
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 30 卷 第 1 號 1993 年 2 月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 30, No.1, February 1993

중간구속조건을 갖는 양단탄성구속 Timoshenko

보-기둥의 진동 및 동특성감도 해석

정정훈*, 주원호**, 김극천***

Vibration and Dynamic Sensitivity Analysis of a Timoshenko Beam-Column with Ends Elastically Restrained and Intermediate Constraints

by

J.H. Chung*, W.H. Joo** and K.C. Kim*

요 약

중간구속조건을 갖는 보 및 보-기둥의 진동에 관한 기존연구들의 대부분은 Euler 보이론틀에서 다루었다. 세장비가 작은 경우 또는 세장비가 큰 경우일지라도 고차진동에 대해서는 Timoshenko 이론들에 의한 해석이 요구되나, Timoshenko 보 및 보-기둥에 관한 연구사례는 적은 편이다. 본 연구에서는 Timoshenko 보-기둥에 대해서 양단경계조건을 병진스프링·회전스프링 구속으로, 중간구속조건을 임의 갯수의 집중질량·병진스프링·회전스프링으로 일반화하여 정식화한 다음 엄밀해법을 제시하고, 아울러 엄밀해법의 연산부담이 매우 큰 점을 고려하여 적절한 Rayleigh-Ritz 해석에 대해서도 검토하였다. Rayleigh-Ritz 해석에 있어서는 우선 기준계의 고유함수를 이용하는 방법이 고려될 수 있으나 이 경우에도 Euler 보이론과는 달라서 연산부담이 역시 큰 편이다. 따라서 기준계의 고유함수와 같은 성질을 갖는 다항식을 도출하고 이를 이용하는 Rayleigh-Ritz 해석의 유용성에 관해 검토했다. 한편, 본 연구의 대상계와 같은 복합계에 대해서는 최적설계관점에서 설계변수변경에 따른 재해석문제 또한 중요한 과제임을 고려하여, 특성다항식 이용 Rayleigh-Ritz 방법에 기초하여 계산되는 동특성 1차 감도의 유용성도 검토되었다. 수치 계산을 통해 전기 특성 다항식을 이용한 Rayleigh-Ritz 해석이 정확도면에서 엄밀해와 부합성이 양호하고, 계산 효율은 매우 높음이 확인되었다.

발 표 : 1992년도 대한조선학회 추계연구발표회('92. 11. 14.)

접수일자: 1992년 12월 3일, 재접수일자: 1993년 2월 1일

* 정회원, 해사기술연구소

** 정회원, 현대선박해양연구소(연구당시 서울대 대학원생)

*** 서울대학교 조선해양공학과

Abstract

Most studies on the vibration analysis of a beam-column with ends elastically restrained and various intermediate constraints have been based on the Euler beam theory, which is inadequate for beam-columns of low slenderness ratios.

In this paper, analytical methods for vibration and dynamic sensitivity of a Timoshenko beam-column with ends elastically restrained and various intermediate constraints are presented. Firstly, an exact solution method is shown. Since the exact method requires considerable computational effort, a Rayleigh-Ritz analysis is also investigated. In the latter two kinds of trial functions are examined for comparisons: eigenfunctions of the base system (the system without intermediate constraints) and polynomials having properties corresponding to the eigenfunctions of the base system. The results of some numerical investigations show that the Rayleigh-Ritz analysis using the characteristic polynomials is competitive with the exact solutions in accuracy, and that it is much more efficient in computations than using the eigenfunctions of the base system, especially in the dynamic sensitivity analysis. In addition, the prediction of the changes of natural frequencies due to the changes of design variables based on the first order sensitivity is in good agreements with that by the ordinary reanalysis as long as the changes of design variables are moderate.

1. 서 론

중간구속조건을 갖는 보 및 보-기둥의 진동에 관한 기존연구들의 대부분은 Euler 보 이론들에서 특정 경계조건 및 특정 중간구속 조건을 다루었다. 최근 이 등[1](1991)이 경계조건을 병진스프링·회전스프링 구속으로, 중간구속조건을 임의갯수의 집중질량·병진스프링·회전스프링으로 일반화하여 엄밀해법을 제시함과 아울러 중간구속조건이 없는 경우(이하 기준계라 지칭함)의 고유함수를 이용하는 Rayleigh-Ritz 해석방법도 검토하여 후자가 매우 효율적인 방법임을 확인했다.

세장비가 작은 경우 또는 세장비가 큰 경우일지라도 고차진동에 대해서는 Timoshenko 보 이론들에서의 해석이 요구되나, Timoshenko 보 및 보-기둥에 관한 연구사례는 적은 편이다. Grant[2](1978)가 고전적 경계조건을 갖는 보에 집중질량 1개가 부가된 경우의 엄밀해를 제시했고, Kounadis[3](1980)는 집중질량 1개가 부가된 보-기둥에 대해서 균일분포 비보존력이 작용할 때의 운동방정식 도출방법을 논했으며, Abbas[4](1983)는 양단이 병진 및 회전에 대해 탄성구속된 보에 대해 유한요소법을 적용하여 양단 경계조건이 진동특성에 미치는 영향을 고찰했다.

최근 Gutierrez 등[5](1991)이 양단이 회전에 대해 탄성 구속된 변단면보에 대해 기본진동형의 Rayleigh-Ritz 해석에 있어서 Bhat[6](1986)의 Euler 보 특성다항식의 유용성에 관해 검토했다.

본 연구에서는 Timoshenko 보-기둥에 대해서 양단 경계조건을 병진스프링·회전스프링 구속으로, 중간구속조건을 임의갯수의 집중질량·병진스프링·회전스프링으로 일반화하여 정식화한 다음 엄밀해법을 제시하고, 아울러 엄밀해법의 연산부담이 매우 큰 점을 고려하여 적절한 Rayleigh-Ritz 해석에 대해서도 검토하였다. 정식화 및 엄밀해법에 있어서는 Hamilton 의 원리 및 Laplace 변환방법이 원용되었다. Rayleigh-Ritz 해석에 있어서는 우선 기준계의 고유함수를 이용하는 방법이 고려될 수 있으나, 이 경우에도 Euler 보 이론과는 달라서 연산부담이 역시 큰 편이다. 따라서 기준계의 고유함수와 같은 성질을 갖는 다항식을 도출하고 이를 이용하는 Rayleigh-Ritz 해석의 유용성에 관해 검토했다.

한편, 본 연구의 대상계와 같은 복합계에 대해서는 최적설계관점에서 설계변수변경에 따른 재해석문제 또한 중요한 과제임을 고려하여, 특성다항식 이용 Rayleigh-Ritz 방법에 기초하여 계산되는 동특성 1차 감도의 유용성도 검토되었다.

2. 엄밀해

대상계는 Fig.1과 같이 정의한다. 미소진동을 가정하고, Hamilton의 원리를 적용하므로써 운동방정식 및 경계조건식이 다음과 같이 귀착된다.

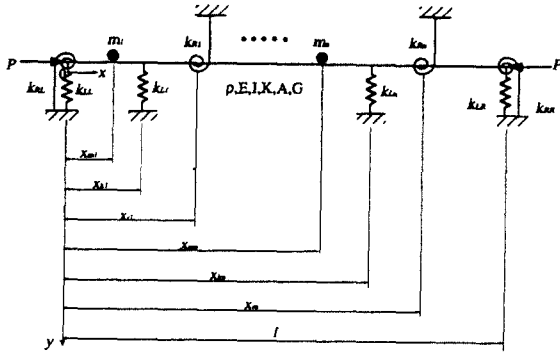


Fig. 1 A uniform Timoshenko beam-column with ends elastically restrained and intermediate constraints

운동방정식 :

$$\left\{ \rho A + \sum_{k=1}^n m_k \delta(x - x_k) \right\} \ddot{y} - KAG(y'' - \psi') + Py'' + \sum_{i=1}^n k_{Li} \delta(x - x_{ki}) y = 0 \tag{1}$$

$$\rho I \ddot{\psi} - EI \psi'' - KAG(y' - \psi) + \sum_{j=1}^n k_{Rj} \delta(x - x_{rj}) \psi = 0$$

경계조건식 :

$$KAG(y' - \psi)_{x=0} = k_{LL} y_{x=0} + P y'_{x=0} \tag{2}$$

$$EI \psi'_{x=0} = k_{RL} \psi_{x=0} \\ KAG(y' - \psi)_{x=l} = -k_{LR} y_{x=l} + P y'_{x=l} \tag{3}$$

여기서 $y(x,t)$: 횡방향 처짐, $\psi(x,t)$: 횡방향 굽힘각, ρA : 단위길이당 질량, ρI : 단위길이당 회전관성, EI : 굽힘강성, KAG : 전단강성, P : 축력(압축+), k : 스프링상수, m : 집중질량, $\delta(x)$: Dirac delta 함수이

고, \cdot 및 $\dot{}$ 은 각기 t 및 x 에 관한 미분이다.

(1)에 대해 조화운동

$$y(x,t) = Y(x)e^{i\omega t}, \quad \psi(x,t) = \Psi(x)e^{i\omega t} \tag{4}$$

을 가정하고, 무차원 길이좌표 및 계의 특성치 파라미터

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad b^2 = \frac{\rho A l^4 \omega^2}{EI}, \quad r^2 = \frac{\rho I}{\rho A l^2} \\ t^2 = \frac{EI}{KAG l^2}, \quad \bar{P} = \frac{P l^2}{EI}, \quad M_k = \frac{m_k}{\rho A l} \tag{5}$$

$$K_{Li} = \frac{k_{Li} l^3}{EI}, \quad K_{Rj} = \frac{k_{Rj} l}{EI}, \quad K_{LL} = \frac{k_{LL} l^3}{EI} \\ K_{LR} = \frac{k_{LR} l^3}{EI}, \quad K_{RL} = \frac{k_{RL} l}{EI}, \quad K_{RR} = \frac{k_{RR} l}{EI}$$

를 도입하면 $Y(x)$ 및 $\Psi(x)$ 에 관한 미분방정식

$$(1 - \bar{P} t^2) Y''(\xi) + \left\{ b^2 t^2 + \sum_{k=1}^n b^2 t^2 M_k \delta(\xi - \xi_{mk}) - \sum_{i=1}^n K_{Li} t^2 \delta(\xi - \xi_{ki}) \right\} Y(\xi) - I \Psi'(\xi) = 0 \tag{6}$$

$$t^2 \Psi''(\xi) + \left\{ b^2 r^2 t^2 - 1 - \sum_{j=1}^n K_{Rj} t^2 \delta(\xi - \xi_{rj}) \right\} \Psi(\xi) + \frac{Y'(\xi)}{l} = 0$$

이 얻어지고, 경계조건식 (2) 및 (3)은 다음과 같이 표현된다.

$$Y(0) = \frac{1}{K_{LL} t^2} \{ Y'(0) - \Psi(0) \} - \frac{\bar{P}}{K_{LL}} Y'(0) \tag{7}$$

$$\Psi(0) = \frac{1}{K_{RL}} \Psi'(0)$$

$$Y(1) = -\frac{1}{K_{LR} t^2} \{ Y'(1) - \Psi(1) \} + \frac{\bar{P}}{K_{LR}} Y'(1) \tag{8}$$

$$\Psi(1) = -\frac{1}{K_{RR}} \Psi'(1)$$

Laplace 변환방법을 원용하여 (6)의 일반해를 구한 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 Y(\xi) = & \frac{l}{(1-\bar{P}t^2)(\alpha^2+\beta^2)} \left\{ \left[\frac{1-t^2r^2t^2}{t^2b^2\alpha} \sinh(\alpha b\xi) \right. \right. \\
 & - \left. \frac{1-t^2r^2t^2}{t^2b^2\beta} \sin(\beta b\xi) \right] \Psi(0) \\
 & + \left[\frac{\cosh(\alpha b\xi) - \cos(\beta b\xi)}{b^2} \right] \frac{\Psi'(0)}{b^2} \\
 & + \left[\frac{((1-\bar{P}t^2)(\alpha^2+r^2) + \frac{\bar{P}}{b^2}) \cosh(\alpha b\xi)}{((1-\bar{P}t^2)(\beta^2-r^2) - \frac{\bar{P}}{b^2}) \cos(\beta b\xi)} \right] \frac{Y(0)}{l} \\
 & + \left[\frac{(1-\bar{P}t^2)(-1+t^2b^2(\alpha^2+r^2))}{t^2b^2\alpha} \sinh(\alpha b\xi) \right. \\
 & + \left. \frac{(1-\bar{P}t^2)(1+t^2b^2(\beta^2-r^2))}{t^2b^2\beta} \sin(\beta b\xi) \right] \frac{Y'(0)}{l} \\
 & + \sum_{k=1}^n \frac{M_k Y(\xi_{mk}) u(\xi - \xi_{mk})}{bl} \\
 & \cdot \left[\frac{1-t^2b^2(\alpha^2+r^2)}{\alpha} \sinh(\alpha b\xi - \xi_{mk}) \right. \\
 & - \left. \frac{1+t^2b^2(\beta^2-r^2)}{\beta} \sin(\beta b\xi - \xi_{mk}) \right] \\
 & + \sum_{i=1}^n \frac{K_{Li} Y(\xi_{ki}) u(\xi - \xi_{ki})}{b^2 l} \\
 & \cdot \left[\frac{t^2b^2(\alpha^2+r^2) - 1}{\alpha} \sinh(\alpha b\xi - \xi_{ki}) \right. \\
 & + \left. \frac{t^2b^2(\beta^2-r^2) + 1}{\beta} \sin(\beta b\xi - \xi_{ki}) \right] \\
 & + \sum_{j=1}^n \frac{K_{Rj} \Psi(\xi_{rj}) u(\xi - \xi_{rj})}{b^2} \\
 & \cdot \left[\cosh(\alpha b\xi - \xi_{rj}) - \cos(\beta b\xi - \xi_{rj}) \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi(\xi) = & \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)(1-\bar{P}t^2)} \\
 & \cdot \left\{ \left[\frac{(1-\bar{P}t^2)t^2\alpha^2b^2 + 1 + t^4b^2}{t^2b^2} \cosh(\alpha b\xi) \right. \right. \\
 & + \left. \frac{(1-\bar{P}t^2)t^2\beta^2b^2 - 1 - t^4b^2}{t^2b^2} \cos(\beta b\xi) \right] \Psi(0) \\
 & + \left[\left(\frac{(1-\bar{P}t^2)\alpha}{b} + \frac{t^2}{b\alpha} \right) \sinh(\alpha b\xi) \right. \\
 & + \left. \left(\frac{(1-\bar{P}t^2)\beta}{b} - \frac{t^2}{b\beta} \right) \sin(\beta b\xi) \right] \frac{\Psi'(0)}{b} \\
 & + \left[\frac{1}{b\alpha} \sinh(\alpha b\xi) - \frac{1}{b\beta} \sin(\beta b\xi) \right] \frac{Y(0)}{l} \\
 & - \left[\frac{(1-\bar{P}t^2)}{t^2b^2} \cosh(\alpha b\xi) - \frac{(1-\bar{P}t^2)}{t^2b^2} \cos(\beta b\xi) \right] \frac{Y'(0)}{l} \\
 & + \sum_{k=1}^n \frac{M_k Y(\xi_{mk}) u(\xi - \xi_{mk})}{l} \\
 & \left[\cosh(\alpha b\xi - \xi_{mk}) - \cos(\beta b\xi - \xi_{mk}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^n \frac{K_{Li} Y(\xi_{ki}) u(\xi - \xi_{ki})}{b^2 l} \\
 & \cdot \left[\cosh(\alpha b\xi - \xi_{ki}) - \cos(\beta b\xi - \xi_{ki}) \right] \\
 & + \sum_{j=1}^n \frac{K_{Rj} \Psi(\xi_{rj}) u(\xi - \xi_{rj})}{b} \\
 & \cdot \left[\left(\frac{t^2}{\alpha} + \alpha(1-\bar{P}t^2) \right) \sinh(\alpha b\xi - \xi_{rj}) \right. \\
 & + \left. \left(-\frac{t^2}{\beta} + \beta(1-\bar{P}t^2) \right) \sin(\beta b\xi - \xi_{rj}) \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

(9) 및 (10)에서 $u(\xi)$ 는 unit step function이고, α, β 산식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \alpha \beta \} & = \left[\frac{1}{2(1-\bar{P}t^2)} (\mp \lambda_1 + \lambda_2) \right]^{\frac{1}{2}}, \lambda_2 > \lambda_1 \quad (11) \\
 \lambda_1 & = (t^2 + r^2) + \bar{P}(-t^2r^2 + \frac{1}{b^2}) \\
 \lambda_2 & = \left\{ \left[(t^2 - r^2) + \bar{P}(t^2r^2 - \frac{1}{b^2}) \right]^2 + \frac{4}{b^2} \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

따라서, 일반해 (9) 및 (10)과 경계조건식 (7) 및 (8)로부터 고유치문제가 형성되고, 그로부터 고유진동수 및 고유함수를 구할 수 있다.

기준계

중간구속조건이 없는 경우 즉, 기준계에 대한 일반해는 (9) 및 (10)에서 $\sum_{i=1}^n (\dots) = \sum_{i=1}^n (\dots) = \sum_{i=1}^n (\dots) = 0$ 으로 취한 결과이다. 따라서 동 일반해와 경계조건식 (7) 및 (8)로부터 기준계의 고유치문제가 형성된다.

3. Rayleigh-Ritz 해석

서론에서 기술한 바와 같이 진동파형 가정함수로서 기준계의 고유함수를 이용하는 경우에도 연산부담이 큰 편이다. 앞서, 저자중 한 사람인 정[7](1991)이 Mindlin 판유추 구조계의 Rayleigh-Ritz 해석을 위해 진동파형 가정함수로서 Timoshenko 보합수 성질을 갖는 다항식을 정의하고, 이를 이용하는 방법이 매우 효율적임을 확인했다. 본 연구에서도 [7]에 준하여 기준계의 고유함수 성질을 갖는 다항식 즉, 특성다항식을 도출하고 이를 이용하는 방법이 검토되었다.

3.1 특성다항식

(1)에서 중간구속 조건항을 배제하고 조화운동 (4)에 대한 힘의 평형식을 얻은 다음 ω^2 을 소거하고 (5)와 같이 정의된 기호를 도입하므로써 다음식이 얻어진다.

$$-r^2\Psi(Y'' - l\Psi' - \bar{P}t^2Y'') + Y(t^3\Psi'' + \frac{Y'}{l} - \Psi) = 0 \quad (12)$$

일반적으로 Timoshenko보 진동론에서 회전관성효과를 전단변형효과보다 매우 작으므로 (12)에서 $r^2 = 0$ 로 취하므로써 $Y(\xi)$ 와 $\Psi(\xi)$ 의 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$Y' \approx l(\Psi - t^2\Psi'') \quad (13)$$

한편, 기준계의 고유함수의 정규화직교관계식은 다음과 같다.

$$\int_0^1 (\rho AY_m Y_n + \rho I \Psi_m \Psi_n) d\xi = \delta_{mn} \quad (14)$$

여기서 m, n 는 진동차수이고 δ_{mn} 는 Kronecker delta 이다.

(13), (14) 및 경계조건식 (7), (8)을 이용하여 [7]에 설명된 요령으로 특성다항식을 도출할 수 있다. 동 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi) &= A_1(A_{01} + A_{11}\xi + A_{21}\xi^2 + \xi^3) \\ Y_1(\xi) &= A_1 l \left[A_{31} + (A_{01} - 2t^2 A_{21})\xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(A_{11} - 6t^2)\xi^2 + \frac{1}{3}A_{21}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{01} &= \frac{1}{K_{RL}} \left(\frac{-\gamma_2\beta_3 + \gamma_3\beta_2}{\gamma_2\beta_1 - \gamma_1\beta_2} \right), \quad A_{11} = K_{RL}A_{01}, \\ A_{21} &= \left(\frac{-\gamma_2\beta_1 + \gamma_1\beta_3}{\gamma_2\beta_1 - \gamma_1\beta_2} \right), \quad A_{31} = -\frac{2}{K_{LL}}A_{21}, \end{aligned}$$

$A_1: m=n=1$ 에 대하여 (14)를 만족하는 정규화계수

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \left(1 + \frac{1}{K_{RR}} + \frac{1}{K_{RL}} \right), \\ \beta_2 &= \left(1 + \frac{2}{K_{RR}} \right), \quad \beta_3 = \left(1 + \frac{3}{K_{RR}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{1}{K_{RL}} - \frac{1}{2} + \bar{P} \left(\frac{1}{K_{LR}} + \frac{1}{K_{LL}K_{RL}} + \frac{1}{K_{LR}K_{RL}} \right), \\ \gamma_2 &= 2t^2 - \frac{1}{3} + 2(1 - \bar{P}t^2) \left(\frac{1}{K_{LL}} + \frac{1}{K_{LR}} \right) + \frac{\bar{F}}{K_{LR}}, \\ \gamma_3 &= 3t^2 - \frac{1}{4} + \frac{\bar{P}}{K_{LR}} + \frac{6(1 - \bar{P}t^2)}{K_{LR}} \end{aligned}$$

$$\Psi_2(\xi) = A_2(A_{02} + A_{12}\xi + A_{22}\xi^2 + A_{32}\xi^3 + \xi^4) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Y_2(\xi) &= A_2 l \left[A_{42} + (A_{02} - 2t^2 A_{22})\xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(A_{12} - 6t^2 A_{32})\xi^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}(A_{22} - 12t^2)\xi^3 + \frac{1}{4}A_{32}\xi^4 + \frac{1}{5}\xi^5 \right] \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{02} &= \left(-\frac{A^*}{K_{RL}B^*}e_1 + \frac{e_2}{K_{RL}} \right), \quad A_{12} = \left(-\frac{A^*}{B^*}e_1 + e_2 \right), \\ A_{22} &= \left(-\frac{A^*}{B^*}e_3 + e_4 \right), \quad A_{32} = -\frac{A^*}{B^*}, \\ A_{42} &= \frac{2}{K_{LL}} \left(\frac{A^*}{B^*}e_3 - e_4 \right), \end{aligned}$$

$A_2: m=n=2$ 에 대하여 (14)를 만족하는 정규화계수

$$\begin{aligned} A^* &= \int_0^1 \left\{ \left[-\frac{2e_4}{K_{LL}} + \left(\frac{e_2}{K_{RL}} - 2t^2 e_4 \right)\xi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}e_2\xi^2 + \frac{1}{3}(e_4 - 12t^2)\xi^3 + \frac{1}{5}\xi^5 \right] \frac{Y_1}{l} \right. \\ &\quad \left. + r^2 \left[\frac{e_2}{K_{RL}} + e_2\xi + e_4\xi^2 + \xi^4 \right] \Psi_1 \right\} d\xi, \\ B^* &= \int_0^1 \left\{ \left[-\frac{2e_3}{K_{LL}} + \left(\frac{e_1}{K_{RL}} - 2t^2 e_3 \right)\xi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(e_1 - 6t^2)\xi^2 + \frac{1}{3}e_3\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4 \right] \frac{Y_1}{l} \right. \\ &\quad \left. + r^2 \left[\frac{e_1}{K_{RL}} + e_1\xi + e_3\xi^2 + \xi^3 \right] \Psi_1 \right\} d\xi, \end{aligned}$$

$$e_i = \frac{1}{(\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1)} \begin{cases} (\gamma_2\beta_3 - \gamma_3\beta_2), i=1 \\ (\gamma_3\beta_1 - \gamma_1\beta_3), i=2 \\ (\gamma_2\beta_4 - \gamma_4\beta_2), i=3 \\ (\gamma_4\beta_1 - \gamma_1\beta_4), i=4 \end{cases}$$

$\gamma_i, \beta_i, i=1,2,3$: (15)에서와 같음.

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= 4t^2 - \frac{1}{5} + \frac{\bar{P}}{K_{LR}} + \frac{12(1 - \bar{P}t^2)}{K_{LR}}, \\ \beta_4 &= 1 + \frac{4}{K_{RR}}. \end{aligned}$$

$k=3,4,\dots$ 에 대해

$$Y_k(\xi) = A_k[(\xi - B_k)Y_{k-1}(\xi) - C_k Y_{k-2}(\xi)] \quad (17)$$

$$\Psi_k(\xi) = A_k[(\xi - B_k)\Psi_{k-1}(\xi) - C_k \Psi_{k-2}(\xi) + Y_{k-1}(\xi)]$$

여기서

$$B_k = \int_0^1 \xi(\rho A Y_{k-1}^2 + \rho I \Psi_{k-1}^2) d\xi$$

$$C_k = \int_0^1 \xi(\rho A Y_{k-1} Y_{k-2} + \rho I \Psi_{k-1} \Psi_{k-2}) d\xi$$

$A_k: m=n=k$ 일 때 (14)를 만족하는 정규화계수.

3.2 고유진동

중간구속조건이 있는 경우의 진동과형을 다음과 같이 가정한다.

$$Y(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i Y_i(\xi), \quad \Psi(\xi) = \sum_{j=1}^n c_j \Psi_j(\xi) \quad (18)$$

여기서 $Y_i(\xi), \Psi_j(\xi), i, j=1, 2, 3, \dots, n$ 은 특성다항식 또는 기준계의 고유함수이다.

Fig.1에서 보인 계의 Rayleigh quotient $R(Y, \Psi)$ 산정에 있어서 최대변형에너지 V_{max} 와 기준운동에너지 $T^*(=T_{max}/\omega^2)$ 산식은 다음과 같다.

$$V_{max} = \frac{EI}{2l^3} \left\{ \int_0^1 \Psi'^2 d\xi + \int_0^1 \frac{1}{\xi^2} (Y' - \Psi)^2 d\xi \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^n K_{Li} Y^2|_{\xi=\xi_{Li}} + \sum_{j=1}^n K_{Rj} \Psi^2|_{\xi=\xi_{Rj}}$$

$$+ K_{LL} Y^2|_{\xi=0} + K_{RL} \Psi^2|_{\xi=0} + K_{LR} Y^2|_{\xi=1}$$

$$+ \left. K_{RR} \Psi^2|_{\xi=1} - \bar{P} \int_0^1 Y'^2 d\xi \right\}$$

$$\equiv \frac{EI}{2l^3} \bar{V}_{max} \quad (19)$$

$$T^* = \frac{\rho A l}{2} \left\{ \int_0^1 Y^2 d\xi + \int_0^1 r^2 \Psi^2 d\xi \right.$$

$$+ \left. \sum_{k=1}^n M_k Y^2|_{\xi=\xi_{mk}} \right\}$$

$$\equiv \frac{\rho A l}{2} \bar{T}^* \quad (20)$$

$R(Y, \Psi) = V_{max}/T^*$ 의 극소치 즉, $\min. R = \omega^2$ 에 대해 (5)에 정의된 진동수파라미터 b^2 을 도입할 때 Ritz 시스템화 고유치문제는

$$\frac{\partial \bar{V}_{max}}{\partial a_i} - b^2 \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_{max}}{\partial c_j} - b^2 \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

의 연산결과를 매트릭스 형식으로 정리하므로써 다음과 같이 정식화될 수 있다.

$$[K - b^2 M] \{X\} = \{0\} \quad (22)$$

3.3 동특성 감도

설계변수 변경에 따른 고유치 및 고유벡터의 감도를 직접미분법(예로서 9, 10)에 의해 구한다.

(22)를 r 차 고유진동에 대해 기술하면

$$[K] \{X\}_r = b_r^2 [M] \{X\}_r \quad (23)$$

와 같고, 정규화직교관계식은 다음과 같다.

$$\{X\}_r^T [M] \{X\}_r = \delta_{rr}$$

$$\{X\}_r^T [K] \{X\}_r = b_r^2 \delta_{rr} \quad (24)$$

여기서 δ_{rr} 는 Kronecker delta 이다.

설계변수 $v_j, j=1, 2, \dots, p$ 의 변경에 따른 r 차 고유치 b_r^2 의 감도 $b_{r,j}^2$ 는 (23)을 v_j 에 관해 미분하고 $[M]$ 및 $[K]$ 의 대칭성과 (24)를 원용하므로써

$$b_{r,j}^2 = \{X\}_r^T ([K]_{,j} - b_r^2 [M]_{,j}) \{X\}_r \quad (25)$$

와 같이 표현된다. 여기서, j 는 v_j 에 관한 미분을 뜻한다.

r 차 고유벡터 $\{X\}_r$ 의 v_j 에 대한 감도 $\{X\}_{r,j}$ 는 전개정리를 원용

$$\{X\}_{r,j} = \sum_{i=1}^N a_{rj,i} \{X\}_i \quad (26)$$

과 같이 나타낸다. 여기서 N 는 $[M]$ 및 $[K]$ 의 차수이고, $a_{rj,i}$ 는 (24)를 원용하므로써

$$a_{rj,i} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \{X\}_r^T [M]_{,j} \{X\}_r, & s = r \\ \frac{\{X\}_r^T ([K]_{,j} - b_r^2 [M]_{,j}) \{X\}_r}{b_r^2 - b_i^2}, & s \neq r \end{cases} \quad (27)$$

과 같이 산정된다.

따라서 설계변수 ν_j 의 변경 $\delta \nu_j$ 에 대한 고유치 및 고유벡터의 변화량은 설계변경량이 작다고 가정하면

$$\begin{aligned} \Delta b_r^2 &\approx \sum_{j=1}^p b_{r,j}^2 \delta \nu_j \\ \Delta \{X\}_r &\approx \sum_{j=1}^p \{X\}_{r,j} \delta \nu_j \end{aligned} \quad (28)$$

에 의해 추정될 수 있다.

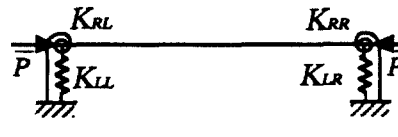
4. 수치계산에 및 고찰

3.1에 기술된 특성다항식을 이용한 Rayleigh-Ritz 해석의 수치계산 예를 Table 1에 보였다. (a)는 기준계에 대해 엄밀해와 비교한 것이고, (b)는 중간구속조건이 있을 때 엄밀해 및 기준계의 고유함수이용 Rayleigh-Ritz 해석 결과와 비교한 것이다. 진동파형에 대해서는 1차 및 2차 진동형만을 Fig.2에 보였다.

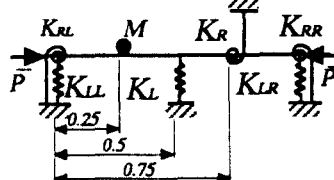
Table 1 Comparison of numerical results of the frequency parameter $b [= \omega^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}]$

(steel beam of 25.4 mm square \times 366 mm $\frac{E}{G} = \frac{8}{3}$, $K = \frac{\pi^2}{12}$, $r^2 = 3.6 \times 10^{-3}$, $t^2 = 11.7 \times 10^{-3}$)

: same as in [2])

Order	Exact sol.	R-Ritz method : polynomials, n=10 in (18)	System
1	13.82	13.82	 <p> $K_{LL}=K_{LR}=1000.0$ $K_{RL}=K_{RR}=10.0$ $\bar{P} = 1.0$ </p>
2	33.00	33.00	
3	55.52	55.52	
4	79.33	79.41	
5	104.34	104.35	

(a)

Order	Exact sol.	R-Ritz method : eigenfunc. n=15 in (18)	R-Ritz method : polynomials n=15 in (18)	System
1	9.72	9.84	9.85	 <p> $K_{LL}=K_{LR}=1000.0$ $K_{RL}=K_{RR}=5.0$ $M = 2.0$ $K_L=200.0$ $K_R=2.0$ $\bar{P} = 1.0$ </p>
2	26.69	26.80	26.81	
3	54.58	54.93	54.94	
4	78.29	78.72	78.77	
5	87.32	89.79	89.95	
Time 1*		48.33	5.16	<p>* CPU time in sec. for constructing [K] and [M] ** CPU time in sec. for solving the eigenvalue problem (IBM PC/AT)</p>
Time 2**		92.05	91.17	
Total		104.38	96.33	

(b)

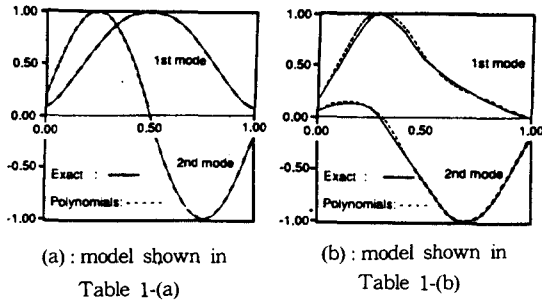


Fig. 2 Comparisons of mode shapes between Rayleigh-Ritz analysis and exact solutions

Table 1-(a) 즉, 기준계에 대해서 특성다항식을 이용하여 Rayleigh-Ritz 해석한 결과는 (18)의 중첩항수 10으로 엄밀해와 거의 일치하고 있고, Table 1-(b)인 경우 중첩항수 15로 4차 진동형까지 오차 1퍼센트 미만, 5차 진동형에서 오차 약 3퍼센트이다. Table 1-(b)에는 IBM PC/AT를 사용했을 때의 CPU time도 보였는데, 특성다항식 이용 때는 기준계의 고유함수 이용 때와 비교하여 대등한 계산정확도이면서, 계산소요시간이 약 30 퍼센트 절감되고 있는데, 구속조건이 많아질수록 절감비율이 커진다. 고유진동과형에 있어서는 Fig.2에 보인 바와 같이 특성다항식 이용 결과가 엄밀해와 거의 대등하다.

Table 2 The first order sensitivity of frequency parameter $b [= \omega^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}]$: model shown in Table 1-(b)

Order	Trial func.	Design variables						
		M	K _L	K _R	K _{LL}	K _{RL}	K _{LR}	K _{RR}
1	P*	-2.113	0.006	0.020	0.000	0.099	0.000	0.005
	E*	-2.111	0.006	0.019	0.000	0.100	0.000	0.005
2	P	-0.135	0.018	0.034	0.000	0.000	0.001	0.251
	E	-0.135	0.018	0.034	0.000	0.000	0.001	0.251
3	P	-0.201	0.020	0.280	0.001	0.000	0.003	0.045
	E	-0.202	0.020	0.280	0.001	0.000	0.003	0.045
4	P	-0.118	0.000	0.176	0.009	0.002	0.003	0.000
	E	-0.123	0.000	0.176	0.009	0.002	0.003	0.000
5	P	-0.689	0.003	0.144	0.005	0.001	0.005	0.008
	E	-0.694	0.003	0.142	0.005	0.001	0.005	0.008
time** (sec.)	P	27.8 in total						
	E	90.9 in total						

* P : using polynomials, E: using base system eigenfunctions

** CPU time using IBM PC/AT

Table 3 Comparisons of changes of frequency parameter $b [= \omega^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}]$ between ordinary reanalysis and prediction using first order sensitivity : model shown in Table 1-(b)

Order	Method.	δM				δK_L				δK_R			
		10 %		30 %		10 %		30 %		10 %		30 %	
		*	**	Reana.	Predi.	Reana.	Predi.	Reana.	Predi.	Reana.	Predi.	Reana.	Predi.
1		0.452	0.423	1.577	1.268	0.133	0.125	0.453	0.376	0.004	0.004	0.021	0.020
2		0.030	0.027	0.155	0.081	0.365	0.355	1.157	1.066	0.007	0.007	0.036	0.034
3		0.044	0.040	0.165	0.120	0.395	0.394	1.185	1.183	0.057	0.056	0.297	0.280
4		0.026	0.024	0.094	0.071	0.003	0.003	0.008	0.008	0.036	0.035	0.186	0.176
5		0.152	0.138	0.577	0.413	0.059	0.060	0.176	0.179	0.029	0.029	0.148	0.144

* Ordinary reanalysis using polynomials

** Prediction using 1st order sensitivity based on polynomials

Fig.2에 나타내지 않았으나 3,4,5차 진동형에 있어서도 매우 유사함이 확인되었다.

감도해석에 관련해서는 Table 1-(b)에 보인 계를 기준으로 중간구속 및 양단탄성구속도를 설계변수로 택해 비교목적으로 특성다항식을 이용한 경우와 기준계 고유함수를 이용한 경우의 진동수파라미터 $b=\omega^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ 의 1차 감도를 계산했으며, 동 결과를 Table 2에 보였다. 양자의 감도계산 결과는 거의 같은 값이고, 특성다항식 이용 때의 계산시간이 기준계의 고유함수 이용 때의 약 1/3에 불과하다. 감도해석에 있어서는 설계변수에 대한 계의 특성매트릭스의 미분매트릭스의 반복적 형성이 필요하고, 이에 소요되는 계산시간이 전체 계산시간의 대부분을 차지하게 되므로 특성다항식을 이용할 경우의 계산시간 절감이 진동해석 때보다 훨씬 커진다.

1차 감도의 유용성을 확인하기 위하여 Table 2에 보인 설계변수중 M, K_L, K_R 에 대해서 각기 설계변경전 값의 10 퍼센트, 30 퍼센트, 50 퍼센트 변화시켰을 때 1차 감도를 사용한 $b=\omega^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ 의 변화량 추정치를 통상적 재해석 결과와 비교한 것이 Table 3이다. 이는 Table 1-(b)의 그림에서 보는 바와 같이 $M=2.0, K_L=1000.0$, 및 $K_R=2.0$ 을 기준으로 구한 것인데, 1차 감도를 사용한 추정치가 M 에 대해서는 변경량 10 퍼센트 때 오차 10 퍼센트 이내이고, K_L 에 대해서 변경량 10 퍼센트 때, K_R 에 대해서 50 퍼센트 때 오차 5 퍼센트 이내임이 확인된다.

5. 결 론

중간구속조건을 갖는 Timoshenko 보-기둥에 대해서 양단경계조건을 병진스프링 및 회전스프링 구속으로, 중간구속조건을 임의 갯수의 병진스프링·회전스프링·집중질량으로 일반화하고 Hamilton 원리 및 Laplace 변환방법을 응용한 엄밀해법을 제시했으나 연산부담이 매우 커서 직접적인 설계 적용에는 비효율적이다. Rayleigh-Ritz 해석에 있어서도 기준계의 고유함수를 이용할 경우 연산부담이 역시 크다.

이에 비해 본 연구에서 제시한 특성다항식을 이용할 경우 전자와 대등한 정확도의 해를 보장하면서 연산운용이 간편할 뿐만 아니라 계산시간이 매우 크게 절감된다.

중간구속조건을 변경량에 따른 고유진동수 변화량을 다항식 이용 1차 감도를 사용하여 추정한 결과는

변경량이 그다지 크지 않은 경우 통상적 재해석에 의한 결과와 부합성이 양호하다.

후 기

이 논문은 1990년도 한국과학재단 목적기초연구관리번호 90-02-00-02-03의 일부이다. 이 기회에 동 재단에 심심한 사의를 표한다.

참 고 문 헌

- [1] 이종문, 이순홍, 김극천, "다양한 중간구속조건을 갖는 양단탄성구속 보-기둥의 진동해석", 대한조선학회 논문집, 28권 2호, 1991.
- [2] Grant, D.A., "The Effect of Rotary Inertia and Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams Carrying a Concentrated Mass", *Jr. of Sound and Vibration*, Vol.57, 1978.
- [3] Kounadis, A.N., "On the Derivation of Equations of Motion for a Vibrating Timoshenko Column", *Jr. of Sound and Vibration*, Vol.73, 1980.
- [4] Abbas, B.A.H., "Vibration of Timoshenko Beams with Elastically Restrained Ends", *Jr. of Sound and Vibration*, Vol.97, 1984.
- [5] Gutierrez, R.H., Laura, P.A.A. and Rossi, R.E., "Fundamental Frequency of Vibration of a Timoshenko Beam of Non-Uniform Thickness", *Jr. of Sound and Vibration*, Vol.145, 1991.
- [6] Bhat, R.B., "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", *Jr. of Sound and Vibration*, Vol.105, 1986.
- [7] 정정훈, "Timoshenko 보함수 성질을 갖는 다항식을 이용한 Mindlin 관류추 구조계의 진동해석", 서울대 공대 박사학위 논문, 1991.
- [8] Conte, S.D. and Boor, C., *Elementary Numerical Analysis*, Mcgraw Hill Book Comp., 1981.
- [9] Fox, R.L. and Kapoor, M.P., "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", *Jr. AIAA*, Vol.6, 1968.
- [10] Hang, E.J., Choi, K.K. and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, New York, 1986.