

論文93-30B-12-1

# 신호 파라미터의 ML 추정기법에 대한 에러 밀도 함수 모델에 관한 연구 I : 모델 정립

## (Error Intensity Function Models for ML Estimation of Signal Parameter, Part I : Model Derivation)

金 重 圭\*

(Joong Kyu Kim)

### 要約

본 논문에서는 관측신호에 포함된 특정 파라미터의 ML(Maximum Likelihood)추정기법에서 발생하는 추정에러를 분석하기 위한 에러 밀도함수에 대해 고찰하였다. 이를 위해서는 우선 추정에러를 point process로 표현하고 추정치의 조건 확률분포함수 및 point process로서의 추정에러에 대한 확률 분포함수를 구하게 된다. 그리고 추정값의 확률 밀도 함수로서 표현되는 에러 밀도함수에 대한 일반적 공식이 유도되는데, 이때 에러발생 후보지점(point)들을 모델링하는 방법에 따라서 여러가지 형태의 에러 밀도함수가 결정 될 수 있다. 이렇게 유도된 여러 종류의 에러 밀도함수에 대해서 각 모델간의 장단점에 대해서 살펴보았으며, 아울러 두개 이상의 신호 파라미터를 동시에 추정할 경우에 이러한 모델들을 적용하기 위한 확장성에 대해서도 고찰하였다.

### Abstract

This paper concentrates on models useful for analyzing the error performance of ML (Maximum Likelihood) estimators of a single unknown signal parameter: that is the error intensity model. We first develop the point process representation for the estimation error and the conditional distribution of the estimator as well as the distribution of error candidate point process. Then the error intensity function is defined as the probability density of the estimate and the general form of the error intensity function is derived. We then develop several intensity models depending on the way we choose the candidate error locations. For each case, we compute the explicit form of the intensity function and discuss the trade-off among models as well as the extendability to the case of multiple parameter estimation

### I. 서론

시간  $0 \leq t < T$  동안 관측된 신호에 포함된 파라미

터를 추정하기 위한 일반적인 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x_1(t) = s(t) + n_1(t) \\ x_2(t) = s(t; \theta) + n_2(t) \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (1)$$

\*正會員, 成均館 大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec., Eng., Sungkyunkwan Univ.)  
接受日字 : 1993年 5月 13日

여기서  $\theta$ 는 추정하고자 하는 신호 파라미터이며  $n_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ 는 비결합성(incoherent) 잡음성분을

의미한다. 이때 신호성분인  $s(t; \theta)$ 가 평균값이 0 이고 주파수대역폭  $B$ 를 갖는 랜덤신호(random process)일 경우와, 반면에  $\theta$ 를 제외한 신호특성을 미리 알고 있는 결정성 신호(deterministic signal)인 경우에 따라서, 관측환경은 각각 수동적(passive) 환경 및 능동적(active) 환경으로 구분되게 된다. 신호 파라미터를 추정하기 위한 알고리즘으로써, 능동적 환경하에서는 보편적으로 다음식으로 표시되는 정합 필터(matched filter)를 사용하고 있다.<sup>[1][2]</sup>

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \int_0^T s(t; \theta) x_2(t) dt \quad (2)$$

반면에 수동적 환경에서는 generalized cross-correlator (GCC)라는 기법을 주로 사용하는데 이때는  $x_1(t)$ 와  $x_2(t)$  사이에 정의되는 일반상관함수(generalized cross-correlator)인  $R^*(\theta)$ 를 계산하여 최대점의 위치로서  $\theta$ 값을 추정하게 된다.<sup>[3][4][5]</sup>

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} R^*(\theta) \quad (3)$$

(2)와 (3)식에서 알 수 있는 바와 같이 이러한 추정기(estimator)는 ML형태로 표시되며, 만약  $x_1(t)$ 와  $x_2(t)$ 가 jointly Gaussian 분포를 갖고 또한 시간대역폭 곱(BT)이 매우 크면 (2) 및 (3)식은 ML 추정기 자체가 되게 된다.<sup>[1][3]</sup> 본 논문에서는 이러한 추정 알고리즘에 있어서 파라미터의 실제값  $\theta^0$ 를  $\hat{\theta}$ 로 추정함으로써 예상되는 평균 손실(average loss 혹은 risk) 및 에러확률을 분석하기 위한 일반적 방법론을 제시하고자 한다.

평균손실에 대한 일반적 정의는 다음과 같다.

$$R^{\Delta} = E \left[ g(\theta^0, \hat{\theta}) \right] \quad (4)$$

이때  $E$ 는 관측신호 벡터인  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ 의 확률 분포 함수  $F(\mathbf{x}; \theta)$ 에 의거한 기대값을 나타내며  $g(\cdot, \cdot)$ 는 일반 손실함수를 의미한다. 특히  $g(\theta^0, \hat{\theta})$ 가 에러의 제곱으로 표시되면, 즉

$$g(\theta^0, \hat{\theta}) = (\theta^0 - \hat{\theta})^2 \quad (5)$$

평균손실  $R$ 은 평균 차승 에러인 MSE(Mean Squared Error)가 된다. 실제로 ML추정기법에서 MSE를 예측하는데 있어서 사용할 수 있는 방법으로는 파라미터  $\theta$ 를 중심으로 손실값을 선형화 하여 얻어지는 CRLB(Cramer-Rao Lower Bound)가 널리 알려져 있다.<sup>[6]</sup> 그러나 CRLB는 계산이 용이하

고 간단하다는 잇점은 있으나 신호대 잡음비(SNR : Signal to Noise Ratio)가 작을 경우, 다시 말해 추정에러가 클 경우에 있어서는, 너무 낙관적인(overly optimistic)값을 제공하게 됨으로써 그 사용이 부적합한 단점이 있다. 이와 같이 추정에러가 큰 경우에 대한 평균손실 계산법으로는 지금까지 파라미터 존재 공간을 격자구조로 나누어 분석하는 방법<sup>[2][7]</sup>과 large deviation 이론을 이용하는 방법<sup>[8]</sup>, 그리고 최근에는 level crossing 분석법을 이용한 방법<sup>[9]</sup> 등이 제안되었으나 그 정확도와 범용성, 그리고 특히 멀티 파라미터 경우로의 확장성등에서 많은 제한요소들을 안고 있다.

본 논문에서는 전체 평균 손실을 에러가 작은 경우와 큰 경우로 구분하여 분석하게 되는데 그 일반식은 다음과 같다.

$$R = R_s \cdot (1 - P_e) + R_L \cdot P_e \quad (6)$$

이때  $P_e$ 는 큰 에러가 발생할 확률로서  $P_e^{\Delta} = P(\hat{\theta} \in \Theta_L)$ 이며, 미리 정해진  $\Theta_s$ 은 에러값이 큰 파라미터 영역을 의미하며 따라서 전체 파라미터 영역은 에러가 작은 영역( $\Theta_s$ )과 큰 영역의 합집합, 즉  $\Theta = \Theta_s \cup \Theta_L$ 로 표시되게 된다. (6) 식에서  $R_s$ 는 위에서 언급한 바와 같이 CRLB로 대체 될 수 있으므로 본 논문에서는  $P_e$ 와  $R_L$ 을 계산하기 위한 범용적 방법으로써 에러 밀도함수 기법을 제안하였다.

## II. 일반적 고려 사항

식 (1)로 주어진 관측신호  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ 의 확률 밀도 함수(p.d.f)는 일반적으로  $f(\mathbf{x} | \theta)$ 로 표시할 수 있다. 이때 추정 대상 파라미터  $\theta$ 는 미리  $\Theta$ 라는 영역내에 존재한다고 가정한다. 여기서 추정 파라미터  $\theta$ 는 신호의 진폭, 위상, 도달시간 등과 같은 연속적인 양이면 그 어떤 신호 파라미터도 대상이 될 수 있다. 이러한 신호 파라미터를 추정하는 방법중 넓은 의미로서의 M-estimator는 일반적으로 ambiguity function 이라고 불리는 statistic  $L(\theta)$ 이 미리 정해진 영역  $\Theta$ 내에서 최대점이 되는 지점을 추정값( $\hat{\theta}$ )으로 취하게 된다. ((2) 및 (3)식 참조) 이때  $L(\theta)$ 는  $\theta$ 에 대해 2차 이하 차수의 도함수가 존재한다고 가정하는데 이는  $\Theta$ 내의 모든 점에서  $L(\theta)$ 의 극점(극대점 및 극소점)과 level crossing 지점들을  $L(\theta)$ 의 도함수를 이용, 수학적으로 표현하기 위함이다. 이와 같은 M-estimator 중 대표적인 추정기로는 ML 추정기가 있는데 이 경우  $L(\theta)$ 는 log-likelihood 함수

인  $\log f(\underline{x} | \theta)$  가 된다.

[장에서 언급한 바와 같이 파라미터  $\theta$ 의 실제값을  $\theta^0$ 라고 했을 때 추정값  $\hat{\theta}$ 에 의해 발생하는 에러는 크게 에러값이 작은 경우와 큰 경우로 구분 할 수 있다. 즉, 미리 정해진 경계값  $\delta$ 에 의해,  $\Theta_s$  및  $\Theta_L$ 은 각각  $\Theta_s = \{\theta : |\hat{\theta} - \theta^0| < \delta\}$  와  $\Theta_L = \theta - \Theta_s$ 로 정의 된다.(그림 1.) 이 경우 전체 MSE  $\Omega_{\theta}$ 는 total probability law에 의해 작은 에러가 발생했을 경우 (즉  $\hat{\theta} \in \Theta_s$ )의 (conditional) MSE인  $\Omega_{\theta s}$  및 큰 에러가 발생했을 경우 (즉  $\hat{\theta} \in \Theta_L$ )의 (conditional) MSE인  $\Omega_{\theta L}$ 의 조합으로 표시 할 수 있다.

즉

$$\begin{aligned} \Omega_{\theta} &= E\left[(\hat{\theta} - \theta^0)^2\right] \\ &= \Omega_{\theta s} \cdot (1 - P_e) + \Omega_{\theta L} \cdot P_e \end{aligned} \quad (7)$$

이때  $\Omega_{\theta s}$ ,  $\Omega_{\theta L}$  및  $P_e$ 는 다음식으로 정의된다.

$$\Omega_{\theta s} = E\left[(\hat{\theta} - \theta^0)^2 | \hat{\theta} \in \Theta_s\right] \quad (8)$$

$$\Omega_{\theta L} = E\left[(\hat{\theta} - \theta^0)^2 | \hat{\theta} \in \Theta_L\right] \quad (9)$$

$$P_e = P(\hat{\theta} \in \Theta_L) \quad (10)$$

(7)식은  $\Theta_s$ 의 크기에 관계없이, 즉  $\delta$  값에 관계없이 항상 성립하지만 충분히 작은  $\delta$ 값에 대해서 (8)식의  $\Omega_{\theta s}$ 는 잘 알려진 CRLB로 대체될 수 있다. [1] [10] 즉,

$$\Omega_{\theta s} \cong (E\left\{\left[\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\})^{-1} \quad (11)$$

따라서 전체 MSE를 구하기 위해서는 (7)식에서 (9)식의  $\Omega_{\theta L}$ 과 (10)식의  $P_e$ 를 계산하여야 한다. 본 논문에서는 이를 위해  $\hat{\theta} \in \Theta_L$ 인 경우의 에러 point들의 확률분포함수에 의하여 다음장에서 정의하게 될 에러밀도함수를 이용하여  $P_e$  및  $\Omega_{\theta L}$ 를 분석하게 되는데 별다른 언급이 없는한 이제부터 추정에러 라고 하면  $\hat{\theta} \in \Theta_L$ 인 경우를 의미한다고 규정한다

에러 발생 후보 위치에 대한 고찰  
추정에러 발생 위치에 대해 살펴보기 위해서 우선 "ambiguity process"를 다음식으로 정의한다.

$$\Delta L(\theta) \triangleq L(\theta) - m_{\theta}, \quad \theta \in \Theta_L \quad (12)$$

이때  $m_{\theta}$ 는  $\Theta_s$  구간에서의  $L(\theta)$ 의 최대값을 표시

하며 이  $m_{\theta}$ 는 구간  $\Theta_s$  전체를 대표하는 대표값 역할을 한다. 즉  $\Theta_L$ 구간에서  $L(\theta)$  값이  $m_{\theta}$ 를 초과하는 경우가 바로  $\Theta_L$ 내에서의 에러발생 ( $\hat{\theta} \in \Theta_L$ )을 의미하게 된다. 잡음이 전혀 없는 경우 대표적인 ambiguity process의 예가 그림 1에 나타나 있다. 여기서 만약 어떤  $\theta \in \Theta_L$ 에 대해  $\Delta L(\theta) > 0$  이면 이는  $L(\theta)$ 의 최대값의 위치가  $\Theta_L$ 내에 존재함을 뜻한다. 다시 말해서  $\Delta L(\theta)$ 가  $\Theta_L$ 구간내에서 양수값의 극대점들을 가짐이 바로 추정에러가 발생했음을 의미하며 이러한 극대점들의 위치와 상대적인 크기에 의해  $\Delta L(\theta)$ 의 최대점 위치, 즉  $\hat{\theta}$ 가 결정되게 된다.

$\hat{\theta} \in \Theta_L$  이라는 조건하에서는,  $\Theta_L$ 내의 양수값을 갖는 극대점들 중에는 반드시  $\hat{\theta}$ 이 포함되어 있어야 하므로 이러한 극대점들의 확률분포에 대한 해석을 통해 추정에러에 대한 확률분포 분석이 가능하게 된다. 좀 더 구체적으로, 이러한 극대점, 즉 추정에러가 발생할 후보 위치점들의 집합은  $\{v_{i=1}^M\}$ 이라는 불규칙 변수 (random variable)들의 집합으로 정의 할 수 있고 이때  $\hat{\theta} \in \Theta_L$ 조건하에서는  $\hat{\theta} \in \{v_{i=1}^M\}$ 이라는 사건은 그 발생확률이 1이 된다. 여기서 M은 또 다른 불규칙 변수로서  $\Theta_L$ 내의 이러한 에러 발생 후보점들의 갯수를 의미하는데 M=0은 에러가 발생하지 않았음을 의미하고, M > 0 이면 에러가 발생했음과 동시에 그 추정값  $\hat{\theta}$ 가  $\{v_{i=1}^M\}$ 중의 하나가 됨을 의미한다.

바로 이러한 에러발생 후보점들은 ambiguity function 궤적상에서 sampling 된 위치들로서, point process N의 point들로 취급할 수 있다. 일

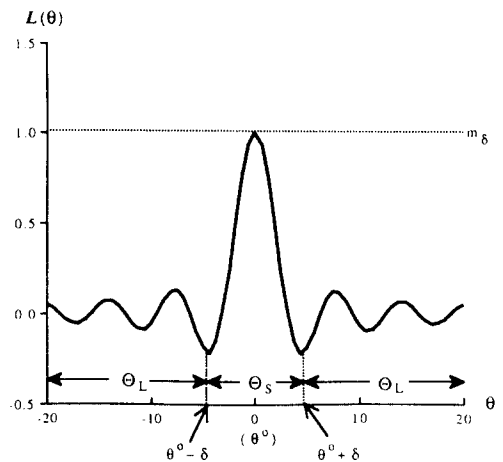


그림 1. 대표적인 잡음이 없는 ambiguity trajectory  $L(\theta)$ 의 예

Fig. 1. Typical noiseless ambiguity trajectory  $L(\theta)$  for estimation of  $\theta$ .

반적으로 point process  $N$ 의 1차 확률 분포는 밀도 함수(intensity function)  $\lambda$ 로 표시 되므로, 추정 에러 후보점들의 확률 분포 특성은 바로 이 point process  $N$ 의 밀도 함수에 의해 규정 될 수 있다. 이렇게 하면 에러발생 연속 구간인  $\Theta$  전체를 유한개  $M$ 의 이산 후보점  $\{u_i\}_{i=1}^M$ 들로 나타낼 수 있으므로 추정 에러에 대한 좀 더 효율적인 표현방법이 된다. 즉,  $\theta$ 의 연속함수인  $L(\theta)$ 를  $\theta$ 의 이산함수인 point process  $N$ 으로 표현함으로써 에러발생 여부를 테스트 하기 위한 영역이  $\Theta$ 내의 연속적인 모든 지점으로부터 유한개의 테스트 지점으로 국한시킬 수 있다.

### III. 추정에러에 대한 Point Process로의 표현

본 장에서는 추정에러를,  $M$ 개의 에러 후보점  $\{u_i\}_{i=1}^M$ 으로 정의되는 point process  $N$ 으로 표현하는 U절차에 대해 기술한다. 임의의 파라미터 구간  $\Theta$ 내의 해당 point process는 일반적으로  $N = \int \theta dN(\theta)$ 로 정의할 수 있는데 이때  $dN(\theta)$ 는  $d\theta$  구간내의 후보점  $v_i$ 들의 갯수를 의미한다. 여기서  $M$  및  $\{u_i\}_{i=1}^M$ 은 일반적으로 모두 불규칙 변수이며, 에러발생에 대한 표현은  $\{u_i\}_{i=1}^M$ 중 어떤  $u_j$ 가 에러발생 위치에 해당하는지를 결정하는 것이 된다. 또한 에러가 발생 (즉  $\hat{\theta} \in \Theta_L$ )하기 위한 필요충분조건은  $M > 0$  이므로 에러 확률인  $P_e$ 는 다음식으로 표현할 수 있다.

$$P_e = P(M > 0) \quad (13)$$

따라서  $M > 0$ 이라는 조건하에서는  $\{u_i\}_{i=1}^M$ 중에  $\hat{\theta}$ 가 반드시 포함 되어야 하며, 추정에러에 의한 평균 손실  $R = E[g(\theta^0, \hat{\theta})]$ 은 다음식으로 나타낼 수 있다. [부록참조]

$$R = E \left[ \sum_{j=1}^M g(\theta^0, v_j) P_j | M > 0 \right] \cdot P_e + E[g(\theta^0, \hat{\theta}) | M = 0] \cdot (1 - P_e) \quad (14)$$

(14) 식에서  $P_j$ 는 추정에러가  $j$ 번째 후보점에서 발생할 확률로써 다음식과 같다.

$$P_j = P(\hat{\theta} = v_j | \{u_i\}_{i=1}^M), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (15)$$

즉  $P_j$ 는  $L(\theta)$ 의 최대점이  $u_j$ 에서 발생할 확률에 해당한다. (14)식에서 볼 수 있는 바와 같이 point process 개념으로 추정에러를 분석하기 위해서는 첫째 후보 point상에서 추정값  $\hat{\theta}$ 의 확률분포인  $\{P_j\}_{j=1}^M$ 와, 둘째로 후보 point들인  $\{u_j\}_{j=1}^M$ 의 확률분포가 먼저 규정 되어야만 한다.

#### 1. 후보 point 상에서의 $\hat{\theta}$ 의 확률분포

일반적으로 (15)식으로 표시되는  $P_j$ 는  $\{u_i\}_{i=1}^M$  및  $\{\Delta L(u_i)\}_{i=1}^M$ 의 결합(joint) 확률분포의 함수로서 그 형태 및 계산과정이 상당히 복잡하게 된다. 즉

$$P_j = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x) F_{1, \dots, j-1, j+1, \dots, M | j}(x, \dots, x | x) dx \quad (16)$$

이때  $f_j(\cdot)$ 는  $\Delta L(u_j)$ 의 주변(marginal)확률 밀도 함수이며,  $F_{1, \dots, j-1, j+1, \dots, M | j}$ 는  $\Delta L(u_j)$  조건하에서  $\{\Delta L(u_i)\}_{i \neq j}^M$ 의 조건(conditional)공유 확률 분포 함수를 의미한다. 비록 (16)식은 형태상 잘 정의된 식이기는 하지만 계산을 하기 위해 필요한  $F_{1, \dots, j-1, j+1, \dots, M | j}$  때문에 실제 계산은 어렵게 된다. (16)식에 대한 대안으로써 다음과 같은 경우들을 고려할 수 있다.

$$P_j = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x) \left[ \prod_{k \neq j} F_{k | j}(x | x) \right] dx \quad (17)$$

$$P_j = \begin{cases} 1 & v_j = \arg \max_{v_i} g(\theta^0, v_i) \\ 0 & v_j \neq \arg \max_{v_i} g(\theta^0, v_i) \end{cases} \quad (18)$$

$$P_j = \begin{cases} 1 & v_j = \arg \min_{v_i} g(\theta^0, v_i) \\ 0 & v_j \neq \arg \min_{v_i} g(\theta^0, v_i) \end{cases} \quad (19)$$

$$P_j = 1/M \quad \forall j = 1, \dots, M \quad (20)$$

우선 (17)식을 살펴보면 이는  $\Theta$ 구간을 일정간격으로 나누었을때 그 경계 지점들이 바로  $\{u_i\}_{i=1}^M$ 에 해당하는 경우로서  $\{\Delta L(u_i)\}_{i=1}^M$ 가 서로 독립이라는 가정하에서 계산된  $P_j$ 이다. 이 경우는 그 표현 식이 간결해지는 것은 하나  $\hat{\theta} \in \{u_i\}_{i=1}^M$  w.p. 1이 될 수 없기 때문에 에러 발생 후보점들에 대한 합당한 모델이라고는 할 수 없다. 또한 (18)식 및 (19)식에 의한  $P_j$ 는 (14)식에 적용했을 경우 각각 평균손실에 대한 상한값 및 하한값을 제공하게 된다.

반면에 (20)식으로 주어진  $P_j$ 에 의하면 모든 후보 점들에 대해 같은 확률분포를 적용하는 경우로서 너무 비관적인 (18)식의 경우와 또한 너무 낙관적인 (19)식의 경우의 중간값으로써 평균 손실값을 계산할 수 있다. 또한 (17)의 경우와는 달리 (20)식에 의하면  $\hat{\theta} \in \{u_i\}_{i=1}^M$ 가 보장되므로 에러 발생 후보점들에 대한 모델로서의 정당성을 유지 할 수 있는 잇점이 있다. 따라서 본 논문에서는 ambiguity process  $\Delta L(\theta)$ 상의 모든 에러 발생 후보점  $\{u_i\}_{i=1}^M$ 에 균일한 확률 분포를 적용하는 (20)식을 채택하여 추정에러의 평균 손실을 분석하기로 한다.

#### 2. 에러후보 Point process의 확률분포

일반적인 point process N의 확률분포는 "complete intensity"로서 표시된다.<sup>[11]</sup> 그러나 이러한 "complete intensity"에 대한 계산이 대개 복잡하고 실제적이지 못하기 때문에 그 대신, 1차 근사적인 "incomplete intensity"를 많이 사용하게 된다. 바로 이 "incomplete intensity"가 본 논문에서 정의하는 에러 밀도 함수인  $\lambda(v)$ 가 되는데 이는 아래식과 같이 N의 1차 기대값의 함수로 표현된다.

$$E[N(S)] = \int_S \lambda(\theta) d\theta$$

이때 S는  $\Theta_0$ 의 부분집합으로서 임의의 Borel set이며, N(S)는 S내에 존재하는 point process N의 point들인  $\{u_i\}_{i \in S}$ 의 전체갯수를 의미한다. 즉  $\lambda(\theta)$ 는 파라미터 공간내에서 에러가 발생할 수 있는 point들의 확률분포를 표시하는데,  $\lambda(\theta)$ 의 극대점들이 에러가 발생할 확률이 높은 point 들이며, 극소점들은 에러가 발생할 확률이 낮은 point들을 의미한다.

여기서 "complete intensity"를  $\lambda(\theta)$ 로 표현한다는 것은 바로 N을  $\Theta_0$ 내에서 inhomogeneous Poisson process로 모델링 한다는 의미를 갖는다. Poisson process의 대표적인 특성조건은 서로 disjoint한 구간내에 포함되는 point 들의 갯수가 확률적으로 서로 독립성을 갖는다는 것이다. 비록  $L(\theta)$ 의 연속성 때문에 위의 조건이 일반적으로는 성립하지는 않지만, 다음과 같은 조건하에서는 Poisson process가 추정 에러 발생에 대한 비교적 정확한 모델이 될 수 있다. 즉 1)  $\Theta_0$ 이 크고 2) 각 point 간의 거리가 비교적 큰 경우에는, 에러 발생이 상당히 드물게 되므로 에러발생 사건을 서로 독립 사건으로 취급할 수 있게 된다. 따라서 에러 발생 후보 point 들은 Poisson 분포를 갖게 되는 것이다

3. 추정값의 확률 밀도 함수로서의 에러 밀도 함수  
본 절에서는 III.1 및 III.2 에서 살펴본 바와 같이 에러발생 후보 point들을 Poisson process로 모델링하고 또한 각 후보점들이 에러 발생 지점이 될 확률을 균등하게 규정했을 경우에 (식 (20)) 대해 에러확률  $P_e$ (식 (13)) 및 평균손실 R(식 (14))을 에러 밀도 함수로서 표현한다

Poisson process로서의  $\{u_i\}_{i=1}^M$ 은 다음과 같은 확률 밀도분포를 갖게 된다.<sup>[12]</sup>

$$f_{v_1, \dots, v_M | M}(\xi_1, \dots, \xi_M | m) \cdot P(M = m) \quad (21)$$

식 (21)에서

$$f_{v_1, \dots, v_M | M}(\xi_1, \dots, \xi_M | m) = \prod_{i=1}^m \frac{\lambda(\xi_i)}{\Lambda}$$

는  $M = m$ 일 경우의  $\{u_i\}_{i=1}^M$ 에 대한 조건 확률 밀도 함수이며

$$P(M = m) = \frac{\Lambda^m}{m!} e^{-\Lambda}$$

는 후보 point 갯수가 m일 확률로서 이때  $\Lambda$ 는 M의 평균값으로서 다음과 같이 정의 된다.

$$\Lambda = E[M] = \int_{\Theta_0} \lambda(\xi) d\xi \quad (22)$$

이때 에러 발생 확률은 (13)식에 의해  $P_e = P(M > 0)$ 이므로

$$P_e = 1 - e^{-\Lambda} \quad (23)$$

가 된다. 또한 평균손실 R은 (14)식에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다. (부록참조)

$$R = \int_{\Theta_0} g(\theta^0, \theta) \tilde{\lambda}(\theta) d\theta \cdot P_r + E[g(\theta^0, \hat{\theta}) | M=0] \cdot (1 - P_r) \quad (24)$$

식 (24)에서  $\tilde{\lambda}(\theta)$ 는 정규화된 밀도함수로서 다음식으로 정의 된다.

$$\tilde{\lambda}(\theta) = \frac{\lambda(\theta)}{\Lambda} \quad (25)$$

(24)식을 살펴보면  $\int_{\Theta_0} g(\theta^0, \theta) \tilde{\lambda}(\theta) d\theta$ 는 에러가 발생했을 경우에 예상되는 평균손실로서  $\tilde{\lambda}(\theta)$ 의 역할이 에러 발생시에 추정값  $\hat{\theta}$ 의 확률 밀도 함수가 됨을 알 수 있다. 즉

$$P(\hat{\theta} \in [\theta, \theta + d\theta]) = \tilde{\lambda}(\theta) d\theta, \quad \theta \in \Theta_0 \quad (26)$$

#### 4. 에러밀도함수의 일반형태

본 절에서는 ambiguity process  $\Delta L(\theta)$ 의 양수값 극대점들을 에러 후보 point  $\{u_i\}_{i=1}^M$ 으로 했을때, 에러 밀도 함수  $\lambda(\theta)$ 의 일반식을 정의한다.

우선  $\Delta L(\theta)$ 의 극대점들을 수학적으로 표현하기 위해서는  $\Delta L(\theta)$ 의  $\Theta_0$ 에 대한 1차 및 2차 도함수가 존재한다고 가정한다.

이때 일반적으로  $\Delta L(\theta)$  궤적상의  $\theta = v$ 지점에서 양수값의 극대점이 발생하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta L(v) > 0 \\ \frac{d}{d\theta} \Delta L(\theta)|_{\theta=v} = 0 \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \Delta L(\theta)|_{\theta=v} < 0 \end{aligned} \quad (27)$$

따라서  $\Theta_\Delta$ 의 미세구간 (infinitesimal interval)  $[\theta, \theta + \Delta]$  내에서 (27)식으로 표현되는 추정에러가 발생할 사건을  $E_\Delta(\theta)$ 라고 하면 그에 따른 에러밀도함수는 다음식으로 정의 할 수 있다

$$\lambda(\theta) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \cdot P[E_\Delta(\theta)] \quad (28)$$

#### IV. 에러 밀도 함수 모델

본 장에서는 추정 에러 발생을 point process로 했을 때 에러 발생 사건을 여러가지 형태로 모델링을 하여, 각 경우에 대한 에러 밀도 함수를 유도 계산 함으로써 각 모델간의 특성에 대해 살펴보기로 한다. 본 논문에서는 LC(Level Crossing), LM(Local Maxima)모델 및 ALM(Approximate Local Maxima)모델을 고려하였다.

우선 각 모델들에 대한 에러 밀도 함수를 유도하기 위해 앞서 추정하고자 하는 신호 파라미터  $\theta$ 는 미리(a-priori) 정해진 영역  $\Theta$ 내에 존재한다고 가정했으며  $\Theta = \Theta_L \cup \Theta_R$  로서 에러가 작은 영역( $\Theta_L$ ) 및 큰 영역( $\Theta_R$ )으로 다음과 같이 구분하였다. (그림 1 참조)

$$\Theta_L \stackrel{\Delta}{=} [\theta^0 - \theta_{\max}/2, \theta^0 - \delta) \cup (\theta^0 + \delta, \theta^0 + \theta_{\max}/2] \quad (29)$$

$$\Theta_R \stackrel{\Delta}{=} [\theta^0 - \delta, \theta^0 + \delta] \quad (30)$$

이때  $\theta^0 - \theta_{\max}/2$  및  $\theta^0 + \theta_{\max}/2$ 는  $\Theta$ 의 왼쪽 및 오른쪽 경계점을 각각 표시한다. 여기서  $\Theta$ 는  $\theta^0$ 를 중심으로 좌우 대칭이므로 (29)식에서 오른쪽 영역인  $(\theta^0 + \delta, \theta^0 + \theta_{\max}/2]$  구간에 대한 에러 분석을 살펴보기로 한다. 즉  $\Theta_L = (\theta^0 + \delta, \theta^0 + \theta_{\max}/2]$  이며 이  $\Theta_L$ 을 간격이  $\epsilon = \theta_{i+1} - \theta_i$ 로 일정한 2<sup>n</sup>개의 구간으로 나누었을 때 각 구간  $[\theta_i, \theta_{i+1})$ 에서의 에러 발생 사건을 모델에 따라 달리 정의하여 각 모델에 대한 에러 밀도 함수를 유도하게 된다.

##### 1. LC 모델

LC모델에서는 추정 에러 발생을  $\Delta L(\theta)$ 에 의한 zero-crossing으로서 모델링을 하게 된다.<sup>[13]</sup> 즉 실제 에러가 발생할 후보 point들은  $\Delta L(\theta)$  궤적상의

극대점 위치이지만 그 대신 극대점에 바로 인접한 zero-crossing point 들로서 후보지점을 설정하게 된다. (그림 2.) 따라서 구간  $[\theta_i, \theta_{i+1})$ 에서 zero-crossing 이 발생할 사건은 다음 두가지 방법으로 표현할 수 있다.

$$E_{LC}(\theta_i, \theta_{i+1}) = \{\Delta L(\theta_i) < 0 < \Delta L(\theta_{i+1})\} \stackrel{\Delta}{=} E_{LUC}(\theta_i, \theta_{i+1}) \quad (31)$$

혹은

$$E_{LC}(\theta_i, \theta_{i+1}) = \{\Delta L(\theta_i) > 0 > \Delta L(\theta_{i+1})\} \stackrel{\Delta}{=} E_{LDC}(\theta_i, \theta_{i+1}) \quad (32)$$

윗식에서 LUC 및 LDC는 각각 upcrossing 및 downcrossing 을 의미하는데 본 논문에서는 이들 중 (31)식으로 표현되는 LUC의 경우에 대해 살펴보았다.  $\Theta$ 에서  $\Delta L(\theta)$ 상의  $\theta$  및  $\theta_{i+1}$ 지점간의 기울기를  $\eta(\theta)$ 라고하면

$$\eta(\theta) = \frac{\Delta L(\theta_{i+1}) - \Delta L(\theta_i)}{\epsilon} \quad (33)$$

가 되는데 (33)식을 (31)식에 적용하면

$$E_{LC}(\theta_i, \theta_{i+1}) = \{\Delta L(\theta_i) \in [-\epsilon y, 0), \eta(\theta_i) = y > 0\} \quad (34)$$

로 표현할 수 있다. 이때  $\Delta L(\theta_i)$  및  $\eta(\theta_i)$ 의 결합 확률 밀도 함수를  $f_{\theta_i}(x, y)$ 라고 하면  $[\theta_i, \theta_{i+1})$  구간에서 에러가 발생할 확률은 다음과 같다.

$$P[E_{LC}(\theta_i, \theta_{i+1})] = \int_0^\infty dy \int_{-\epsilon y}^0 f_{\theta_i}(x, y) dx \quad (35)$$

여기서  $x = \epsilon \omega$ 로 변수치환을 하게 되면 (35)식은

$$P[E_{LC}(\theta_i, \theta_{i+1})] = \epsilon \int_0^\infty dy \int_{-y}^0 f_{\theta_i}(\epsilon \omega, y) d\omega \quad (36)$$

로 된다. 따라서 미세구간내에서 level crossing point 갯수의 극한값인 에러 밀도 함수는 LC모델의 경우 다음식으로 표현된다

$$\begin{aligned} \lambda_{LC}(\theta) &\stackrel{\Delta}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} P[E_{LC}(\theta, \theta_{i+1})] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dy \int_{-y}^0 f_{\theta_i}(\epsilon \omega, y) d\omega \end{aligned} \quad (37)$$

(37)식에  $f_{\theta_i}(x, y)$ 에 대한 Leadbetter 조건<sup>[14]</sup>을 적용하여 적분 및 극한값의 순서를 바꾸고 또한 아래 식으로 표시되는 dominated convergence 성질을 적용하면

$$\int_{-\infty}^0 f_{\theta_i}(\epsilon\omega, y) d\omega \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} y f_{\theta_i}(0, y) \quad (38)$$

(37)식으로 부터  $\lambda_{LC}(\theta)$ 는 다음식으로 표현된다

$$\lambda_{LC}(\theta) = \int_0^{\infty} y f_{\theta_i}(0, y) dy \quad (39)$$

이때 (39)식을 계산하기 위해  $\Delta L(\theta)$ 와 일치도함수인  $\Delta \dot{L}(\theta)$ 의 결합 밀도 함수로서 Gaussian 밀도 함수를 적용하면 (39)식은 아래와 같은 닫힌 형태(closed form)로 표현가능하다

$$\lambda_{LC}(\theta) = (1 - \gamma^2)^{1/2} \frac{\sigma_L}{\sigma_0} \phi\left(\frac{\mu_0}{\sigma_0}\right) \left[ \phi(\xi) - \xi \Phi(\xi) \right] \quad (40)$$

이때  $\xi = \frac{\sigma_0 \mu_1 - \gamma \sigma_L \mu_0}{(1 - \gamma^2)^{1/2} \sigma_0 \sigma_L}$  이며  $(\mu_0, \sigma_0^2)$  및  $(\mu_1, \sigma_1^2)$ 은 각각  $\Delta L(\theta)$ 와  $\Delta \dot{L}(\theta)$ 의 평균 및 분산값을, 그리고  $\gamma$ 는 그들 사이의 상관계수를 의미한다. (40)식에서 또한  $\phi(\cdot)$  및  $\Phi(\cdot)$ 는 각각 평균값이 0 이고 분산이 1인 Gaussian 확률 밀도함수 및 확률 분포 함수를 표시하고 있다. (40)식을 살펴보면  $\lambda_{LC}(\theta)$ 는  $\theta$ 에 대해 닫힌 형태이므로 계산이 용이하고 빠르다는 잇점이 있지만 추정 에러 발생 위치가 근본적으로 잘못 설정이 되어 있기 때문에 정확한 모델이라고는 할 수 없다

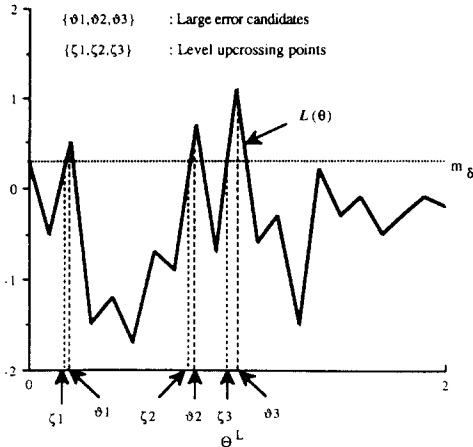


그림 2.  $L(\theta)$  에 의한  $m_\delta$  level-crossing 위치로서 표현된 추정에러 후보 지점  
Fig. 2. Large error described as crossing of level  $m_\delta$  by the ambiguity trajectory.

2. LM모델

LM모델에서는 추정에러를  $\Delta L(\theta)$  제적상에서 양수

값의 극대점으로서 모델링 하게 되는데 이 경우  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$  구간에서 에러가 발생하는 사건은 일반적으로 다음과 같이 정의 될 수 있다.

$$E_{LM}(\theta_i, \theta_{i+1}) = \{ \Delta L(\theta_i) > 0, \Delta L(\theta_i) \leq \Delta L(\theta_i + \epsilon) > \Delta L(\theta_{i+1}) \} \quad (41)$$

이때  $\epsilon_i < \epsilon$ 이며  $\Delta L(\theta)$ 의 1차 도함수를 이용하면 (41)식은 다음식으로 표현될 수 있다.

$$E_{LM}(\theta_i, \theta_{i+1}) = \{ \Delta L(\theta_i) > 0, \Delta \dot{L}(\theta_{i+1}) < 0 \leq \Delta \dot{L}(\theta_i) \} \quad (42)$$

(42)식은 (31)식과 그 형태가 비슷한데 이는  $\Delta L(\theta)$ 의 극대점이  $\Delta \dot{L}(\theta)$ 의 zero-crossing 으로 표현된다는 것을 의미한다.  $\Delta L(\theta)$ 에 대한 2차도함수  $\Delta \ddot{L}(\theta)$ 를 다음식으로 정의 하면

$$\Delta \ddot{L}(\theta_i) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\{ \Delta \dot{L}(\theta_{i+1}) - \Delta \dot{L}(\theta_i) \}}{\epsilon} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho(\theta_i) \quad (43)$$

(42)식은 다음과 같이 된다.

$$E_{LM}(\theta_i, \theta_{i+1}) = \{ \Delta L(\theta_i) > 0, \Delta \dot{L}(\theta_i) \in (0, -\epsilon z), \rho(\theta_i) = z < 0 \} \quad (44)$$

이때  $\Delta L(\theta_i), \Delta \dot{L}(\theta_i)$  및  $\Delta \ddot{L}(\theta_i)$ 의 결합 확률 밀도 함수를  $f_{\theta_i}(x, y, z)$ 라 하면,

$[\theta_i, \theta_{i+1}]$  구간에서의 에러확률은

$$P[E_{LM}(\theta_i, \theta_{i+1})] = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-\epsilon z} \int_{-\infty}^0 f_{\theta_i}(x, y, z) dy dz dx \quad (45)$$

로 된다. (45)식에서  $y = \epsilon v$  로 변수치환을 하면

$$P[E_{LM}(\theta_i, \theta_{i+1})] = \epsilon \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-z} \int_{-\infty}^0 f_{\theta_i}(x, \epsilon v, z) dv dz dx \quad (46)$$

로서 LM모델 하에서의 에러 밀도 함수는 다음 식으로 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda_{LM}(\theta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon} P[E_{LM}(\theta_i, \theta_{i+1})] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-z} \int_{-\infty}^0 f_{\theta_i}(x, \epsilon v, z) dv dz dx \end{aligned} \quad (47)$$

(47)식에서  $f_{\theta_i}(x, y, z)$ 에 대한 Leadbetter의 조건<sup>114</sup>과 아래식으로 표현되는 dominated convergence 성질을 적용하면

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-z} \int_{-\infty}^0 f_{\theta_i}(x, \epsilon v, z) dv dz dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -z f_{\theta_i}(x, 0, z) \quad (48)$$

에러 밀도 함수는 다음과 같이 된다.

$$\lambda_{LM}(\theta) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 -z f_{\theta}(x, 0, z) dz dx \quad (49)$$

따라서 (49)식을 계산하기 위하여  $f_{\theta}(x, y, z)$ 를 Gaussian 확률밀도로 적용하면 LM 모델의 에러 밀도 함수는 다음식으로 정리된다.

$$\lambda_{LM}(\theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{a_0}|A|} \int_{-\infty}^{-\mu_1} (-u - \mu_2) e^{[-a_0/2](\theta - A^{-1}z)^2} \Phi\left\{\sqrt{a_0}(\mu_0 - A/2)\right\} du \quad (50)$$

이때  $a_0$ 는 벡터  $[\Delta L(\theta), \Delta \dot{L}(\theta), \Delta \ddot{L}(\theta)]^T$ 에 대한 inverse covariance matrix의 ij번째 요소이며,  $\mu_i$ 는  $\Delta L(\theta)$ 의 i차(i=0, 1, 2)도함수의 평균값을 나타낸다. 또한 A 와 B는 아래식으로 정의하였다

$$A = \frac{-(a_{10} + a_{01})\mu_1 + (a_{20} + a_{02})\mu}{a_{00}}$$

$$B = \frac{-(-a_{11}\mu_1 + a_{21}\mu) + (a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu)\mu}{a_{00}}$$

(50)식을 살펴보면  $\lambda_{LM}(\theta)$ 는  $\mu_i$ , A, 및 B를 통한  $\theta$ 의 함수로 표시되어 있으며, 또한  $\theta$ 에 대해 닫힌 형태가 아님을 볼 수 있다. 즉 LM모델은 추정에러의 발생을 수학적으로 정확하게 표현한다는 장점이 있지만  $\lambda_{LM}(\theta)$ 를 계산하기 위해서는 수치해석적 방법에 의존해야만 한다.

### 3. ALM 모델

식 (47) 및 (50)에서 볼 수 있는 바와 같이  $\lambda_{LM}(\theta)$ 를 계산하려면 우선  $\Delta L(\theta)$ ,  $\Delta \dot{L}(\theta)$  및  $\Delta \ddot{L}(\theta)$ 의 결합 확률 밀도 함수를 알아야 하고, 또한  $\lambda_{LM}(\theta)$ 는  $\theta$ 에 대해 닫힌 형태가 아니므로 추정하고자 하는 파라미터의 갯수가 두개 이상일 경우에 적용하기에는 상당한 어려움이 따르게 된다. 따라서  $\lambda_{LM}(\theta)$ 에 대한 대안으로써 ambiguity process  $\Delta L(\theta)$ 의 2차 도함수인  $\Delta \dot{L}(\theta)$ 를 linear least mean squared error estimate (LLMSEE) 로써 대체하는 방법을 고안하였다. 즉

$$\Delta \dot{L}(\theta) = E[\Delta \dot{L}(\theta) | \Delta L(\theta), \Delta \ddot{L}(\theta)]$$

$$= a\Delta L(\theta) + b\Delta \ddot{L}(\theta) + c \quad (51)$$

로써 상수 a, b, c는 orthogonality 조건으로부터 쉽게 구할 수 있다. [15] (51)식을 (44)식에 적용하면 LM 모델하에서의 추정에러의 발생은 다음  $E_{ALM}(\theta)$ 로 표현된다.

$$E_{ALM}(\theta) = \left\{ \Delta L(\theta) > 0, \Delta \dot{L}(\theta) \in [0, -\varepsilon \Delta \dot{L}(\theta)], \Delta \ddot{L}(\theta) < 0 \right\} \quad (52)$$

(52)식을 (44)식과 비교해보면  $\Delta \ddot{L}(\theta)$ 를 LLMSEE인  $\Delta \dot{L}(\theta)$ 로 대체함으로써 LM 모델의 근본 구조는 그대로 유지하면서,  $\Delta L(\theta)$ ,  $\Delta \dot{L}(\theta)$ ,  $\Delta \ddot{L}(\theta)$ 의 결합 확률 밀도 함수인  $f_{\theta}(\cdot, \cdot, \cdot)$ 를  $\Delta L(\theta)$ 와  $\Delta \dot{L}(\theta)$  결합 확률 밀도 함수인  $f_{\theta}(\cdot, \cdot)$ 로 그 차수를 줄이는 효과가 있다. 따라서 실제로 에러 밀도 함수를 계산하는 과정이 그만큼 간단해 질 수 있다. ALM 모델하에서의 에러 밀도 함수인  $\lambda_{ALM}(\theta)$ 는 (28)식으로부터

$$\lambda_{ALM}(\theta) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} P[E_{ALM}(\theta)] \quad (53)$$

로 정의 되는데 (52)식을 (53)식에 적용하여 실제로 계산을 하면 a와 c의 부호에 따라 다음과 같은 네가지 경우로 구분하여 각각 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} i) a \geq 0, c \geq 0 & \quad \lambda_{ALM}(\theta) = 0 \\ ii) a > 0, c < 0 & \quad \lambda_{ALM}(\theta) = \int_0^{-c/a} g_{\theta}(x) dx \\ iii) a < 0, c \geq 0 & \quad \lambda_{ALM}(\theta) = \int_{-c/a}^{\infty} g_{\theta}(x) dx \\ iv) a \leq 0, c < 0 & \quad \lambda_{ALM}(\theta) = \int_0^{\infty} g_{\theta}(x) dx \end{aligned}$$

여기서  $g_{\theta}(x) = -(ax+c) \cdot f_{\theta}(x, 0)$ 이고  $f_{\theta}(x, y)$ 는  $\Delta L(\theta)$ 와  $\Delta \dot{L}(\theta)$ 의 결합 확률 밀도 함수이다. 이때 i)의 경우는  $\{\Delta L(\theta) > 0, \Delta \dot{L}(\theta) = 0, \Delta \ddot{L}(\theta) \geq 0\}$ 의 경우로서  $\theta$ 에서 극대점이 발생할 확률은 0인 경우에 해당하고 나머지 ii), iii) 및 iv)의 경우는  $\{\Delta \dot{L}(\theta) > 0, \Delta L(\theta) = 0, \Delta \ddot{L}(\theta) < 0\}$ 의 경우로서  $\theta$ 에서 극대점, 즉 에러가 발생할 가능성이 있는 경우에 해당한다. 실제로 위의 네가지 경우에 대한 에러 밀도 함수를 계산하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} i) a \geq 0, c \geq 0 & \quad \lambda_{ALM}(\theta) = 0 \\ ii) a > 0, c < 0 & \quad \lambda_{ALM}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma_1^2}} \left[ -a \left\{ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{-(c+a\mu)^2}{2\sigma^2}}) + \mu \left( \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - c \left\{ \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c+a\mu}{\sigma}\right) \right\} \right) \right\} \right] \\ iii) a < 0, c \geq 0 & \quad \lambda_{ALM}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma_1^2}} \left[ -a \left\{ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-(c+a\mu)^2}{2\sigma^2}} + \mu \left( \Phi\left(\frac{c+a\mu}{\sigma}\right) \right) \right\} \right] - c \\ iv) a < 0, c < 0 & \quad \lambda_{ALM}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma_1^2}} \left[ -a \left\{ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu \left( \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right) - c \left( \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right) \right\} \right] \quad (54) \end{aligned}$$

이때 사용한 여러 기호들은  $\lambda_{L,C}(\theta)$  및  $\lambda_{LM}(\theta)$  경우와



동일한 정의로 사용하였으며 단  $\mu$  및  $\sigma$ 는 아래와 같이 정의 하였다.

$$\mu = \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \mu_1 \gamma$$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 (1 - \gamma^2)$$

식 (54)를 살펴보면 상당히 복잡한 형태로 표현되어 있지만 (50)식의  $\lambda_{LM}(\theta)$  와는 달리  $\theta$ 에 대해 단원 함수이므로 일단 LLMSEE의 계수인 a,b,c의 부호만 결정되면 그 계산과정이 LM 모델에 비해 간단히 그리고 빠르게 수행 될 수 있다. 또한 에러 밀도 함수를 계산하기 위해 요구되는  $\Delta L(\theta)$ 와 도함수들에 대한 결합 확률 밀도 함수의 차수가 LM모델에 비해 상대적으로 낮으므로 두개 이상의 신호 파라미터를 동시 추정하는 경우에 적용하기가 상당히 용이한 잇점이 있다.

V. 검토 및 결론

본 논문에서는 신호 파라미터의 ML추정기법에 있어서 발생하는 추정에러를 point process를 도입, 에러밀도 함수 개념을 적용함으로써 분석하였다. 추정기의 성능 분석을 위한 기법들은 기존에 많이 제안되어 있지만 [13], [16], 이들은 추정하고자 하는 신호 파라미터의 갯수가 두개 이상일 경우에, 즉 multi-parameter estimation에 적용하기에는 계산상 여러가지 제약 조건이 따르게 된다. 반면에 point process개념을 이용하여 성능 분석을 하게 되면 에러 발생 현상에 대한 정확한 수학적 모델링이 가능할 뿐만 아니라 multi-parameter estimator의 경우에 적용하기도 상당히 용이한 잇점이 있다. 본 논문에서 살펴본 에러 밀도 함수의 여러 모델 중 LM 모델은 에러 발생 현상을 가장 정확하게 모델링 하지만 이에 따른 에러 밀도 함수를 계산하는 과정이 복잡할 뿐만 아니라 에러 밀도 함수 자체가 단원 형태가 아니므로 수치 해석적 방법에 의존할수 밖에 없고 이로 인해 multi-parameter의 경우에 적용하기는 실제로 어렵다. 반면에 LC 모델은 에러 밀도 함수의 계산 과정이 단순하고 또한 그 형태가 단원 함수라는 잇점이 있지만 정확한 에러 발생 지점을 모델링 할수 없다는데 근본적인 문제점이 있고 또한 surface에 대한 level crossing을 수학적으로 모델링 하기가 그리 간단치 않기 때문에 multi-parameter에로의 적용도 사실상 어렵다는 단점이 있다. 따라서 본 논문에서는 LM 모델의 수학적 기본 구조는 그대로 유지하되 에러 밀도 함수의 계산과정을 단순화 하고 또한 multi-

parameter경우로의 응용이 비교적 용이한 ALM 모델을 제시하였다. LM 모델과 비교해 볼때 ALM 모델은 우선 에러 밀도 함수의 계산에 요구되는 확률 밀도함수의 차수가 낮으며 또한 에러 밀도 함수의 형태가 단원 함수이므로 추정하고자 하는 신호 파라미터가 두개 이상일 경우에 적용 하기가 훨씬 용이하게 된다. 다만 ALM 모델의 타당성을 검증하기 위해서는 실제로 특정 추정기에 적용했을때 LM 모델과 ALM 모델의 성능 예측 결과를 서로 비교해 보아야 하겠는데 몇가지 모의실험에 의하면 ALM 모델이 LM 모델에 비해 거의 동등한 실험 결과를 얻을 수 있었으며 이에 대한 연구 결과도 곧 발표할 예정이다.

부록 : 평균 손실 함수 (R)의 유도

일반손실 함수  $g(\theta^0, \hat{\theta})$ 에 대한 기대값으로의 평균 손실은 다음과 같다.

$$R = E\left[g(\theta^0, \hat{\theta})\right] \tag{A.1}$$

$$= E\left[g(\theta^0, \hat{\theta})M > 0\right] \cdot P(M > 0) + E\left[g(\theta^0, \hat{\theta})M = 0\right] \cdot (1 - P(M > 0))$$

(A.1)식에서  $M > 0$  라는 조건하에서는  $\theta \in \{v_i\}_{i=1}^M$  w.p.1 이므로 조건 기대값의 smoothing 성질 [17]을 적용하면

$$E\left[g(\theta^0, \hat{\theta})M > 0\right] = E\left[E\left[g(\theta^0, \hat{\theta})\right] \hat{\theta} \in \{v_i\}_{i=1}^M \middle| M > 0\right] \tag{A.2}$$

로 표시된다. 이때  $P_e = P(M > 0)$  와 (A.2)식을 (A.1)식에 적용하면 (14)식이 유도된다.

또한 에러 발생 후보 point인  $\{v_i\}_{i=1}^M$ 가 Poisson 분포를 갖고 또한  $\hat{\theta} = v_i$ 가 될 확률이 모든  $\{v_i\}_{i=1}^M$ 에 대해 균일한값  $1/M$ 의 분포를 갖는다면  $R(\hat{\theta})$ 는 다음식으로 표현할 수 있다.

$$R(\hat{\theta}) = E\left[(1/M) \sum_{i=1}^M g(\theta^0, v_i)\right]$$

$$= E\left[(1/M) \sum_{i=1}^M E\left[g(\theta^0, v_i)M\right]\right]$$

$$= E\left[(1/M) \sum_{i=1}^M \int_{\Theta} g(\theta^0, \theta) \chi(\lambda(\theta)/\Lambda) d\theta\right]$$

$$= \int_{\Theta} g(\theta^0, \theta) \chi(\lambda(\theta)/\Lambda) d\theta \tag{A.3}$$

參考文獻

[1] H.L. Van Trees, Detection, Estimation

- and Modulation Theory: Part I, Wiley, New York, 1968.
- [ 2 ] J.M.Wozencraft and I.M.Jacobs, Principles of Communications Engineering, Wiley, New York, 1967.
- [ 3 ] C.H.Knapp and G.C.Carter, "The Generalized Cross Correlator for estimation of time delay ", *IEEE Trans. on ASSP*, vol.4, pp.320-327, Aug.1976.
- [ 4 ] J.C.Hassab and R.E.Boucher, "Optimum estimation of time delay by a generalized correlator", *IEEE Trans. on ASSP*, pp.373-380, Aug. 1979.
- [ 5 ] J.S.Bendat and A.G.Piersol, Random Data : Analysis and Measurement Procedures, Wiley, New York, 1986.
- [ 6 ] V.H.MacDonald and P.M.Schultheiss, "Optimum passive bearing estimation in a spatially incoherent noise environment", *J.Acoust.Soc.Am.*, vol.1, pp.37-43, 1969.
- [ 7 ] J.P.Ianniello, "Time Delay Estimation via cross-correlation in the presence of large estimation errors", *IEEE Trans. on ASSP*, vol.6, pp.998-1003, Dec. 1982.
- [ 8 ] Josef Steinbach, Large Deviation Probabilities and Some Related Topics, Dept. of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Canada, 1980.
- [ 9 ] A.O.Hero and S.C.Schwartz, Level Crossing Representations, Poisson Asymptotics and Applications to Passive Arrays, C.Baker, Ed., Springer-Verlag, 1986.
- [10] M.M.Gibson, "Delay Estimation of Disturbance on the Basilar Membrane", *IEEE Trans. on ASSP*, vol.3, pp.621-623, 1981.
- [11] D.R.Cox and V.Isham, Point Processes, Chapman and Hall, 1980.
- [12] D.L.Snyder, Random Point Processes, Wiley, New York, 1975.
- [13] A.O.Hero and S.C.Schwartz, "Poisson Models and Mean Square Error for Correlator Estimators of Time Delay", *IEEE Trans. on Information Theory*, vol.34, pp.287-303, March, 1988.
- [14] M.R.Leadbetter, "On crossings of levels and curves by a wide class of stochastic processes", *Ann. Math. Statist.*, vol.37, pp.260-267, 1966.
- [15] A.Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 1991.
- [16] K.Scarbrough, R.J.Tremblay and G.C.Carter, "Performance predictions for coherent and incoherent processing techniques of time delay estimation", *IEEE Trans. on ASSP*, vol.5, pp.1191-1196, 1983.
- [17] M.M.Rao, Probability Theory with Applications, Academic Press, Orlando, FL, 1984

## — 著 者 紹 介 —



金 重 圭(正會員)

1957年 4月 17日生. 1980年 2月 서울대학교 전자공학과(학사), 1982年 2月 서울대학교 전자공학과(석사), 1989年 12月 The University of Michigan 전기 및 전자공학과(Ph.D.) 1990年 1月 ~ 1990年 6月 The University of Michigan(Post Doc.), 1990年 6月 ~ 1992年 2月 삼성전자 특수연구소(선임연구원), 1992年 3月 ~ 현재 성균관대학교 전자공학과(조교수). 주관심 분야는 디지털 신호처리, Detection and Estimation Theory, 음성인식 등임.