
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 30 卷 第 1 號 1993 年 2 月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 30, No.1, February 1993

비선형 조파현상의 수치해법

김장환*, 배광준**

A Numerical Method for Nonlinear Wave-Making Phenomena

by

Jang Whan Kim* and Kwang June Bai**

요 약

본 논문에서는 비선형 자유표면파 문제에 대한 수치해법을 개발하였다. 궁극적인 물리적 모델은 수조시험에서의 조파저항 실험으로서 이를 모사하는 수치실험을 위한 수치해법을 개발하는데 그 목적이 있다.

수치해법으로서는 선형 문제에서 이미 수치방사조건의 효율성이 입증된 국소유한요소법을 비선형 문제에 응용하였다. 수치 계산과정에서는 교란원인 압력 분포면으로부터 멀리 떨어진 곳에서는 선형해를 이용하고 교란원 근처에서는 엄밀한 비선형 조건을 만족시켰다. 비선형 영역과 선형 영역 사이에는 비선형-선형 천이 완충영역을 수치 계산영역 내에 도입하여 적절히 수치정합을 하였다. 수치 계산 과정중 각 축차 단계에서의 모드 해석을 이용하여 계산 시간을 월등히 줄일 수 있었다.

수치 계산 모형으로는 수조 실험을 모사한 자유표면 압력 분포면이 균일한 속도로 전진하는 문제를 택하였다. 본 수치계산 방법의 효율성으로 인하여 기존의 수치 계산 방법에 비해 월등이 큰 계산영역을 사용 수치계산을 수행할 수 있었다. 교란원에서 먼 하류에서 채택된 비선형 자유표면파를 선형 계산 결과와 비교하여 그동안 부분적으로 연구된 비선형파의 특성을 규명할 수 있었다. 비선형 효과에 의해 켈빈각이 증가하며, 켈빈각 근처의 파고와 파수가 증가하는 것을 확인하였다.

발 표: 1992년도 대한조선학회 춘계연구발표회('92. 4. 18.)

접수일자: 1992년 5월 20일, 재접수일자: 1992년 10월 16일

* 서울대학교 조선해양공학과

** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

大韓造船學會論文集 第30卷 1號 1993年 2月

Abstract

A numerical method for nonlinear free-surface-wave problem is developed in this paper. The final goal of this study is to simulate the towing tank experiment of a ship model and to partially replace the experiment by the numerical model.

The exact problem in the scope of potential flow theory is formulated by a variational principle based on the classical Hamilton's principle. A localized finite element method is used in the present numerical computations which made use of the following two notable steps. The first step is an efficient treatment of the numerical radiation condition by using the intermediate nonlinear-to-linear transition buffer subdomain between the fully nonlinear and linear subdomains. The second is the use of a modal analysis in the final stage of the solution procedures, which enables us to reduce the computation time drastically. With these improvements the present method can treat a much larger computational domain than that was possible previously.

A pressure patch on the free surface was chosen as an example. From the present computed results we could investigate the effect of nonlinearity on the down-stream wave pattern more clearly than others, because much larger computational domain was treated. We found, specifically, the widening of the Kelvin angle and the increase of the wave numbers and the magnitude of wave profiles.

1. 서 론

자유표면 근처에서 일정한 속도로 항진하는 선체에 의해 발생하는 자유표면파 및 이에 의해 선체가 받는 동유체력을 해석하는 조파저항 문제는 선박 유체역학의 오랜 관심사 중의 하나였다. 이 문제는 이상유체의 가정 내에서 주로 다루어져왔고 이에 따른 유체 유동의 지배방정식은 그 성질이 잘 알려진 Laplace 방정식이다. 그러나 이 문제에서는 해석해야 할 유체영역을 해의 일부로 구해야하는 어려움 때문에 몇몇 특별한 경우를 제외하고는 해석적인 방법을 통한 엄밀한 해의 도출이 불가능하다. 이에 따라 과거에는 주로 자유표면조건을 선형화한 문제를 다루어왔다.

최근에 들어서 전산기의 발달과 더불어 수치적인 방법에 의한 비선형파에 대한 해석이 시도되고 있다. 이러한 수치방법으로서의 소오스 분포법, 유한차분법, 유한요소법 그리고 고차 스펙트랄방법을 들 수 있다. 이들 중 조파저항문제에 주로 응용되는 방법은 소오스 분포법이다. 소오스 분포법은 이중모형(double body) 주위의 속도장에 대해 자유표면조건을 선형화하고 상류차분법을 이용한 수치방사조건을 도입한 Dawson의 방법(Dawson, 1977)을 확장한

것으로 최근에 많은 연구들이 이루어지고 있다(Ni, 1987; Kim and Lucas, 1990). 그러나 이들방법에서는 상류차분법이 수치 감쇄를 유발하여(Scavounos and Nakos, 1988) 계산된 파형에서 발산파를 잘 볼 수 없는 단점이 있고 수치해가 요소의 크기에 크게 좌우되는 단점이 있어 보다 나은 수치방사조건이 요구되고 있다.

선형 조파저항 문제에 대해서는 Bai(1977)가 국소 유한요소법을 고안해서 수치감쇄 없이 방사조건을 만족하는 수치해법을 개발한 바 있다. 본 논문에서는 이 방법을 비선형 문제에 확장시켜 3차원 물체의 조파저항 문제에 대한 효과적인 수치 해법을 개발하였다. 즉, 물체 근처의 자유표면에서는 자유표면 경계조건으로서 종래의 선형화조건은 적절치 않으므로 물체 근처의 국부 유체영역(local fluid domain)에서는 비선형 경계조건을 수치적으로 엄밀히 만족하는 해법을 개발하였다. 수치 방사조건으로는 계산 영역에서의 해를 모드해석(modal analysis)에 의해 파동항(wave term)과 국부항(local term)으로 분리하여 전자의 경우는 초기치 문제로, 후자의 경우는 경계치 문제로 해석하는 방법을 사용하였다.

비선형 영역에서의 계산효율을 높이기 위하여 비선형 경계치문제를 두 단계의 축차 과정과 좌표변

환을 통하여 상자형 계산영역에서의 일반적인 형태의 Neumann-Kelvin문제로 변환하였다. 이렇게 하여 변환된 선형문제는 모드해석법에 의해 수식상으로 역변환하여 수치계산에서의 행렬 역변환 과정을 제거하였다.

비선형파가 발생하는 물리적인 모델로서는 자유표면에 작용하는 압력 분포면을 다루었다. 압력분포면에 의해 발생하는 후류의 파형은 선체에 의한 파형과 일반적인 성질의 차이가 없으므로, 압력분포면의 계산결과는 일반적인 후류파형에서의 비선형효과를 보여준다. 계산 결과로부터 본 수치 계산 방법이 방사조건을 잘 만족함을 확인하였으며 비선형효과가 압력면 하류의 Kelvin 파형에 미치는 영향을 보다 확실히 관측할 수 있었다. 계산된 파형으로부터 후류 Kelvin 파형이 비선형성에 의하여 Kelvin각 및 Kelvin각 근처의 파고와 파수가 증가하는 현상이 관찰되었다.

2. 문제의 정식화

본 논문에서는 수치 수조 실험(numerical towing-tank experiment)을 위한 모델로서 수심이 h, 폭이 2W인 직사각형 단면의 수조 내에 있는 비점성, 비압축성 유체의 비회전성 유동을 생각한다. 또한 자유표면에서의 표면장력도 무시한다. 좌표계는 xy평면이 정수면과 일치하고 z축이 중력과 반대방향으로 향하는 직교좌표계 Oxyz를 사용한다. 양의 x방향으로 흐르는 유속 U의 균일류와 자유표면상의 압력 분포면 P(x,y)에 의해 발생하는 자유표면의 파형 및 교란속도장함수를 $\zeta(x,y)$ 와 $\phi(x,y,z)$ 로 각각 정의한다. 잘 알려진 바와 같이 함수 $\phi(x,y,z)$ 는 지배방정식인 라플라스 방정식과 각 경계면에서의 경계조건들로 형성되는 경계치 문제의 해로 표현된다. 특히 자유표면에서의 비선형 경계조건이 주어지며, 무한원방에서는 교란원에 의한 자유표면의 교란이 하류쪽으로만 전파된다는 방사조건이 만족되어야 한다.

비선형 조파저항 문제의 해석상 어려운 점은 자유표면조건의 비선형성과 방사조건이 정확한 수식형태로 주어지지 않는다는 점이다. 이러한 어려움들은 구간별선형화계수 $\epsilon(x,y)$ 를 도입, 자유표면 조건의 비선형성을 구간에 따라 인위적으로 약화시켜 비선형해를 해석이 용이한 선형해와 정합하는 방법을 통해 해결될 수 있다. 수조벽면 및 자유표면에서의 유체의 바깥방향 법선 벡터를 $\vec{n}=(n_x, n_y, n_z)$ 로 정의하

고 유체의 밀도를 ρ , 중력 상수를 g라하면 풀어야 할 경계치 문제는 다음과 같다.

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h < z < \epsilon \zeta, \quad |y| < W; \tag{1}$$

$$U \zeta_x = \bar{\phi}_n, \tag{2}$$

$$g \zeta = -U \bar{\phi}_x - P(x,y)/\rho + \epsilon F[\bar{\phi}, \bar{\phi}_n, \epsilon \zeta], \tag{3}$$

$$\phi_n = 0, \quad z = -h, \quad |y| = W; \tag{4}$$

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty; \tag{5.a}$$

$$|\nabla \phi| < \infty, \quad x \rightarrow +\infty, \tag{5.b}$$

여기서 자유표면 상에서 정의되는 변수 $\bar{\phi}, \bar{\phi}_n$ 는

$$\bar{\phi}(x,y,t) = \phi(x,y,\epsilon \zeta,t), \tag{6.a}$$

$$\bar{\phi}_n(x,y,t) = \phi_n(x,y,\epsilon \zeta,t)/n_z(\zeta) \tag{6.b}$$

와 같이 자유표면에서의 속도 포텐셜 값 및 xy평면의 면적요소로 정규화(normalize)한 자유표면에서의 유량으로 정의되며 자유표면 조건의 비선형 항을 나타내는 연산자 F와 관련된 항들은

$$F(\bar{\phi}, \bar{\phi}_n, \zeta) = 1/2 \{ n_z^2(\zeta) (\bar{\phi}_n + \nabla_s \zeta \cdot \nabla_s \bar{\phi})^2 - \nabla_s \bar{\phi} \cdot \nabla_s \bar{\phi} \}, \tag{7.a}$$

$$n_z(\zeta) = 1/(1 + \nabla_s \zeta \cdot \nabla_s \zeta)^{1/2}, \tag{7.b}$$

$$\nabla_s = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}). \tag{7.c}$$

와 같이 정의된다.

자유표면 경계조건 (2), (3)은 선형화 계수 $\epsilon(x,y)$ 이 1인 경우 비선형 자유표면 경계조건을, 0인 경우 선형화된 자유표면 경계조건을 나타낸다. 선형화 계수 $\epsilon(x,y)$ 의 값에 따라 유체영역 D는

$$\begin{aligned} D_N : \epsilon(x,y) &= 1; \\ D_B : 0 < \epsilon(x,y) < 1; \\ D_L : \epsilon(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

으로 정의되는 비선형 영역 D_N 과 선형 영역 D_L 그리고 이 두 영역을 연결하는 비선형-선형 완충영역 D_B 로 분할된다. 함수 $\epsilon(x,y)$ 을 적절히 택하면 비선형해와 선형해의 정합이 가능하다. 이 방법은 이미 2차원 정상 상태의 조파저항 문제의 해석에 성공적으로 적용된 바 있다(Lee, 1990). 정합된 선형해의 수치방사조건에 대해서는 제4장에서 자세히 다루기

로 한다.

3. 축차해법

비선형 조파저항 문제는 경계조건과 계산영역의 비선형성을 적절한 방법에 의해 선형화하고, 이 선형 문제를 수치해가 수렴할 때까지 반복해서 계산하는 축차 해법에 의해 풀 수 있다. 자유표면조건 (2), (3)을 그대로 사용할 경우 자유표면 조건에 나타나는 일계도함수 항들인 ϕ_x, ζ_x 항들로 인한 수치해의 안정성 문제 때문에 수치감쇄의 도입이 불가피하다 (Hughes and Brook, 1982; Kim, 1991). 수치 감쇄를 도입하지 않고 수치해의 안정성을 도모하는 방법으로서, 동력학적 경계조건을 운동학적 경계조건에 대입하여 일계도함수 항을 이계도함수 항으로 대체하는 방법을 이용하였다. 즉 경계조건 (2)를

$$\bar{\phi}_n = -\frac{U^2}{g} \bar{\phi}_{xx} + \frac{U}{g} \left(-\frac{P(x,y)}{\rho} + \epsilon F[\bar{\phi}, \bar{\phi}_n, \epsilon \zeta] \right)_x \quad (9)$$

의 형태로 대체하였다. 이계도함수 항에 대해서는 유한요소법의 분산 오차가 그리 크지 않은 것으로 알려져 있다(Bai et al., 1989).

이 경계조건을 이용하여 수치계산에 사용된 축차 방법에서는 먼저 유체영역의 변화에 따른 비선형성과 자유표면조건식 자체의 비선형성을 준선형화한다. 이 과정을 통해 각 단계에서 풀어야 할 문제는 계산영역과 경계조건의 계수들이 전단계의 계산결과로부터 주어지는 선형 경계치 문제로 형성된다. 선형 문제의 효과적인 해법을 위하여 좌표변환을 통해 계산영역을 상자형으로 변환한 후 변환된 경계치 문제에서 나타나는 항들 중 전단계의 파형과 속도포텐셜의 값에 따라 변화하는 항들을 모두 강제항(forcing term)으로 처리하는 고정점축차해법(fixed point iteration)을 이용하였다. 좌표변환에서는 x와 y좌표는 그대로 두고 z좌표만을 선형변환시켜 새로운 좌표 z' 과 변환된 좌표계에서의 속도장함수 $\varphi(x,y,z')$ 를 다음과 같이 정의하였다.

$$z'(x,y,z) = \frac{h(z+h)}{h+\epsilon \zeta(x,y)} - h, \quad (10.a)$$

$$\phi(x,y,z) = \varphi(x,y,z'(x,y,z)). \quad (10.b)$$

최종적으로 풀어야 할 경계치 문제는 다음과 같이

고전적인 Neumann-Kelvin 문제의 일반적인 형태로 서술된다.

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{z'z'} = -q(x,y,z'), \quad -h < z' < 0, |y| < W; \quad (11)$$

$$\varphi_z + \nu \varphi_{xx} = f(x,y), \quad z' = 0; \quad (12)$$

$$\varphi_n = 0, \quad z' = -h, y = W; \quad (13)$$

$$|\nabla \varphi| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty; \quad (14.a)$$

$$|\nabla \varphi| \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (14.b)$$

여기서 ν 는 U^2/g 로 정의되며 지배 방정식 (11)의 우변의 강제항 $-q(x,y,z)$ 는 좌표변환에 따른 항이며, 자유표면 경계조건 (12)의 $f(x,y)$ 는 좌표변환 및 자유표면 조건의 비선형성에 의한 항들이다. 이 항들은 각 축차단계의 전단계에서 계산된 값들로부터 결정되며 다음과 같이 주어진다.

$$q(x,y,z') = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \varphi(x,y,z'(x,y,z)) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \varphi(x,y,z'), \quad (15.a)$$

$$f(x,y) = \frac{U}{g} \left(-\frac{P(x,y)}{\rho} + \epsilon F[\bar{\phi}, \bar{\phi}_n, \epsilon \zeta] \right)_x - \bar{\phi}_n(x,y) + \varphi_z(x,y,0) \quad (15.b)$$

경계치 문제 (11)-(14.b)는 유체영역 내에 밀도가 $q(x,y,z)$ 인 쏘오스가, 자유표면상에 x방향의 미분치가 $f(x,y)$ 와 같은 압력이 분포된 경우의 Neumann-Kelvin 문제로 해석할 수 있다.

4. 선형조파저항문제의 해석

경계치 문제 (11)-(13)은 다음과 같은 변분 원리로 대치할 수 있다. 즉 범함수 J 및 Lagrangian L을

$$J = \int L \, dx \quad (16.a)$$

$$L = \frac{1}{2} \int_{-W}^W \int_{-h}^0 (\nabla \phi \nabla \phi - 2q \phi) \, dydz - \int_{-W}^W \left(\frac{\nu}{2} \phi_x^2 + f \phi \right)_{z=0} \, dy \quad (16.b)$$

으로 정의하면 범함수 J에 대한 변분으로부터 방사 조건 (14.a,b)를 제외한 경계치 문제를 얻을 수 있다. 수치방사조건은 유체영역 전체를 유한요소법으로

이산화한 후, 이산화된 방정식을 푸는 과정에서 적용한다. 식 (16.a,b)와 이후의 식 전개에서의 표기의 편의를 위하여 변환된 좌표 z' 과 속도장함수 $\phi(x,y,z')$ 를 z 와 $\phi(x,y,z)$ 으로 대체한다.

계산영역의 간단한 기하학적 특성(상자형)을 이용하면 위 경계치 문제의 해를 변수 분리를 통해 쉽게 구할 수 있다. 식 전개의 편의 및 방사 조건의 용이한 적용을 위해 우선 영역이 제한된 y 및 z 방향으로의 이산화를 수행하여 속도장함수 $\phi(x,y,z)$ 를 N_y 개의 y 방향 근사 함수 $\{Y_j(y), j=1, \dots, N_y\}$ 와 N_z 개의 z 방향 근사 함수 $\{Z_k(z), k=1, \dots, N_z\}$ 를 이용하여

$$\phi(x,y,z) = \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} Y_j(y) Z_k(z) \phi_{jk}(x) \quad (17)$$

로 전개하면 Lagrangian L 에 대한 Euler-Lagrange 방정식으로 부터

$$\begin{aligned} -F_{ij}^y (F_{k1}^z - \nu D_{k1}) \phi'_{ji} & \quad (18) \\ + (G_{ij}^y F_{k1}^z + F_{ij}^y G_{k1}^z) \phi_{ji} & = -q_{ik}, \\ i=1, \dots, N_y, \quad k=1, \dots, N_z \end{aligned}$$

와 같은 연성된 연립 상미분 방정식을 얻는다. 위의 식 및 이하의 식 전개에 있어서 반복된 첨자에 대해서는 특별한 언급이 없는 한 합의 약정(summation convention)을 적용한다. 식 (18)의 행렬들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} F_{ij}^y &= \int_{-W}^W Y_i(y) Y_j(y) dy, \\ F_{k1}^z &= \int_{-h}^0 Z_k(z) Z_1(z) dz, \\ G_{ij}^y &= \int_{-W}^W Y_i'(y) Y_j'(y) dy, \\ G_{k1}^z &= \int_{-h}^0 Z_k'(z) Z_1'(z) dz, \\ D_{k1} &= Z_k(0) Z_1(0), \\ q_{ik}(x) &= \int_{-W}^W \int_{-h}^0 q(x,y,z) Y_i(y) Z_k(z) dz dy \\ & \quad + \nu \int_{-W}^W f(x,y) Y_i(y) Z_k(0) dy. \end{aligned} \quad (19.a-f)$$

연립 방정식 (18)은 감쇄가 없는 선형 진동계와 유사한 형태이며, 이들의 진동 해석에 주로 사용되는 모드해석 방법을 통해 연성되지 않은 독립된 1자유도계의 진동계 형태로 바꿀 수 있다. 또한 우리가 다루는 선형계의 경우 계수 행렬들이 y 방향 및 z 방향의 텐서곱(tensor product)의 형태로 주어지므로

각 방향의 모드 해석을 분리해서 해석할 수 있다. y 방향의 모드들은 코사인함수의 형태들로 표현된다. 각 y 방향 모드에 대한 z 방향 모드들은 한 개의 지수 함수 꼴과 나머지 N_z-1 개의 삼각 함수 형태들로 표현된다. 전자의 경우를 파동모드, 후자의 경우를 국부모드로 부르기로 한다. 이 모드들의 고유치 $\{\lambda_{ik}, i=1, \dots, N_y, k=1, \dots, N_z\}$ 들은 파동모드의 경우 음의값을, 국부모드의 경우 양의값을 가진다.

모드해석을 통해 방정식 (18)은 각 모드의 미분 방정식이

$$-\phi'' + \lambda \phi = q(x) \quad (20)$$

형태로 주어진다. 결국 원래 풀어야 할 경계치 문제는 변수분리 및 모드해석을 통하여 (20)식과 같은 x 방향의 상미분 방정식으로 변환되었다. 방사 조건 (14.a,b)를 만족시키는 각 모드의 상미분 방정식 (18)에 대한 조건식은 이 방정식의 제차해들의 특성으로부터 고유치 λ 의 부호에 따라 다음과 같은 경계 조건 혹은 초기조건으로 주어진다.

$$\lambda > 0: \phi'(x) \pm \sqrt{\lambda} \phi(x) = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (21.a)$$

$$\lambda < 0: \phi(x) = \phi'(x) = 0, \quad x \rightarrow -\infty \quad (21.b)$$

위와 같이 방사조건의 적용은 $\lambda > 0$ 인 국부모드와 $\lambda < 0$ 인 파동모드를 분리하여 개별적으로 처리할 것이 요구된다. Bai(1977)는 이 두 모드를 분리해서 처리하는 한 방법으로서, 무한 외부영역에서의 해를 파동 모드와 국부 모드로의 분리가 용이한 해석해로 전개하여 내부 영역의 수치해와 정합시켰다. 그러나 여기에서는 선형 문제를 푸는 과정에서 전 계산영역의 수치해를 두 모드로 분리해서 계산하므로 직접적인 수치 방사 조건의 적용이 가능하였다.

상미분 방정식 (20)은 유한요소법에 의해 쉽게 적분될 수 있다. 여기서는 등간격 요소 및 구간별 선형 내삽함수를 사용하였다. 이 경우 식 (20)을 이산화하여 얻어지는 행렬식은 수식상의 역변환이 가능하며 이로부터 재귀공식(recursion formula) 형태의 수치해를 얻을 수 있다(Kim, 1991).

이상과 같은 과정을 통해 선형 경계치문제 (11) - (14)의 유한요소법에 의한 수치해를 구하는 과정은 (i) 강제항의 모드 해석과 (ii) 각 모드의 x 방향 상미분 방정식의 적분 그리고 (iii) 구해진 각 모드를

원래의 속도 포텐셜로 역변환하는 과정으로 나누어진다. 이 과정에서 계산 시간의 대부분은 과정(i, iii)에 소요된다. x, y, z 각 방향의 절점수를 N_x, N_y, N_z 라 하고 총 절점수 $N_x N_y N_z$ 를 N_D 라 하면 앞의 과정에 필요한 연산량은 $O((N_y + N_z) N_D)$ 가 되어, 자유표면 만들 $N_x N_y$ 개의 요소로 분할하고 행렬의 역변환에 Gauss 소거법을 이용하는 소오스 분포법의 연산량 $O(N_x^3 N_y^3)$ 에 비해 수정횟수를 감안하더라도 매우 적은 양의 계산만을 필요로 하는 것을 알 수 있다.

5. 계산결과 및 고찰

이 장에서는 본 수치계산 방법의 실제 선형에 대한 적용에 앞서 자유표면 상에 분포된 반지름의 R인 원형 압력면에 대한 수치계산을 하였다. 계산에서는 본 연구에서 채택한 수치 방사 조건의 유효성 및 해의 수렴성을 계산 영역의 크기 및 요소 수를 늘여가며 검증하였다. 이후의 압력 분포면의 정의 및 수치계산 결과에서는 모든 물리량들을 유체의 밀도 ρ , 중력 가속도 g 그리고 압력면의 지름 $2R$ 으로 무차원화한다.

압력 분포면의 형태는 Dommermuth and Yue (1988)가 고차 스펙트랄 방법으로 비정상 해석을 한 것과 같은

$$P(r) = \begin{cases} P_{\max} \Pi(r/R), & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (22.a)$$

$$\Pi(s) = 1 - 462 s^6 + 1980 s^7 - 3465 s^8 + 3080 s^9 - 1386 s^{10} + 252 s^{11} \quad (22.b)$$

의 형태를 사용하였다. 여기서 r 은 압력 작용면의 중심 $x=x_c, y=0$ 로부터의 거리로 정의된다. 비선형 해와 선형해의 정합을 위한 선형화 계수 $\epsilon(x, y)$ 는

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} 1, & x < x_1 \\ \cos^2 \frac{\pi(x-x_1)}{2(x_2-x_1)}, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & x > x_2 \end{cases} \quad (23)$$

와 같이 하류에만 완충 영역을 두었다. 상류 측에는 완충 영역을 두지 않아도 계산에 지장이 없었다. 계산한 후루드수(F_N)는 Dommermuth and Yue와 같은 $F_N=0.4$ 를 택하였으며, 수조의 수심은 $h/2R=2$ 를 택하였다. 이 경우 선형 이론에 의한 파동향의

최대 파장이 수심의 0.5배 가량되어 수심의 효과는 무시할 수 있다. 깊이 방향의 요소 분할은 z방향의 요소수 $N_z=12$ 로 자유표면 근처를 더욱 작게 나누는 자승 분할을 사용하였으며, 수치계산에서의 수평 방향의 분할 및 계산 영역 그리고 완충 영역의 길이를 Table 1에 정리하였다. 여기서 L 은 계산영역의 길이이며 x_2-x_1 은 완충영역의 길이이다.

Table 1 Numbers and sizes of meshes used for the wave-resistance computations of a pressure patch

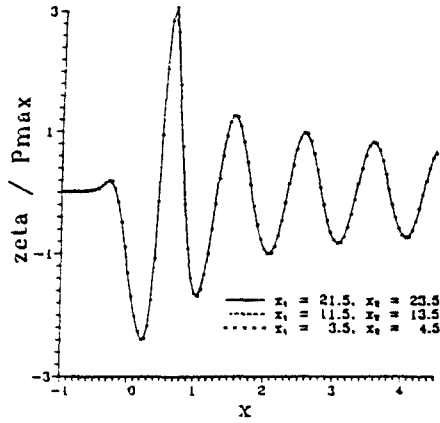
| | Δx or Δy | $L \times W$ | No. of Mesh | $x_2 - x_1$ |
|----|--------------------------|--------------|-------------|-------------|
| A1 | 0.05 | 6×3 | 86,400 | 1 |
| A2 | 0.05 | 15×7 | 504,000 | 2 |
| A3 | 0.05 | 25×12 | 1,440,000 | 3 |

먼저 본 방법의 수치 방사 조건을 검증하기 위하여 같은 요소의 크기를 가지고 계산영역의 크기를 변화시켜가며 계산한 Table 1의 A1, A2, A3의 세 가지 경우에 대한 파형을 비교하였다. 이때 $P_{\max}=0.015$ 이다. Fig.1에서는 중앙면($y=0$)에서의 파형들을 비교하였다. 비선형 영역에서의 파형은 세 경우 모두 정확히 일치하는 것을 볼 수 있다. 다만 완충 영역에서는 중앙 선상에 비해 파형의 차이가 비교적 큰 것을 볼 수 있다. Fig.2에서는 A1과 A2의 경우에 대한 조파저항을 도시하였다. 두 경우에서의 조파저항이 압력 면의 크기에 관계없이 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

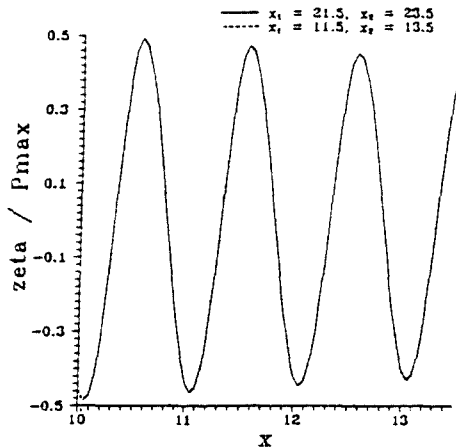
Fig.3에서는 압력 분포면에서의 직접 적분 방법에 의해 계산된 저항값과 x방향 선 운동량(linear momentum)

$$M_x(x) = \frac{1}{2} \int_{-W}^W \int_{-h}^0 (\phi_y^2 + \phi_z^2 - \phi_x^2) dz dy + \frac{1}{2} \int_{-W}^W \zeta^2 dy \quad (24)$$

를 도시하였다. 이 경우 압력면은 $x=1$ 과 $x=2$ 사이에 분포되었으며 완충 영역은 $x_1=5, x_2=6$ 으로 정의된다. 압력면에서의 적분으로 계산된 저항값에 비해 선 운동량의 계산에 의한 저항값이 약간 작은 값을 보이며 운동량의 평균선은 하류에서 거의 일정한 값을 갖는 것을 볼 수 있다. 이 경우 완충 영역의 영향은 운동량의 진동 폭만을 줄일 뿐 그 평균량을 잘 보존하는 것을 볼 수 있다. 이것은 본 방법의 선형화 계수 ϵ 이 파고 자체를 감소시키는 기존의 감쇄에 의한 방법과는 달리, 수치해의 비선형 성분만



(a) Wave elevations in $-1 < x < 4.5$



(b) Wave elevations in $10 < x < 13.5$

Fig. 1 Effect of buffer region on the wave elevations at $y=0$. The center of pressure patch is located at $x=0$

을 감소시키기 때문이라 판단된다.

Fig. 4에 Kelvin 각에서의 파형을 비선형성이 큰 $P_{max}=0.015$ 일 때의 해와 선형해를 함께 도시하였다. 이 그림으로부터 비선형 효과에 의해 파고와 파수가 증가하는 것을 볼 수 있다. Fig. 5에서는 $x-x_c=10, 20$ 에서의 파형의 횡단면을 도시하였다. 이 그림에서도 선형파와의 위상차가 하류로 갈수록 증가하며 비선형 효과에 의한 파고의 증가는 Kelvin 각 근방에 집중됨을 볼 수 있다. Fig 4, 5에서 볼 수 있는 비선형 효과는 Dommermuth and Yue의 계산결과와도 일치하며, 다척도 전개법을 이용한 비선형 해석으로도 같은 경향이 확인된 바 있다 (Kim, 1991).

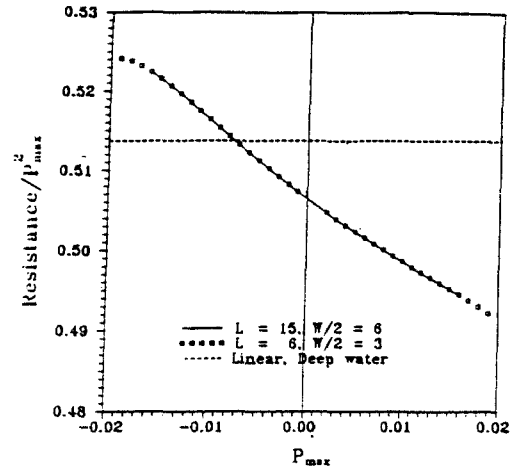


Fig. 2 Effect of the size of computational domain on wave resistance

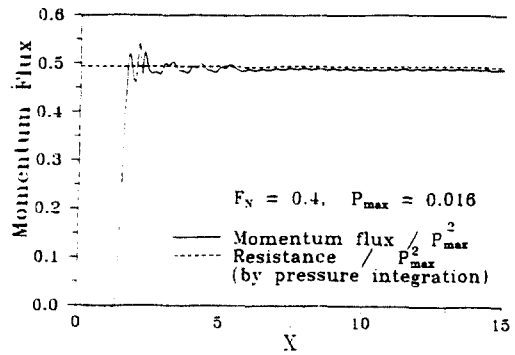


Fig. 3 Momentum flux ($x_1=5, x_2=6$)

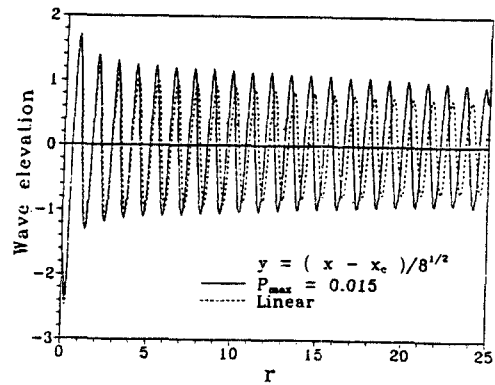


Fig. 4 Non-linear effect on wave profiles at the cusp line ($y=(x-x_c) / 2^{(3/2)}$)

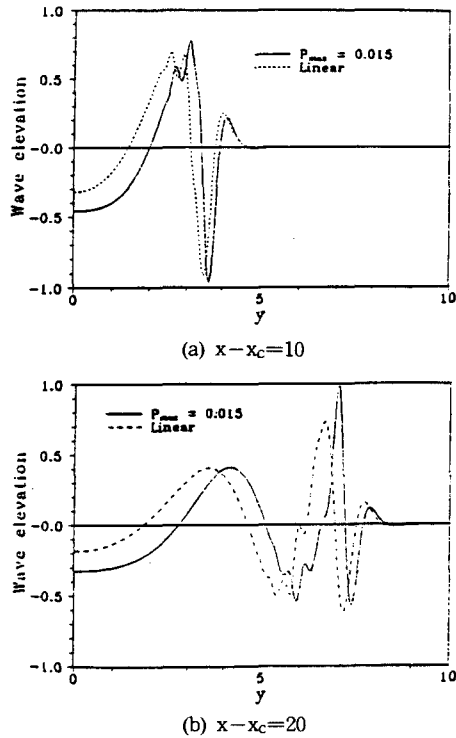


Fig. 5 Transverse cuts of the wave profiles

이상의 결과들을 종합해보면, 본 논문에서 도입한 수치방사조건의 처리방법이 비선형 조파저항 문제의 해법에 유용함을 알 수 있다. 특히 수치감쇄없이도 방사조건을 정확히 만족시키는 것이 가능하여 넓은 계산영역에서의 비선형파형 해석도 가능하다. 이는 기존의 비선형 수치계산에서는 수치 감쇄로 인하여 계산 영역의 크기에 제한이 따름에 비하여 본 방법의 하나의 장점이라 생각된다. 본 수치해법은 선형이 비대하지 않은 수학적 선형에 대해서는 이미 적용되어 실험결과와의 좋은 일치성을 보였다(Kim, 1991). 앞으로의 연구과제는 이 방법을 실선의 조파저항 계산으로 확장하는 것이다.

후 기

본 연구를 수행하는데 일부 한국과학재단 목적기초연구 및 포항공대 첨단유체공학연구센터의 Post Doctor 프로그램(첫번째 저자)에 의한 연구지원이 있었음을 밝혀둔다.

참 고 문 헌

[1] Bai, K.J., "A localized finite-element method

for steady three-dimensional free-surface flow problems", *Proc. 2nd. Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics*, Univ. of Calif., Berkeley, 1977.

- [2] Bai, K.J., Kim, J.W. & Kim, Y.H., "Numerical computations for a nonlinear free surface flow problem", *Proc. 5th Int. Conf. on Num. Ship Hydro.*, Hiroshima, Japan, pp.403-419. 1989.
- [3] Dawson, C.W., "A practical computer method for solving ship-wave problems", *Proc. 2nd. Int. Conf. Num. Ship Hydro.*, Berkeley, pp. 30-38, 1977.
- [4] Dommermuth, D.G. & Yue, D.K., "The nonlinear three-dimensional waves generated by a moving surface disturbance", *Proc. 17th Symp. Naval Hydro.*, The Hague, The Netherlands, pp.523-539. 1988.
- [5] Hughes, T.J.R. & Brook, A., "A theoretical framework of Petrov-Galerkin method with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwinding procedure", *Finite Elements in Fluids*, Vol.4, John Wiley & Sons Ltd., pp.47-65, 1982.
- [6] Kim, J.W., "A Numerical Method for Nonlinear Wave-Making Phenomena", Ph. D. Thesis, Seoul National University, College of Eng., Dep't of Naval Arch, 1991.
- [7] Kim, Y.H. & Lucas, T.R., "Nonlinear ship waves", *18th Symp. on Naval Hydro.*, Ann Arbor, Michigan, USA, pp.439-452. 1990.
- [8] Lee, H.S., "A Numerical Analysis of Two-Dimensional Free-Surface Flow Problem", M.S. Thesis, Seoul National University, College of Eng., Dep't of Naval Arch, 1990.
- [9] Ni, S.Y., "Higher order panel methods for potential flows with linear or non-linear free surface boundary conditions". *SSPA Report*, No.2912-4, 5, 6 Division of Marine Hydrodynamics, Goteborg, Sweden, 1987.
- [10] Sclavounos, P.D. & Nakos, D.E., "Stability analysis of panel methods for free-surface flows with forward speed", *Proc. 17th Symp. Naval Hydro.*, The Hague, The Netherlands, pp.173-193. 1988.