
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 30 卷 第 1 號 1993 年 2 月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 30, No.1, February 1993

소성 대변형 및 이방성 손상의 유한요소해석

노인식*, 임상전**

Finite Element Analysis for Plastic Large Deformation and Anisotropic Damage

by

I.S.Nho* and S.J.Yim**

요 약

대변형, 대회전, 대변형도 문제를 고려한 탄소성-손상 유한요소 정식화 과정을 연구함으로써 구조물의 모든 비선형거동 및 손상을 합리적으로 예측할 수 있는 수치모형을 개발하였다. 재료의 소성 변형과정에서 발생하는 손상을 합리적으로 고려하기 위하여 연속체 손상역학의 접근방법을 이용하여 구성방정식을 정식화하였으며 Updated Lagrangian 정식화방법, 호장중분법 등의 비선형 강성방정식 해법을 적용하여 2차원 평면문제를 대상으로 하는 탄소성-손상 유한요소해석 프로그램을 구성하였다. 여러가지 예제 계산을 통하여 이 수치모형의 적용성 및 타당성을 검토한 결과 대변형 문제, 손상을 포함하는 재료 비선형문제 공히 합리적인 해석결과를 제시하고 있음을 확인할 수 있었다.

Abstract

An improved analysis model for material nonlinearity induced by elasto-plastic deformation and damage including large strain response was proposed. The elasto-plastic-damage constitutive model based on the continuum damage mechanics approach was adopted to overcome limitations of the conventional plastic theory, which can manage the anisotropic tensorial damages evolved during time-independent plastic deformation process of materials. Updated

발 표: 1992년도 대한조선학회 선박구조연구회 연구발표회 ('92. 9. 26)

접수일자: 1992년 10월 13일, 재접수일자: 1992년 12월 11일

* 정회원, 해사기술연구소

** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

大韓造船學會論文集 第30卷 1號 1993年 2月

Lagrangian finite element formulation for elasto-plastic damage coupling problem including large deformation, large rotation and large strain problems was completed to develop a numerical model which can predict all kinds of structural nonlinearities and damage rationally. Finally, a finite element analysis code for the 2-dimensional plane problem was developed and the applicability and validity of the numerical model was investigated through some numerical examples. Calculations showed reasonable results in both geometrical nonlinear problem due to large deformation and material nonlinearity including the damage effect.

1. 서 론

합리적인 구조설계를 위해서는 정밀구조해석을 통한 구조물의 내하능력 및 거동에 대한 정확한 평가가 우선되어야 한다. 탄성영역 내의 선형해석만으로 충분한 경우도 많지만 극한환경 하에서 거동하는 고부가가치 구조물 일수록 각종 비선형성을 고려한 정밀한 구조안전성평가가 요구된다.

일반적으로 구조물의 비선형 거동은 재료 자체의 특성에서 기인하는 재료 비선형문제와 대변형에 수반되어 나타나는 기하학적 비선형문제로 구분할 수 있다. 기하학적 비선형성은 변형의 비선형 기하학(kinematics)을 수학적으로 처리하는 연속체역학 분야의 연구가 집중적으로 이루어진 바 있어 다소 복잡한 측면은 있으나 이론적 체계가 거의 완성단계에 이른 것으로 보여진다. 반면, 재료 비선형문제는 분자결합, 결정구조 등 미세조직 레벨의 현상을 몇개의 재료상수로써 거시적인 거동으로 표현하는 구성방정식의 개발 문제로 귀착된다. 현재까지 개발되어 사용되고 있는 구성방정식 모형들의 공통적인 문제점으로 지적될 수 있는 것은 하중을 받고있는 재료 내부에서 손상을 입지 않은 부분과 이미 손상이 발생된 부분을 구분하여 처리할 수 없을 뿐 아니라 손상의 정도를 표현하기는 더욱 불가능하다는 점이다. 최근에는 Truesdell의 구성방정식의 열역학적 정식화 과정[1,2]에 1958년 Kachanov[3]에 의해 제안된 연속체손상역학(CDM, continuum damage mechanics)을 접목함으로써 손상을 변형도와 마찬가지로 재료거동의 이력을 나타내는 고유의 상태변수로 처리할 수 있는 구성방정식의 개발에 관한 연구가 시도되고 있다[4~9]. 손상역학에서는 일정부위에 분포된 미소결합들의 평균적인 밀도를 손상이라는 내부변수로 간주함으로써 재료의 비선형 거동을 거시적인 관점에서 합리적으로 표현할 수 있다. 임 등[8]은 연속체손상역학의 구성방정식의 열역학적 정식화 과정에 따라 연성재료의 소성 및 손상 연성

거동에 대한 유동법칙(plastic damage flow rule)을 유도함으로써 시간독립적인 소성변형시의 재료비선형 문제에 대한 좀더 개선된 처리 수단을 제시하고 있다.

본 연구에서는 연속체 역학에서의 탄소성 변형에 관한 비선형 기하학을 기본으로 하여 대변형, 대회전, 대변형도에 의한 기하학적 비선형 문제를 다루었으며 탄소성 손상 유한요소 정식화과정에 이 소성 손상 유동법칙을 적용함으로써 구조물의 모든 비선형 거동 및 손상을 합리적으로 예측할 수 있는 수치모형을 개발하였다. 또한, 여러가지 예제계산을 통하여 이 수치모형의 적용성 및 타당성을 검토하였다.

2. 탄소성 손상 구성방정식

2.1 손상변수 및 유효응력

Kachanov[3]는 크리프 현상하에서 금속의 손상이 미소공동 발생에 기인하는 것으로 간주하고 이 공동에 의한 단면적의 감소비율을 손상변수 Ψ 로 정의하여 실제 재료에 작용하는 유효응력(effective stress) σ^* 을 Fig.2.1과 같이 표현하였다. 일차원적인 응력상태만을 대상으로 하였기 때문에 Ψ 는 손상의 방향성을 고려하지 못하는 스칼라 량으로 표시된다. 그러나 일반적으로 재료의 손상은 어떤 방향성을 가진 미소

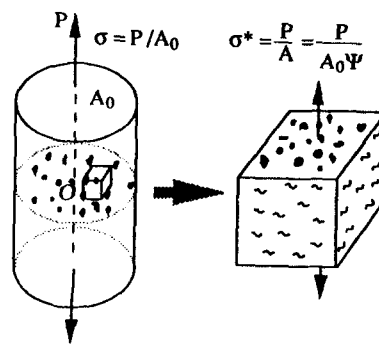


Fig.2.1 Damage model of Kachanov[3]

균열 형태로 나타나는 경우가 많으므로 결국 손상을 모든 방향으로 투영면적이 같은 공동으로 간주하는 등방성 손상이론으로는 이러한 손상에 기인하는 이방성 문제를 다루기 어렵다. Vakulenko and Kachanov^[4]는 텐서손상(tensor damage)개념을 최초로 도입하였고 Murakami and Ohno^[5] 등은 Vakulenko 형 손상텐서에서 변위점프벡터의 방향이 균열의 수직방향 벡터와 일치하는 것으로 간주하여 좀더 간편한 모델을 제시하는 한편, 이 손상 텐서의 고유치가 고유 벡터방향의 면적감소율을 뜻한다는 사실을 물리적 모델로써 설명하였다. 이들에 따르면 이방성 손상텐서 Ω 는 다음식과 같이 일반화하여 표현할 수 있다.

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i (v_i \otimes v_i). \quad (2.1)$$

이때 v_i 는 손상의 주축방향 여현벡터, ω_i 는 v_i 방향의 유효면적 감소율을 뜻한다. 유효응력 σ^* 는 응력 σ 로부터 다음과 같이 변환된다.

$$\sigma^* = \sigma \cdot \phi, \quad \phi = (I - \Omega)^{-1}. \quad (2.2)$$

그러나 (2.2)식에서 응력 σ^* 는 대칭텐서가 아니기 때문에 이후의 수식처리에 상당한 문제점들이 발생된다. 따라서, 임 등[8]은 σ^* 의 대칭성분 만으로 유효 응력텐서 $\bar{\sigma}$ 를 다시 정의하고 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma^*_{sym} = \frac{1}{2} (\sigma^* + \sigma^{*T}) \\ &= \frac{1}{2} (\phi \cdot \sigma + \sigma \cdot \phi) = \Phi : \sigma. \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서, Φ 는 유효응력 $\bar{\sigma}$ 와 결보기 응력 σ 의 관계를 나타내는 대칭 4차 손상텐서이다.

2.2 탄소성 손상 구성방정식

재료내부의 미시적인 조직변화 및 에너지 소산 현상을 표현하는 내부변수로서 경화 계수, 손상변수 등을 선택하여 Fig.2.2와 같은 열역학적 구성방정식의 정식화과정에 적용하면, 재료의 탄소성 손상문제에 대한 내부변수들의 발전식이 유도된다. 먼저, Sidoroff [10]가 제안한 에너지등가법칙(Energetic identification)의 가정을 적용하면 탄성변형도-응력 관계식이 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma = \tilde{C}_e : \epsilon_e. \quad (2.4)$$

유효탄성강성텐서 \tilde{C}_e 는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{C}_e = \Phi^{-1} : C_e : \Phi^{-T} \quad (2.5)$$

이때, C_e 는 $\sigma = C_e : \epsilon_e$ 의 관계를 만족하는 통상의 탄성강성텐서이다.

손상된 재료의 항복함수는 손상을 고려하지 않을 때와 동일한 형태를 유지하며 응력 σ 대신 유효응력 $\bar{\sigma}$ 의 함수로 표현될 수 있다고 가정한다면 항복함수는 다음과 같이 쓸 수 있다[9].

$$f(\bar{\sigma}, \bar{\alpha}, R) = \bar{\sigma}_{eq} - R(p). \quad (2.6)$$

여기서, $\bar{\sigma}_{eq}$ 는 유효응력의 함수로 표현된 등가응력이며, 등방경화계수 R 은 수정 Ramberg-Osgood 식 (Swift 식)에 의해 다음과 같이 주어진다[11].

$$R(p) = \sigma_y (1 + c \cdot p)^n \quad (2.7)$$

여기서, p 는 등가소성변형도, σ_y 는 초기 항복응력이며, c, n 은 재료상수이다. 항복조건식과 일관조건 (consistency condition)에 (2.4)-(2.7)식과 유효응력 및 손상텐서의 변화율 관계식 등을 대입하여 통상의 소성유동법칙 유도과정에 따라 정리하면 결국, 시간 독립적인 소성변형 문제에서의 소성 손상 구성방정식은 다음과 같이 정리될 수 있다[8].

$$\dot{\sigma} = \tilde{C}_{ep} : \dot{\epsilon} - C_d : \dot{\Omega} \quad (2.8)$$

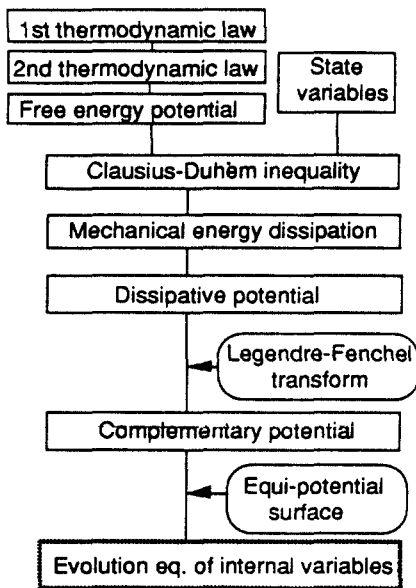


Fig.2.2 Flow of thermodynamic approach for constitutive equation

이때, \tilde{C}_{ep} 및 C_d 는 다음식으로 주어지며,

$$\tilde{C}_{ep} = \Phi^{-1} : C_{ep} : \Phi^{-T} \tag{2.9.a}$$

$$C_{ep} = \left[C_e - \frac{(C_e : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}) \otimes (\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : C_e)}{H'_I + H'_K + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : C_e : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}} \right] \tag{2.9.b}$$

$$C_d = \left[\tilde{C}_{ep} : \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega} : C_e^{-1} - \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial \Omega} \right] : \bar{\sigma}, \tag{2.10}$$

H'_I, H'_K 는 각각 등방경화 및 이동경화 계수를 의미한다. 또한, 등방성손상의 발전은 수직방향 손상의 평균치 Ω_m 에 비례하며 이방성손상의 발전은 손상의 $\nu^{(i)}$ 방향 성분 $\Omega_{\nu^{(i)}}$ 에 비례하는 것으로 간주하면 손상발전식이 다음과 같이 유도된다⁸⁾.

$$\dot{\Omega} = V_{\Omega} \dot{p}. \tag{2.11}$$

여기서,

$$V_{\Omega} = C_1 (1 - \beta_1 \Omega_m) \langle \bar{\sigma}_m \rangle I + C_2 \sum_{i=1}^3 (1 - \beta_2 \Omega_{\nu^{(i)}}) \langle \bar{\sigma}_i^d \rangle (\nu^{(i)} \otimes \nu^{(i)}). \tag{2.12}$$

$C_1, C_2, \beta_1, \beta_2$: 재료상수

$$\langle a \rangle = 1, a > 0 \text{ 일 때} \\ = 0, a \leq 0 \text{ 일 때} \tag{2.13}$$

$$\Omega_m = (\Omega_{11} + \Omega_{22} + \Omega_{33})/3 \tag{2.14}$$

$$\bar{\sigma}_m = (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33})/3 \tag{2.15}$$

$\bar{\sigma}_i$: 주축방향의 유효응력

$$\bar{\sigma}_i^d = \bar{\sigma}_i - \bar{\sigma}_m : \text{편차유효응력} \tag{2.16}$$

$\nu^{(i)}$: 주축방향의 방향여현 벡터

$$\Omega_{\nu^{(i)}} = \nu^{(i)} \cdot \Omega \cdot \nu^{(i)}. \tag{2.17}$$

순수한 재료의 변형만을 고려하기 위해서는 구성방정식이 반드시 강제회전 운동에 독립적인 형태로 표현되어야 하므로 $\dot{\sigma}, \dot{\Omega}$ 를 객관성 조건(objectivity condition)을 만족하는 Jaumann율을 도입하여 대체하는 한편, McMeeking and Rice[13]의 견해에 따라

Cauchy 응력 대신 제2차 Piola-Kirchhoff 응력의 Jaumann율로 표현함으로써 (2.8) (2.11)식을 다음과과 같은 형태로 변환하였다.

$$\dot{\tilde{t}} = \tilde{C}_{ep} : \mathbf{D} - C_d : \dot{\Omega} \tag{2.18}$$

$$\dot{\Omega} = V_{\Omega} \dot{p}. \tag{2.19}$$

3. 유한요소법의 정식화

소성-손상문제를 유한요소법으로 정식화하여 2차원 평면문제에 적용하였다. 일반적으로 소성변형의 경우 상당한 크기의 변형이 동반되므로 이에 따른 기하학적 비선형성을 고려하기 위하여 변형의 비선형기하학[14-17]을 바탕으로한 대변형 문제로 정식화하였으며 탄소성 손상 구성방정식을 이용하여 대변형도시의 재료비선형 문제를 처리하였다.

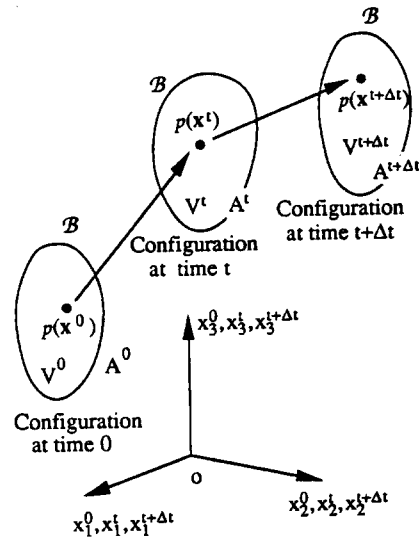


Fig.3.1 Motion of body in stationary cartesian coordinate system

3.1 기하학적 비선형문제의 정식화

대변형, 대회전 등에 기인하는 비선형문제를 해석하기 위한 정식화 방법에는 주로 total Lagrange 류(T.L.)와 updated Lagrange 류(U.L.)가 사용되고 있다.(이하 T.L. U.L.로 약칭한다.) U.L. 역시 Lagrange 류의 특수한 경우에 해당되는 것으로 볼 수 있기 때문에 기준형상이 계속적으로 변경된다는 점만 제외한다면 서로 유사한 특성들을 지니고 있

다. 수치해석기법을 적용하기 위해서는 양측 공히 전체 변형이력과정을 유한개의 시간단계(time step)로 분할하여 구간별로 변형의 비선형 기하학을 선형화하는 정식화과정이 이용된다.

일반적인 기하학적 비선형문제의 유한요소해석에 있어서는 T.L.의 정식화가 가장 보편적으로 사용되고 있다. T.L.의 정식화에서는 기준형상이 초기형상으로 고정되어 있기 때문에 응력 및 변형도 측정단위도 초기형상을 기준으로하는 제1차 혹은 제2차 Piola-Kirchhoff 응력과 이들에 에너지 공액을 이루는 변형구배텐서 및 Green-Lagrangian 변형도가 사용된다. 관련 상수들이 실험적으로 결정되는 구성방정식은 보통 진응력(true stress or Cauchy stress)과 진변형도(true strain or logarithmic strain)의 관계식으로 주어지기 때문에 변형도의 크기가 미소한 경우에는 상관없이 있으나 대변형도 문제에서는 구성방정식을 응력과 변형도 측정단위에 맞게 변환시켜주는 복잡한 과정이 필요하다 [15-17].

그러나 U.L.의 정식화 과정에서는 응력 및 변형도 측정단위가 각각 진응력 σ 와 변형률(velocity strain) D 가 되므로 이러한 변환이 불필요하다. 따라서 대변형도 문제에서는 U.L.류의 정식화과정이 더욱 적합한 것으로 판단되며 본 논문에서도 이 방법을 채택하였다.

3.2 가상일률의 원리(Principle of virtual power)

공간상에 고정된 직교좌표계에서 어떤 연속체 β 의 운동을 Fig.3.1에 표시하였다. U.L. 정식화에서는 시각 t 의 형상을 기준으로 하여 $t+\Delta t$ 의 물리량을 표현하면 된다. 이때 시각 $t+\Delta t$ 에서의 내적, 외적 가상일의 변화율은 다음과 같이 쓸 수 있다 [11].

$$\dot{W}_{\text{internal}} = \int_{V^t} s_{ij}^{t+\Delta t} \delta \dot{f}_{ji} dV^t \quad (3.1)$$

$$\dot{W}_{\text{external}} = \int_{V^t} b_i^{t+\Delta t} \delta v_i dV^t + \int_{S^t} f_i^{t+\Delta t} \delta v_i dV^t. \quad (3.2)$$

여기서, $b_i^{t+\Delta t}$, $f_i^{t+\Delta t}$ 는 각각 체적력(body force) 및 표면력(surface traction)을 의미하는 외력항들이다. $s_{ij}^{t+\Delta t}$ 는 시각 t 의 형상을 기준으로 하여 표시된 시각 $t+\Delta t$ 에서의 제1차 Piola-Kirchhoff 응력을

의미하며 F_{ij} 는 이와 에너지 공액을 이루는 변형구배텐서(deformation gradient tensor)이다. 따라서 각각은 다음과 같이 풀어쓸 수 있다.

$$s_{ij}^{t+\Delta t} = s_{ij}^t + \Delta s_{ij} = \alpha_{ij}^t + \Delta s_{ij} \quad (3.3)$$

$$\dot{F}_{ji} = \frac{\partial x_j^{t+\Delta t}}{\partial x_i^t} = \frac{\partial(x_j^t + \dot{u}_j)}{\partial x_i^t} = \frac{\partial v_j^{t+\Delta t}}{\partial x_i^t}. \quad (3.4)$$

(3.1)(3.2)식의 등치조건에 (3.3)(3.4)식을 대입하면 다음식으로 쓸 수 있다.

$$\int_{V^t} (\alpha_{ij}^t + \Delta s_{ij}) \delta \left(\frac{\partial v_j^{t+\Delta t}}{\partial x_i^t} \right) dV^t = R^{t+\Delta t}. \quad (3.5)$$

이때,

$$R^{t+\Delta t} = \int_{V^t} b_i^{t+\Delta t} \delta v_i^{t+\Delta t} dV^t + \int_{S^t} f_i^{t+\Delta t} \delta v_i^{t+\Delta t} dS^t \quad (3.6)$$

이 된다. 또한 \dot{s}_{ij} 는 다음식으로 표현 가능하다[18].

$$\begin{aligned} \dot{s}_{ij} &= \dot{\tau}_{ij} - \alpha_{kj} D_{ki} - \alpha_{ik} D_{kj} + \alpha_{ik} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \\ &= \dot{\tau}_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{kj} (v_{k,i} + v_{i,k}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma_{ik} (v_{k,j} + v_{j,k}) + \sigma_{ik} v_{j,k} \\ &= \dot{\tau}_{ij} + \Sigma_{ijkl} v_{l,k}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

여기서, D_{ij} 는 변형률(deformation gradient) 텐서이며, Σ_{ijkl} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Sigma_{ijkl} = -\frac{1}{2} [\sigma_{ij} \delta_{ik} + \sigma_{kj} \delta_{il} + \sigma_{il} \delta_{jk} - \sigma_{ik} \delta_{jl}]. \quad (3.8)$$

(3.7)식을 (3.5)식에 대입하면 (3.9)식이 유도 된다. (이하 첨자 t 는 생략한다.)

$$\begin{aligned} \Delta t \int_V (\dot{\tau}_{ij} + \Sigma_{ijkl} v_{l,k}) \delta v_{j,i} dV \\ = R^{t+\Delta t} - \int_V \sigma_{ij} \delta v_{j,i} dV. \end{aligned} \quad (3.9)$$

여기서, $\dot{\tau}_{ij}$ 와 σ_{ij} 가 대칭텐서이므로 다음식들이 성립

한다.

$$\dot{\tau}_{ij} \delta v_{j,i} = \dot{\tau}_{ij} \text{sym}(\delta v_{j,i}) = \dot{\tau}_{ij} \delta D_{ij} \quad (3.10.a)$$

$$\sigma_{ij} \delta v_{j,i} = \sigma_{ij} \text{sym}(\delta v_{j,i}) = \sigma_{ij} \delta D_{ij} \quad (3.10.b)$$

그리고, (2.18) 식을(3.10)식과 함께 (3.9)식에 대입한다.

$$\begin{aligned} \Delta t \int_V \{ \tilde{C}_{ijkl}^{ep} D_{kl} \delta D_{ij} + \Sigma_{ijkl} v_{l,k} \} \delta v_{j,i} dV \\ = R^{t+\Delta t} \int_V \{ \sigma_{ij} - C_{ijkl}^d \dot{\Omega}_{kl} \Delta t \} \delta D_{ij} dV \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.3 증분형 강성방정식의 유도

정식화의 편의를 위하여 (3.11)식의 각 변수들을 벡터 및 행렬형태로 표현한다.

$$\begin{aligned} D_{ij} &\rightarrow \{D\}, \quad v_{j,i} \rightarrow \{v_i\}, \\ V_{ij}^{\Omega} &\rightarrow \{V_{\Omega}\}, \quad \sigma_{ij} \rightarrow \{\sigma\}, \\ \tilde{C}_{ijkl}^{ep} &\rightarrow \{\tilde{C}_{ep}\}, \quad C_{ijkl}^d \rightarrow \{C_d\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

그리고 요소내부 임의 점의 속도벡터 $\{v\}$ 를 절점 속도벡터 $\{v_d\}$ 와 형상함수 $[N]$ 의 곱으로 (3.13)식과 같이 나타낼 수 있고, (3.13)식을 적절히 미분함으로써 (3.14)(3.15)식이 유도 된다.

$$\{v\} = [N]\{v_d\} \quad (3.13)$$

$$\{D\} = [B_L]\{v_d\} \quad (3.14)$$

$$\{v_i\} = [B_{NL}]\{v_d\}. \quad (3.15)$$

따라서 D_{ij} 및 $v_{j,i}$ 의 변분은 다음식과 같이 쓸 수 있으며

$$\delta\{D\} = [B_L] \delta\{v_d\} \quad (3.16.a)$$

$$\delta\{v_i\} = [B_{NL}] \delta\{v_d\}, \quad (3.16.b)$$

(3.11)식에 상기식들을 대입하게 되면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \int_V \Delta t \delta(v_d)^T \{ [B_L]^T [\tilde{C}_{ep}] [B_L] \\ + [B_{NL}]^T [\Sigma] [B_{NL}] \} \{v_d\} dV \\ = \delta(v_d)^T \int_V [N]^T \{b\} dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \delta(v_d)^T \int_s [N]^T \{f\} dS \\ - \delta(v_d)^T \int_V [B_L]^T \{\sigma\} dV \\ - \delta(v_d)^T \int_V [B_L]^T [C_d] \{\dot{\Omega}\} \Delta t dV. \end{aligned} \quad (3.17)$$

여기서, 다음과 같은 선형화 가정을 도입한다.

$$v_i^t \Delta t = \Delta u_i \quad (3.18.a)$$

$$\{v_i\} \Delta t = \{\Delta u\} \quad (3.18.b)$$

$$\{\dot{\Omega}\} \Delta t = \{\Delta \dot{\Omega}\}. \quad (3.18.c)$$

즉, 시간 t 와 $t+\Delta t$ 구간에서는 속도가 v_i^t 로 균일한 것으로 간주한다. 여기서 $\{\Delta u\}$ 는 절점변위증분벡터를 의미하며 (3.25)식을 (3.22)식에 대입하면 증분형 강성방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$([K_L] + [K_{NL}])\{\Delta u\} = \{F_f\} - \{F_s\} - \{F_d\}. \quad (3.19)$$

이때, 각 강성행렬 및 하중벡터들은 다음과 같이 정의된다.

$$[K_L] = \int_V [B_L]^T [\tilde{C}_{ep}] [B_L] dV \quad (3.20.a)$$

$$[K_{NL}] = \int_V [B_{NL}]^T [\Sigma] [B_{NL}] dV \quad (3.20.b)$$

$$\{F_f\} = \int_V [N]^T \{b\} dV + \int_s [N]^T \{f\} dS \quad (3.20.c)$$

$$\{F_s\} = \int_V [B_L]^T \{\sigma\} dV \quad (3.20.d)$$

$$\{F_d\} = \int_V [B_L]^T [C_d] \{\Delta \dot{\Omega}\} dV. \quad (3.20.e)$$

여기서 $[K_L]$ 은 선형 강성행렬, $[K_{NL}]$ 은 초기응력에 의한 비선형 강성행렬이며 $\{F_f\} - \{F_s\}$ 항은 구간별 선형화 가정에 따르는 불평형력이 된다. 그리고 $\{F_d\}$ 는 손상 발전에 따라 부가되는 하중항을 의미한다.

4. 수치계산 및 고찰

4.1 탄소성-손상 유한요소해석 프로그램

유한요소 정식화 과정을 적용하여 대변형, 대회전을 고려한 2차원 평면문제(plane stress/plane strain)의 탄소성-손상 유한요소해석 프로그램을 구성하였다. 증분형 비선형 평형방정식을 풀기 위한 수치적 알고리즘으로는 Riks 방법[19]에 기본을 둔 호장증분법(arc length method)에 따라 변위 증분량을 결정하고 해의 수렴을 위한 반복계산법으로는 modified Newton-Raphson(m.N.R.) 방법을 결합하여 사용하였다.

4.2 구성방정식 모델의 재료상수

Chow and Wang[20,21]은 알루미늄 합금 2024-T3의 인장시험을 수행하여 결보기 탄성계수 및 Poisson 비의 변화를 계측, 제시하고 있으며 이 계측 결과를 바탕으로 하여 (2.12)식의 손상발전식과 관련된 재료상수 $C_1, C_2, \beta_1, \beta_2$ 및 등방경화 관련계수 σ_y, c, n 값들이 Table 4.1과 같이 결정된다[8].

Table 4.1 Material constants for plastic-damage analysis[8]

Material properties	values
Elastic modulus E	73600 Mpa
Poisson's ratio ν	0.35
Yield stress σ_y	350 Mpa
Isotropic hardening parameters	
c	35
n	0.3
Damage evolution parameters	
C_1	0.45
C_2	0.5
β_1	7
β_2	16

4.3 대변형, 대회전 문제의 해석가능 검토

4.3.1 90° 강제 회전운동

강제회전운동의 영향을 배제하고 재료자체의 변형만 직접적으로 고려할 수 있도록 응력측정 단위로서 Cauchy 응력의 Jaumann율을 도입하여 응력증분을 계산한 다음 이것을 단계별로 적분해가는 방법을 채택하였다. 이와 같은 알고리즘에 의한 해석의 정밀도를 확인하기 위하여 강제회전운동에 대한 예제계산을 수행하였다. Fig.4.1에서 처럼 $\sigma_x=100$ 이 되도록

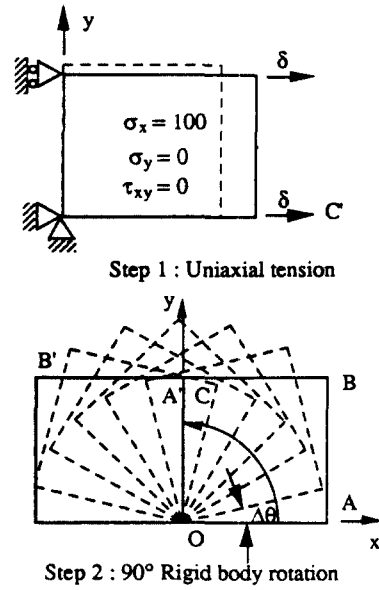


Fig.4.1 90° rigid body rotation with initial stress

Table 4.2 Cauchy stress components after 90° rigid body rotation with initial stress : $\sigma_x=100, \sigma_y=0, \tau_{xy}=0$

Increment $\Delta\theta$	σ_x	σ_y	σ_{xy}
5°	-15.4	115.4	-2.30
2°	-5.75	105.8	-0.32
1°	-2.79	102.8	-0.08
0.5°	-1.37	101.4	-0.02
0.25°	-0.68	100.7	0
Exact sol.	0	100	0

x축 방향으로 강제변형을 가한 다음 이 변형상태를 그대로 유지하면서 일정 각도증분 $\Delta\theta$ 만큼 강제회전운동이 발생하도록 연속적으로 강제변위를 가하여 최종적으로 90° 만큼 회전시킨다. 1개의 4-절점요소를 사용하였으며 계산결과는 Table 4.2에서 정리한 바와 같다. 회전각도 증분 $\Delta\theta$ 의 크기가 감소함에 따라 오차의 크기가 줄어들어 Mohr 원 변환에 의한 이론해 $\sigma_x=0, \sigma_y=100, \tau_{xy}=0$ 에 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

4.3.2 외팔보(cantilever beam)의 탄성 대변형 해석

단에 집중하중 P를 받는 외팔보를 3개의 8-절점요소로 모델링하여 탄성대변형 해석을 수행한 다음 Fig.4.2에서 Bathe and Bolourchi[22]의 계산결과와 비교하였다. 세장보의 굽힘이론에 바탕을 둔 해석해와는 약간의 차이가 있으나 평면응력 문제로서 해석

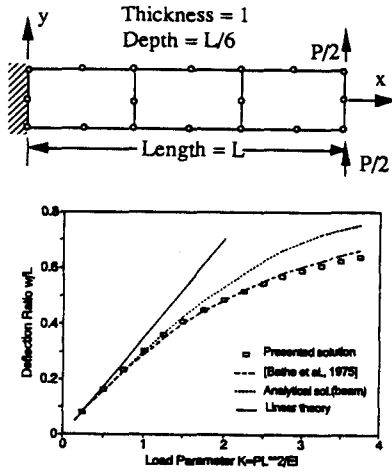


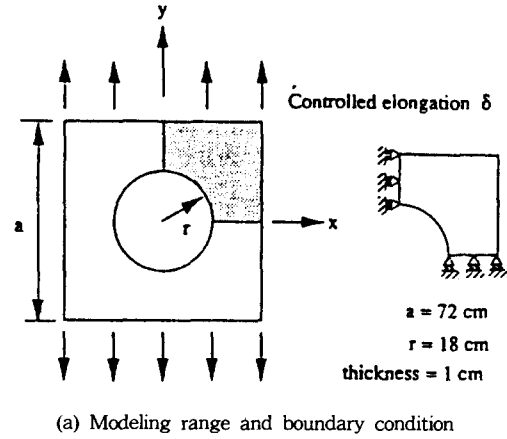
Fig.4.2 Finite deflection of a cantilever beam

한 두가지 수치해는 서로 근접한 결과를 보여주고 있다.

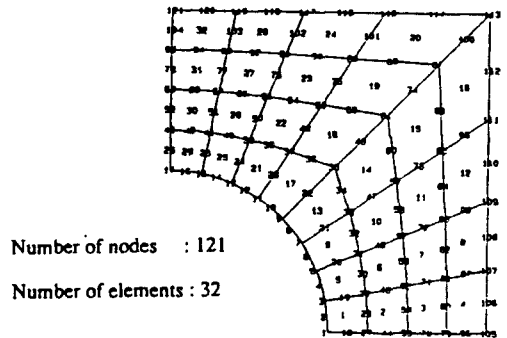
4.4 대변형도 문제에서의 소성-손상해석

대변형도 문제는 대체로 심한 비선형성을 보이고 있어 구조물의 거동 중에서도 가장 다루기 까다로운 분야의 하나로 인식되고 있다. 일반적인 탄소성 변형 등 재료비선형 문제에서는 변형도의 크기가 2-3%를 초과하는 경우가 드물지만 네킹, 금속성형(metal forming) 등 몇몇 특수한 변형상태에서는 변형도가 수십 %에 이르는 경우도 종종 있을 수 있다. 이러한 부류의 변형상태 하에서는 변형이 초기형상에 비해서 엄청나게 커질 수밖에 없기 때문에 기하학적 비선형거동 특성이 필연적으로 동반된다. 본 논문에서는 Argyris 등[23]이 다룬 바 있는 유공 정사각형 평판의 네킹 문제를 해석함으로써 대변형, 대변형도 거동시 수반되는 소성변형과 이방성 손상의 발생, 진전과정을 고찰하였다. 중앙에 직경 36cm의 원공을 가진 한변의 길이가 72cm의 정사각형 평판을 인장시키면서 원호 주변에서 발생하는 소성변형과 이방성 손상의 진전상태를 검토하였다. 유한요소해석 모델링의 범위, 경계조건 등은 Fig.4.3에 정리한 바와 같다.

인장변위증분에 따른 반력 즉 하중의 변화를 Fig. 4.4에 도시하였으며 이때, 손상발전의 영향을 고찰하기 위하여 손상이 진전하지 않는 것으로 가정하여 계산한 결과를 함께 비교하였다. 초기에는 인장변위 δ 의 증분에 따른 반력의 크기가 급격한 증가세를



(a) Modeling range and boundary condition



(b) Finite element modeling

Fig.4.3 Extension of square plate with a central hole

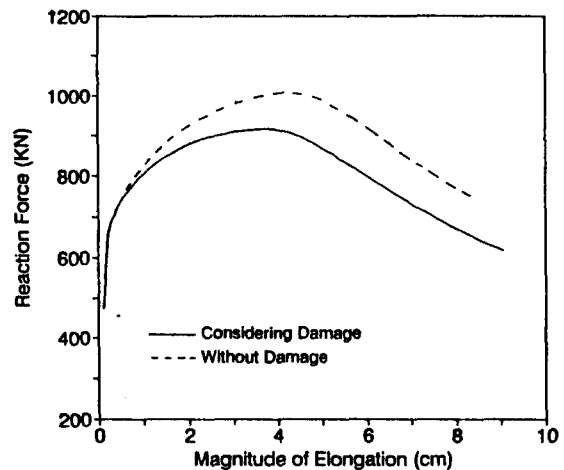


Fig.4.4 Calculated P- δ curve of square plate

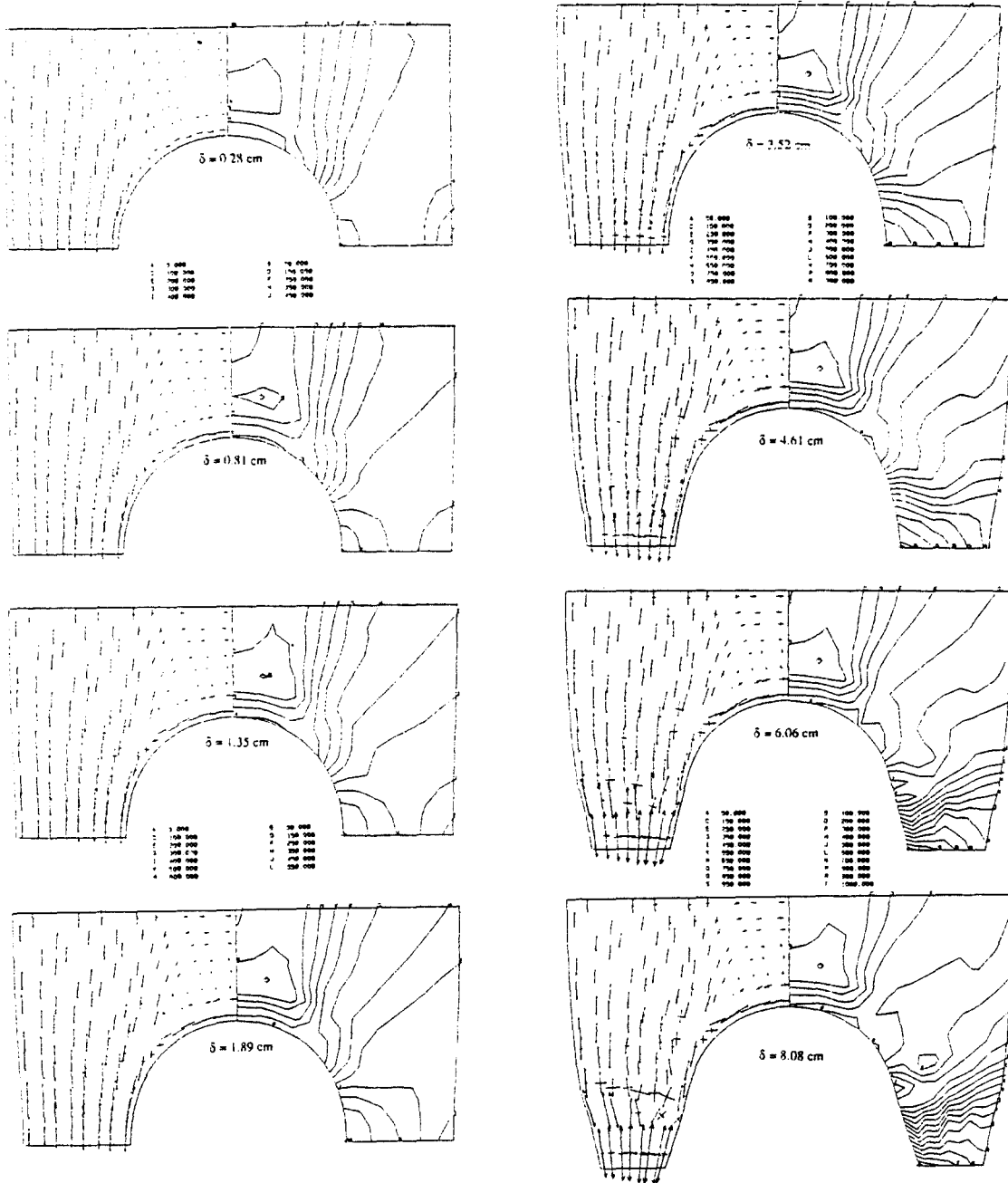


Fig.4.5 Principal directions and contour map of effective stresses

보이고 있으나 $\delta=3.5\text{cm}$ 부근에서 최대값을 보인 이후 감소로 반전된다. 이것은 이 부근 부터 인장에 따른 단면적의 감소속도가 재료의 경화에 의한 강성 증가속도 보다 커지기 시작함으로써 접선강성이

음의 값을 갖게 되고 따라서 급격한 불안정 연화현상 즉 네킹으로 이행됨을 보여주고 있다. 전체적인 거동의 형태는 손상의 발전을 고려하지 않는 경우와 거의 유사한 결과를 보이나 반력의 크기는 약

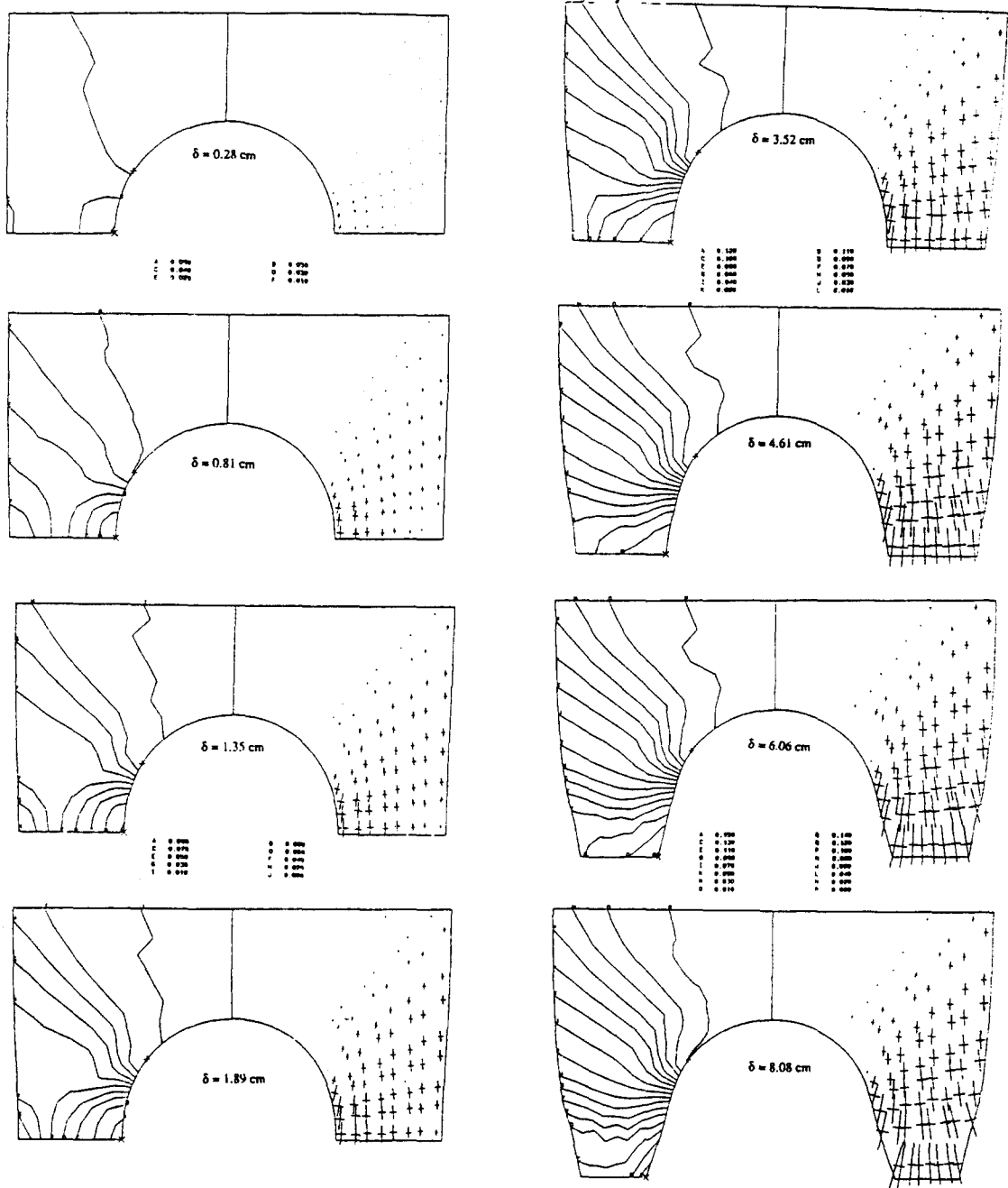


Fig.4.6 Evolution of anisotropic damage and its contours

20% 정도까지 차이가 벌어진다는 사실을 확인할 수 있다. 이것은 손상의 진전으로 인한 강성저하가 발생됨을 보여주고 있다.

변형 단계별 응력 및 손상의 분포를 주축방향의

크기와 등고선을 대비하여 Fig.4.5, Fig.4.6에 나타내었다. 네킹발생 부위의 주응력 방향의 하중작용 방향에 따라 대략 y-축 방향의 인장응력이 지배적이거나 변형이 진전됨에 따라 형상변화에 수반되는 평형조

건을 만족시키기 위하여 점차 2차원적인 응력상태로 변화된다. 이방성손상의 주축방향 역시 응력과 유사한 분포를 보여주고 있다. 가장 변형이 크게 발생하는 경우라도 손상의 크기는 20%를 초과하지는 않고 있다. 이것은 (2.11)식의 손상발전식 자체가 손상이 폭발적으로 급격히 증가하게 되는 파괴 직전의 상황을 제외하고 비교적 안정적인 성장을 보이는 초기 변형단계만을 대상으로 모형화하였기 때문이다. 따라서 좀더 합리적인 계산결과를 얻기 위해서는 파단직전의 큰 변형도에 이를 때까지 정밀한 실험을 실시하여 충분한 계측자료를 취득한 후 이를 바탕으로 하여 경화계수 및 손상의 발전 과정을 좀더 현실적으로 표현할 수 있는 구성방정식 모델의 개발이 필수적인 선결 과제로 생각된다.

5. 결 론

본 연구에서는 연속체 손상역학 분야의 접근방법에 따라 구조물의 시간독립적인 소성변형 현상을 추적함에 있어서 기존의 소성해석이론이 갖는 한계를 극복하여 변형과정에서 발생하는 재료자체의 손상까지 고려할 수 있는 좀더 합리적인 구조안전성 평가기법을 개발하는데 그 목적을 두었으며 다음과 같은 몇가지 연구결과를 얻었다.

- (1) 탄소성변형 문제에 있어서 변형의 비선형 기하학을 기본으로 하여 대변형, 대회전 문제를 고려한 탄소성-손상 유한요소의 정식화과정을 정립하였다.
- (2) 본 연구에서 채택된 탄소성-손상 구성방정식은 재료의 손상이라는 새로운 정보를 제시할 수 있을 뿐만 아니라 작용응력 또한 손상을 고려한 유효응력 개념을 도입함으로써 좀더 합리적인 평가 기준을 제공하고 있음을 확인할 수 있다.
- (3) 유한요소 해석 프로그램 역시 대변형문제, 손상을 포함하는 재료 비선형문제 공히 합리적인 해석결과를 제시하고 있으나, 파단직전의 대변형도 문제를 처리하기 위해서는 정밀한 실험을 통한 좀더 현실성있는 손상발전식의 개발이 우선되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] Coleman, B.D., and Gurtin, M.E., "Thermody-

namics with Internal State Variables," *Journal of Chemical Physics*, Vol.47, pp.597-613, 1967.

- [2] Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [3] Kachanov, L.M., "Time of the Rupture Process under Creep Conditions," *Izv. AN SSSR, Otd. Tekh. Nauk.*, No.8, pp.26-31, 1958.(in Russian)
- [4] Vakulenko, A.A., and Kachanov, M.L., "Continual Theory of a Medium with Cracks", *Izv. AN SSSR, Mekhanika Tverdogo Tela*, Vol. 6, pp.159-166, 1971.(Mechanics of Solids, pp. 145-151, translated from Russian)
- [5] Murakami, S., and Ohno, N., "A Continuum Theory of Creep and Creep Damage," *3rd IUTAM Symposium on Creep in Structures*, eds., A.R.S. Ponter and D.R.Hayhurst, Springer-Verlag, pp.422-444, 1981.
- [6] Kim, S.J., and Oden, J.T., "Finite Element Analysis of a Class of Problems in Finite Elastoplasticity based on the Thermodynamical Theory of Materials of Type-N," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.53, pp.272-302, 1985.
- [7] 김승조, 박승배, 김위대, 이해경, "반복하중에 따른 재료의 손상계수 규명 및 손상해석에 관한 연구, II. 유한요소해석", 한국항공우주학회지, 제18권, 제2호, pp.50-59, 1990.
- [8] 임상전, 노인식, 신종계, "소성손상을 고려한 연성재료의 구성방정식," 대한조선학회 춘계연구 발표회, 1992.4.
- [9] Lemaitre, J. and Chaboche, J.L., *Mechanics of Solid Material*, Cambridge University Press, 1978.
- [10] Sidoroff, F., "Description of Anisotropic Damage Application to Elasticity," *IUTAM Symposium on Physical Nonlinearities in Structural Analysis*, ed., J. Hult, pp.237-244, 1981.
- [11] 山田嘉昭, 塑性·粘彈性, 有限要素法の基礎と應力 シリーズ6, 培風館, 1980.
- [12] Owen, D.P.J. and Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press Limited, UK, 1980.

- [13] McMeeking, R.M., and Rice, J.R., "Finite Element Formulations for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.11, pp.601-616, 1975.
- [14] Cheng, Y.M., and Tsui, Y., "Limitations to the Large Strain Theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.33, pp.101-114, 1992.
- [15] Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc., 1982.
- [16] Gadala, M.S., Dokainish, M.A., and Oravas, G.A.E., "Formulation Methods of Geometric and Material Nonlinearity Problems," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.20, pp.887-914, 1984.
- [17] Hibbitt, H.D., Marcal, P.V., and Rice, J.R., "A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.20, pp.1069-1086, 1970.
- [18] 노인식, "재료의 탄소성 손상 구성방정식 개발 및 대변형 유한요소해석에 관한 연구," 서울대학교 박사학위논문, 1992.8.
- [19] Riks, E., "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.15, pp.529-551, 1972.
- [20] Chow, C.L., and Wang, J., "An Anisotropic Theory of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.27, pp.547-558, 1987.
- [21] Chow, C.L., and Wang, J., "A Finite Element Analysis of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture", *International Journal of Fracture*, Vol.38, pp.3-16, 1987.
- [22] Bathe, K.J., and Bolourchi, S., "Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.14, pp.961-986, 1979.
- [23] Argyris, J.H., Doltsinis, J.St., and Kleiber, M., "Incremental Formulation in Nonlinear Mechanics and Large Elasto-Plasticity-Natural Approach. Part II," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.14, pp.259-294, 1978.