규칙 해상에서의 선체의 횡동요운동을 해석 하였다. 비선형 횡동요운동 모델로서 2차의 비선형 감쇠(quadratic nonlinear damping)와 3차 및 5차의 비선형 복원 모멘트(cubic and quintic nonlinear restoring moments)를 고려 하였다. 또한 불규칙 기진 모멘트(irregular excitation moment)는 평균(mean)이 0인 가우스 백색잡음(Gaussian white noise)으로 가정 하였다.

2. 운동방정식

다음과 같은 비선형 미분방정식으로 표현된 선체의 횡동요운동을 생각하기로 하자.

$$I\ddot{\phi} + B(\dot{\phi}) + K(\phi) = M(t) \tag{1}$$

여기서,  $\phi$  는 선체의 횡동요각, I는 횡동요 중심을 지나는 길이방향 축에 대한 선체의 질량 관성모멘트,  $B(\dot{\phi})$ 은 감쇠력에 의한 모멘트,  $K(\phi)$ 는 복원모멘트,  $M(t)$ 는 파도에 의한 기진모멘트(excitation moment)를 나타낸다. 식 (1)을 I 로 나누면 다음과 같다.

$$\ddot{\phi} + H(\dot{\phi}) + G(\phi) = F(t) \tag{2}$$

여기서,  $H=B/I$ ,  $G=K/I$ ,  $F=M/I$  이다. 일반적으로  $H(\dot{\phi})$ 와  $G(\phi)$ 는 비선형 함수인데 많은 실험적 연구[16, 17]에 의하면  $H(\dot{\phi})$ 는 진폭이 큰 횡동요 운동에 대해서 다음과 같이 선형항과 2차의 비선형항의 합으로 나타나는 경우도 있다.

$$H(\dot{\phi}) = \beta_1\dot{\phi} + \beta_2\dot{\phi}^2 \tag{3}$$

여기서,  $\beta_1$ 과  $\beta_2$ 는 각각 선형, 2차감쇠계수를 나타낸다. 또한 복원 모멘트  $G(\phi)$ 는 다음과 같이  $\phi$ 의 홀수차 다항식(odd polynomials)의 형태로 쓸 수 있다 [18].

$$G(\phi) = \alpha_1\phi + \alpha_3\phi^3 + \alpha_5\phi^5 + \dots \tag{4}$$

여기서  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_5$ 는 각각 선형, 3차, 5차의 복원 계수(restoring coefficients)를 나타낸다. 복원 모멘트를 5차항까지만 고려하고 식 (3)과 (4)를 식 (2)에 대입하면 다음의 횡동요운동 방정식을 얻게 된다.

$$\ddot{\phi} + \beta_1\dot{\phi} + \beta_2\dot{\phi}^2 + \alpha_1\phi + \alpha_3\phi^3 + \alpha_5\phi^5 = F(t) \tag{5}$$

여기서 기진모멘트  $F(t)$ 는, 평균(mean)이 0인 가우스 정상과정(Gaussian stationary process)이며 파워 스펙트럼 밀도가  $S_F(\omega) = S_0$ 인 백색잡음(white noise)이라고 가정 한다.

3. 등가선형화방법을 이용한 해석

편의를 위하여 식 (5)를 다음과 같이 쓰기로 하자.

$$\ddot{\phi} + g(\dot{\phi}, \phi) = F(t) \tag{6}$$

여기서  $g(\phi, \dot{\phi}) = \beta_1\phi + \beta_2\dot{\phi} + \alpha_1\phi + \alpha_3\phi^3 + \alpha_5\phi^5$  이다. 등가선형화방법의 요체는 식 (6)으로 표현된 계를 이 계와 성격(characteristics)이 어떤 의미에서는 등가인 다음의 선형화계로 대체한다는 데 있다.

$$\ddot{\phi} + \beta_e\dot{\phi} + \omega_e^2\phi = F(t) \quad (7)$$

이제 어떤 방식으로 이 선형화계의 계수  $\beta_e$ 와  $\omega_e^2$ 을 찾는가 하는 문제가 남아 있는데, 통상 오차함수

$$e(\phi, \dot{\phi}) = g(\phi, \dot{\phi}) - \beta_e\dot{\phi} - \omega_e^2\phi \quad (8)$$

의 어떤 기대값, 더 구체적으로 말하자면 제곱의 평균(mean square)  $E[e^2(\phi, \dot{\phi})]$ 을 최소화함으로써 해결한다. 이를 위해서 다음의 두식

$$\frac{\partial E[e^2]}{\partial \beta_e} = 0, \quad \frac{\partial E[e^2]}{\partial \omega_e^2} = 0 \quad (9)$$

을 만족하도록  $\beta_e$ 와  $\omega_e^2$ 을 취하면 다음과 같다.

$$\beta_e = \frac{E[\dot{\phi}^2]E[\dot{\phi}g(\phi, \dot{\phi})] - E[\phi\dot{\phi}]E[\dot{\phi}g(\phi, \dot{\phi})]}{E[\dot{\phi}^2]E[\dot{\phi}^2] - (E[\phi\dot{\phi}])^2} \quad (10)$$

$$\omega_e^2 = \frac{E[\dot{\phi}^2]E[\phi g(\phi, \dot{\phi})] - E[\phi\dot{\phi}]E[\phi g(\phi, \dot{\phi})]}{E[\dot{\phi}^2]E[\dot{\phi}^2] - (E[\phi\dot{\phi}])^2} \quad (11)$$

우선  $F(t)$ 가 평균이 0인 가우스과정이므로 선형화계 (7)의 응답 역시 평균이 0인 가우스 과정이다. 따라서 응답의 자기상관함수(autocorrelation function)  $R(\tau) = E[\phi(t)\phi(t+\tau)]$ 에 대한 다음 식이 성립 한다.

$$\frac{d}{d\tau}R(\tau)|_{\tau=0} = E[\dot{\phi}\dot{\phi}] = 0 \quad (12)$$

따라서 식 (10)과 (11)은 다음과 같이 단순화 된다.

$$\beta_e = \frac{E[\dot{\phi}g(\phi, \dot{\phi})]}{E[\dot{\phi}^2]} \quad (13)$$

$$\omega_e^2 = \frac{E[\phi g(\phi, \dot{\phi})]}{E[\dot{\phi}^2]} \quad (14)$$

또한 가우스 분포인 응답에 대한  $\phi$ 와  $\dot{\phi}$  사이의 결

합 확률밀도함수(joint probability density function)가 다음과 같이 주어진다.

$$p(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2\pi\sigma_\phi\sigma_{\dot{\phi}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi^2}{\sigma_\phi^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{\sigma_{\dot{\phi}}^2}\right)\right] \quad (15)$$

여기서,  $\sigma_\phi$ 와  $\sigma_{\dot{\phi}}$ 는  $\phi$ 와  $\dot{\phi}$ 의 표준편차(standard deviations)로서 스펙트럼 밀도함수  $S_\phi(\omega)$ 와  $S_{\dot{\phi}}(\omega)$ 를 사용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_\phi^2 = E[\phi^2] = R_\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\phi(\omega) d\omega \quad (16a)$$

$$\sigma_{\dot{\phi}}^2 = E[\dot{\phi}^2] = R_{\dot{\phi}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{\phi}}(\omega) d\omega \quad (16b)$$

한편 선형화계 (7)의 복소수 진동수응답(complex frequency response)은 다음과 같으며

$$H(\omega) = \frac{1}{(\omega_e^2 - \omega^2) + i\beta_e\omega} \quad (17)$$

기진모멘트  $F(t)$ 를 백색잡음으로 가정하였으므로  $F(t)$ 의 스펙트럼 밀도함수

$$S_F(\omega) = S_0(\text{상수}) \quad (18)$$

로 주어진다. 따라서 응답  $\phi$ 와  $\dot{\phi}$ 의 스펙트럼 밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$S_\phi(\omega) = |H(\omega)|^2 S_F(\omega) = \frac{S_0}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + (\beta_e\omega)^2} \quad (19a)$$

$$S_{\dot{\phi}}(\omega) = \omega^2 S_\phi(\omega) = \frac{\omega^2 S_0}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + (\beta_e\omega)^2} \quad (19b)$$

결국 식(19)를 식(16)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\sigma_\phi^2 = \frac{\pi S_0}{\beta_e \beta_e^2}, \quad \sigma_{\dot{\phi}}^2 = \frac{\pi S_0}{\beta_e} \quad (20a, b)$$

이제  $g(\phi, \dot{\phi})$ 을 식(13)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\beta_e = \frac{\beta_1 E[\dot{\phi}^2] + \beta_2 E[\dot{\phi}^2 |\dot{\phi}|] + \alpha_1 E[\phi \dot{\phi}] + \alpha_3 E[\phi^3 \dot{\phi}] + \alpha_5 E[\phi^5 \dot{\phi}]}{E[\phi^2]} = \beta_1 + \beta_2 \frac{E[\dot{\phi}^2 |\dot{\phi}|]}{E[\dot{\phi}^2]} \quad (21)$$

여기서,

$$E[\dot{\phi}^2 |\dot{\phi}|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}^2 |\dot{\phi}| \exp[-\frac{\dot{\phi}^2}{2\sigma_\phi^2}] d\dot{\phi} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sigma_\phi^3 \quad (22)$$

식 (20b)와 (22)를 식 (21)에 대입하면 다음의 대수 방정식으로 부터 계수  $\beta_e$ 를 구할 수 있다.

$$X^3 - \beta_1 X - 1.59577 \beta_2 \sqrt{\pi S_0} = 0 \quad (23)$$

여기서  $X = \sqrt{\beta_e}$ 이다.

마찬가지로  $g(\phi, \dot{\phi})$ 을 식 (14)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\omega_e^2 = \frac{\beta_1 E[\phi \dot{\phi}] + \beta_2 E[\phi \dot{\phi} |\dot{\phi}|] + \alpha_1 E[\phi^2] + \alpha_3 E[\phi^4] + \alpha_5 E[\phi^6]}{E[\phi^2]} \quad (24)$$

여기서,

$$E[\phi \dot{\phi}] = E[\phi \dot{\phi} |\dot{\phi}|] = 0, E[\phi^4] = 3\sigma_\phi^4, E[\phi^6] = 15\sigma_\phi^6 \quad (25a \sim c)$$

와 식 (20a)를 식 (24)에 대입하면 다음의 대수방정 식으로 부터 계수  $\omega_e^2$ 을 구할 수 있다.

$$Y^3 - \alpha_1 Y^2 - \frac{3\alpha_3 \pi S_0}{\beta_e} Y - \frac{15\alpha_5 \pi^2 S_0^2}{\beta_e^2} = 0 \quad (26)$$

여기서  $Y = \omega_e^2$ 이다.

이렇게 구한  $\beta_e$ 와  $\omega_e^2$ 을 사용하여 통계적 특성이 알려진 선형계 (7)을 해석하면 된다.

#### 4. 수치계산의 결과 및 검토

본 연구에서는 식 (5)의 계수  $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ 를 위하여 소형 화물선 'Lucie Schulte' [4]의 경우만을 고려 하였다. 화물을 실은 경우(full load)와 실지 않은 경우(ballast)에 대하여 이 계수들의 값이 Table 1에 나타나 있다.

Table 1. Main parameters of the motor ship 'Lucie Schulte'

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\alpha_1$	$\alpha_3$	$\alpha_5$
full load	0.0246	0.0225	0.2555	-0.7265	2.2969
ballast	0.0623	0.0367	0.5137	1.0881	-3.1496

Fig. 1은 두 경우에 대한 위치에너지를 그린 것인데 ballast인 경우에는 평형점  $\phi = 0$ 가 full load의 경우와는 달리 대국적으로 안정한 평형점이 아니라 국소적으로 안정한 평형점이므로  $|\phi|$ 가 약 0.8보다 커지게 되면 선체가 전복할 수 있음을 보여 주고 있다.

등가선형화방법에 의한 해석결과의 타당성을 조사하기 위하여 Monte Carlo simulation을 하였는데 이 simulation에서 사용된 기진모멘트  $F(t)$ 는 이상적인 백색잡음(ideal white noise)이 아니라 그 파워 스펙트럼 밀도(one-sided power spectral density)가 진동수 0에서 1 Hz 까지 일정한 값  $W_0 = 4\pi S_0$ 을 가지는 한정대역 백색잡음(band limited white noise)을 고려 하였다. Fig. 2는  $W_0 = 0.005$ 인 경우에 기진모멘트

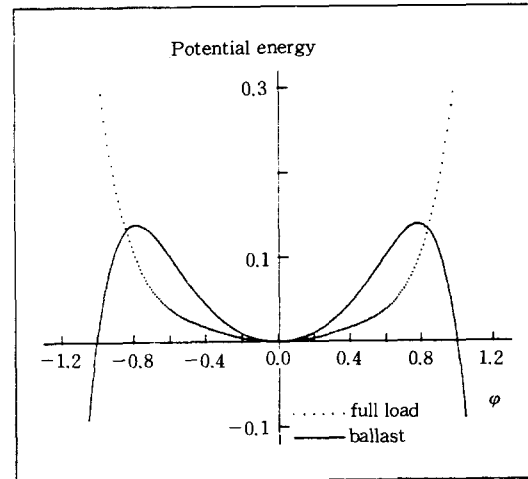


Fig.1 Potential energies for full load and ballast conditions

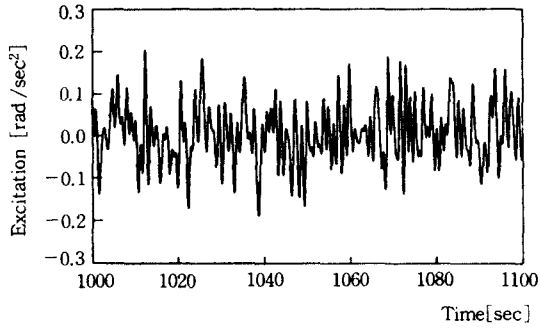


Fig.2 Typical time history of the excitation

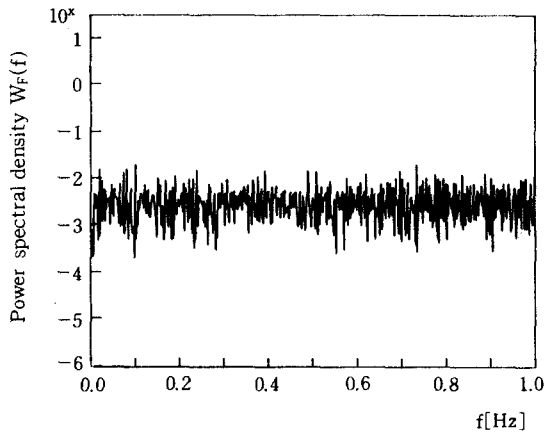


Fig.3 Power spectral density of the excitation

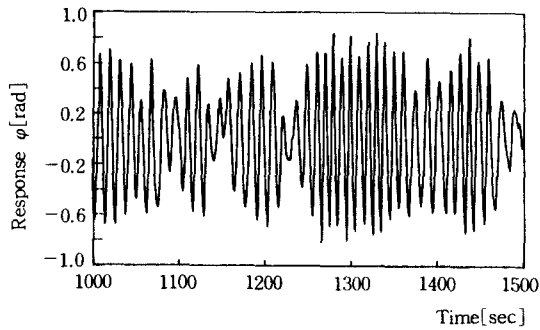


Fig.4 Typical Time history of the response

$F(t)$ 의 전형적인 예를 보여 주고 있으며 Fig. 3은 이  $F(t)$ 의 파워 스펙트럼 밀도를 구한 것인데 0에서 1 Hz까지의 진동수에 대하여 파워 스펙트럼 밀도가 균일하게 분포하고 있음을 보여 주고 있다. Fig. 4는

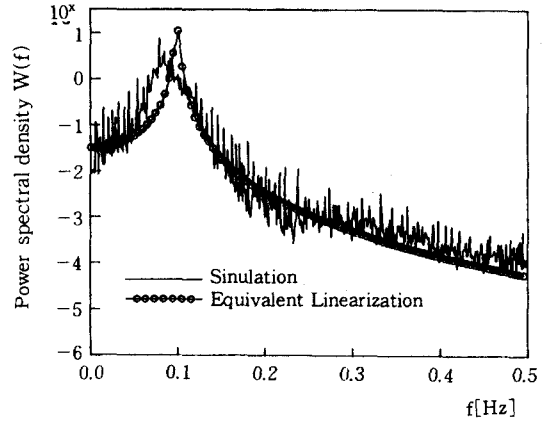


Fig.5 Power spectral density of the response

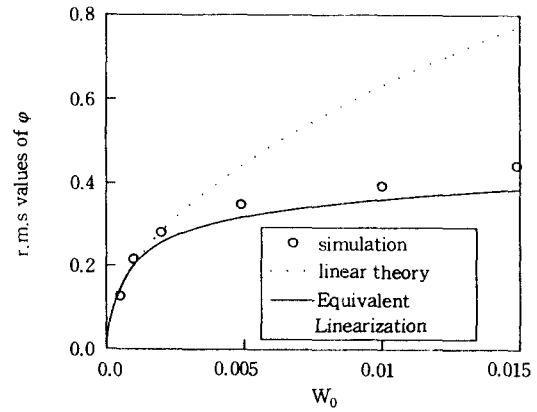


Fig.6 Root mean square values of the response versus spectral density of the excitation for full load condition

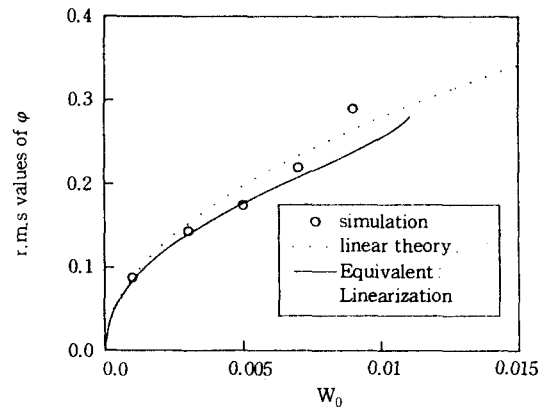


Fig.7 Root mean square values of the response versus spectral density of the excitation for ballast condition

이 기진모멘트에 의한 응답  $\phi$  의 전형적인 예를 보여 주고 있으며 Fig. 5는 이 응답의 파워 스펙트럼 밀도를 구한 것인데 스펙트럼 밀도의 최고치가 발생하는 진동수값(0.1 Hz 근방)을 살펴보면 등가선형화 결과가 simulation 결과보다 약간 크다는 것을 제외하면 두 결과는 잘 일치하고 있음을 보여 주고 있다. Fig. 6은 화물을 실은 경우에 기진모멘트의 스펙트럼 밀도  $W_0$ 에 대한 응답의 평균제곱근(r.m.s 값)을 나타내며 화물을 실지 않은 경우에 해당하는 결과는 Fig. 7에 나타나 있다. 이 두 그림에 의하면 등가선형화방법에 의한 결과가 simulation 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 점선으로 표시된 선형해석 결과는 포물선으로 나타나는데 이것은 응답의 평균제곱값(mean square value)이  $W_0$ 에 비례함을 의미 한다. 화물을 실지 않은 경우에는  $W_0$ 가 0.012보다 크면 응답이 무한히 커지게 되어 simulation이나 등가선형화방법으로 응답의 통계적 특성을 구할 수가 없는데 이것은 앞에서 언급한 바와 마찬가지로 ballast인 경우에는 평형점  $\phi = 0$ 가 국소적으로 안정하다는 데 연유하는 것이다.

## 5. 결 론

불규칙 해상에서의 선체의 비선형 횡동요운동을 조사하기 위하여 불규칙 기진모멘트를 가우스 백색 잡음으로 가정하고 등가선형화방법을 이용하여 해석한 결과 응답의 통계적 특성(제곱 평균값) 뿐만 아니라 응답이 유한한 영역을 예측하는 데도 이 방법이 사용될 수 있음을 확인 하였다.

## 후 기

이 연구는 1993년도 영남대학교 교비연구비의 지원에 의한 것임.

## 참 고 문 헌

- [1] Nayfeh, A. H., Mook, D. T., and Marshall, L. R., "Nonlinear Coupling of Pitch and Roll Modes in Ship Motions", *Journal of Hydronautics*, Vol. 7, No. 4, pp. 145-152, 1973.
- [2] Mook, D. T., Marshall, L. R., and Nayfeh, A. H., "Subharmonic and Superharmonic Resonances in the Pitch and Roll Modes of Ship Motions", *Journal of Hydronautics*, Vol. 8, No. 1, pp. 32-38, 1974.
- [3] Lee, W. K., "Domains of Attraction of System of Nonlinearly Coupled Ship Motions by Simple Cell Mapping", *ASME Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 114, No. 1, pp. 22-27, 1992.
- [4] Cardo, A., Ceschia, M., Francescutto, A., and Nabergoj, R., "Effects of the Angle-Dependent Damping on the Rolling Motion of Ships in Regular Beam Seas", *International Shipbuilding Progress*, Vol. 27, pp. 135-138, 1980.
- [5] Cardo, A., Francescutto, A., and Nabergoj, R., "Ultraharmonics and Subharmonics in the Rolling Motion of a Ship : Steady-State Solution", *International Shipbuilding Progress*, Vol. 28, pp. 234-251, 1981.
- [6] Feat, G., and Jones, D., "Parametric Excitation and the Stability of a Ship Subjected to a Steady Heeling Moment", *International Shipbuilding Progress*, Vol. 28, pp. 263-267, 1981.
- [7] Bass, D. W., "On the Response of Biased Ships in Large Amplitude Waves", *International Shipbuilding Progress*, Vol. 30, pp. 2-9, 1983.
- [8] Cardo, A., Francescutto, A., and Nabergoj, R., "Nonlinear Rolling Response in a Regular Sea", *International Shipbuilding Progress*, Vol. 31, pp. 204-208, 1984.
- [9] Nayfeh, A. H., and Khdeir, A. A., "Nonlinear Rolling of Ships in Regular Beam Seas", *International Shipbuilding Progress*, Vol. 33, pp. 40-49, 1986.
- [10] Nayfeh, A. H., "On the Undesirable Roll Characteristics of Ships in the Regular Seas", *Journal of Ship Research*, Vol. 32, No. 2, pp. 92-100, 1988.
- [11] Haddara, M. R., "On Nonlinear Rolling of Ships in Random Seas", *International Shipbuilding Progress*, Vol. 20, pp. 230-240, 1973.
- [12] Muhuri, P. K., "A Study of the Stability of the Rolling Motion of a Ship in an Ir-

- regular Seaway”, *International Shipbuilding Progress*.
- [13] Wright, J. H. G., and Marshfield, W. B., “Ship Roll Response and Capsizing Behaviour in Beam Seas”, *Transaction, Royal Institute of Naval Architects*, Vol. 122, pp. 129-148, 1979.
- [14] Roberts, J. B., “Comparison Between Simulation Results and Theoretical Predictions for a Ship Rolling in Random Beam Waves”, *International Shipbuilding Progress*, Vol. 31, pp. 168-180, 1984.
- [15] Roberts, J. B., Dunne, J. F., and Debonos, A., “Estimation of Ship Roll Parameters in Random Waves”, *Proceedings of the 10th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 2, pp. 97-106, 1991.
- [16] Roberts, J. B., “Estimation of Non-linear Ship Roll Damping from Free-Decay Data”, *Journal of Ship Research*, Vol. 29, pp. 127-138, 1985.
- [17] Kountzeris, A., Roberts, J. B., and Gawthrop, P. J., “Estimation of Ship Roll Parameters from Motion in Irregular Seas”, *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects*, Vol. 132, pp. 253-266, 1991.
- [18] Dalzell, J. F., “A Note on the Form of Ship Roll Damping”, *Journal of Ship Research*, Vol. 22, pp. 178-185, 1978.
- [19] 권순홍, 정정환, 김대웅, “등가비선형화법에 의한 선박 횡요의 확률론적 예측”, *대한조선학회 논문집*, 제29권, 제2호, pp. 60-65, 1992.
- [20] Caughey, T. K., “Equivalent Linearization Techniques”, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 35, pp. 1706-1711, 1963.
- [21] Iwan, W. D., and Yang, I. M., “Application of Statistical Linearization Techniques to Nonlinear Multi-degree-of-Freedom Systems”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 545-550, 1972.
- [22] Atalik, T. S. and Utku, S., “Stochastic Linearization of Multi-Degree-of-Freedom Nonlinear Systems”, *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 4, pp. 411-420, 1976.
- [23] Spanos, P. D., “Stochastic Linearization in Structural Dynamics”, *Applied Mechanics Review*, Vol. 34, No. 1, pp. 1-8, 1981.
- [24] Bolotin, V. V., *Random Vibration of Elastic Systems*, Martinus Nijhoff Publishers, Hague, 1984.
- [25] Lutes, L. D., “Approximate Technique for Treating Random Vibration of Hysteretic Systems”, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 48, pp. 299-306, 1970.
- [26] Caughey, T. K., “On the Response of Nonlinear Oscillators to Stochastic Excitations”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 1, pp. 2-10, 1986.
- [27] Lin, Y. K., and Cai, G. Q., “Equivalent Stochastic Systems”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 918-922, 1988.
- [28] Lin, Y. K., and Cai, G. Q., “A New Approximate Solution Technique for Randomly Excited Non-Linear Oscillators”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 23, No. 5/6, pp. 409-420, 1988.
- [29] Socha, L., and Soong, T. T., “Linearization in Analysis of Nonlinear Stochastic Systems”, *Applied Mechanics Review*, Vol. 44, No. 10, pp. 399-422, 1991.
- [30] Cai, G. Q., Lin, Y. K., and Elishakoff, I., “A New Approximate Technique for Randomly Excited Nonlinear Oscillators, Part II”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 27, No. 6, pp. 969-979, 1992.
- [31] Elishakoff, I. and Cai, G. Q., “Approximate Solution for Nonlinear Random Vibration Problems by Partial Stochastic Linearization”, *Nonlinear Vibrations* edited by Ibrahim, R. A. et al. *ASME*, 1992.