

## 조작기의 동특성을 고려한 비선형 로봇 매니플레이터의 최적제어기 설계

正會員 金 學 範\* 正會員 李 陽 範\*\*

### Design of an Optimal Controller for the Nonlinear Robot Manipulators with the Actuator Dynamics

Hak Pom Kim\*, Yang Bum Lee\*\*, *Regular Members*

#### 要 約

본 연구에서는 고속운전 및 빈번한 부하의 변동에 대해서도 효과적인 과도응답 및 정상상태 응답특성을 갖도록 조작기(actuator)의 동특성방정식을 유도하여 매니플레이터의 동특성방정식과 결합시켜 2차 미분방정식으로 표현되는 새로운 매니플레이터의 모델 시스템 알고리즘을 제안하였다. 또한 비선형 궤환과 선형화 기법을 적용하여 변수들이 상호간에 심하게 결합되어 있는 시변 비선형 동특성모델을 감결합된 선형모델로 변환한다. 이럴 경우 모델의 제어기 구성시 시스템의 안정성을 얻기 위하여 극 재배치 법을 적용하였으며, 또한 경로오차를 최소화 시켜주기 위하여 오차방정식에 대한 최적제어를 적용하였다.

제안한 알고리즘을 조작기가 포함된 3관절 로봇 매니플레이터에 적용하여 컴퓨터 시뮬레이션한 결과 만족할 만한 결과를 얻었다.

#### ABSTRACT

This paper presents a new dynamic model which is represented by the second order differential equation and itcludes the robot arm dynamics as well as the actuator dynamics. The model exhibits excellent performance in the steady state and transient response. In addition the time varing nonlinear and coupled dynamic system has been linearized and decoupled by using nonlinear feedback and linearization method. In this case a pole assignment law is used to improve stability, and the optimal control algorithm is applied to the error equation to minimize the path error. In applying the proposed algorithm to the three joint manipulator with actuators, we obtained very encouraging results.

\*상지전문대 전자과  
\*\*울산대학교 전기공학과  
論文番號 : 93-139

#### I. 서 론

최근 여러 산업현장에서는 열악한 작업환경의 기피 및 고임금화로 인해서 로봇 매니플레이터를 이용

하여 산업공정의 자동화에 의한 비용절감효과가 크게 기대되고 있다. 로봇 매니플레이터를 이용한 공정자동화를 위해서는 작업장 내의 다양한 환경조건 내에서 원하는 목적을 만족시키도록 로봇 매니플레이터의 운동제어를 제어하는 데 있다. 이러한 로봇 매니플레이터의 제어기법으로는 현재까지 폭 넓게 이용되고 있는 Computed Torque 제어기법과 적응제어기법등으로 분류할 수 있다.

그러나 이러한 제어기법들은 작업환경의 다양한 변화에 쉽게 대처 할 수 있는 능력이 부족하거나, 대형컴퓨터에 의존하여 제어하므로써 활용의 유연성이 줄어들게 된다. 또한 최근에는 인공지능 분야를 이용한 제어기법의 연구가 시도되고 있으나 아직까지 실용화 하기에는 적지 않은 문제점을 내포하고 있다.

일반적으로 로봇 매니플레이터의 운동제어를 제어하기 위해서는 매니플레이터의 동적 특성을 묘사하는 시변 비선형 2차 미분방정식으로 표현되는 동특성방정식으로 부터 매니플레이터의 입력토크를 구하여야 한다. 그러나 매니플레이터 시스템에서 고속운전, 빈번한 부하의 변동시에 중요한 역할을 담당하는 조작기의 동특성은 매니플레이터의 동특성 방정식으로 부터 대부분 배제되었다. 이러한 기존의 연구방법에서는 배제된 조작기의 동특성으로 인한 매니플레이터 운동제어의 오차들을 제어기에서 다루기 위하여 제어기 자체에 대한 많은 연구가 진행되고 있다. 이와 같은 제어기법들은 대부분 배제된 조작기의 동특성을 보상하기 위하여 수식적으로 매우 복잡할 뿐만 아니라 실제 제어가 구현되더라도 실시간 처리에 많은 문제점을 내포하고 있는 상황이다.

따라서 고속운전 또는 빈번한 부하의 변동에도 불구하고 효과적인 응답특성을 갖도록 조작기의 동특성을 고려한 매니플레이터 제어알고리즘 개발에 대한 필요성은 절대적이라고 할 수 있다. 근간 조작기의 동특성을 고려하여 매니플레이터의 동특성 방정식에 포함시킨 연구가 진행되고 있다. Vukobratovic<sup>(1)</sup>는 조작기의 중요성을 지적하였고 주어진 공칭궤적(nominal trajectory)에 대한 3차 기계적인 전송모델을 제안하였으며, Goor<sup>(2)</sup>는 조작기의 동특성이 중요한 역할을 한다는 것을 지적하였고 초기값에 대하여만 선형화된 간단한 매니플레이터 동특성 모델을 기초로 제어기를 설계하였다. 또한 Guez<sup>(3)</sup>는 조작기의 동특성을 고려한 매니플레이터 동특성 모델을 제안하였지만 이러한 모델링 방법은 자유도가 증가할 경우 일반적인 방법론으로 생각하기에는 매우 부적

합하다. Beekmann<sup>(4)</sup>은 매니플레이터의 동특성과 모터의 동특성 그리고 모터와 매니플레이터 관질의 상호 동특성을 포함한 모델을 제안하였지만 이러한 모델로부터 출력방정식을 도출해 내기에는 많은 어려움이 따르는 단점을 갖고 있다. 그리고 Tarn<sup>(5)</sup>은 조작기의 동특성을 전기자(armature) 회로에 대한 전압 방정식으로 표현하였으며, 이러한 전압 방정식과 매니플레이터의 토크 방정식을 결합하여 3차 미분방정식으로 표현되는 동특성 방정식을 도출하였다. 그러나 3차 미분방정식으로 표현되는 동특성방정식은 조작기를 고려하지 않은 2차 미분방정식에 비해 만족할만한 정상상태 오차와 효과적인 과도응답 특성을 갖지만 많은 계산량의 부담으로 인해 개인용 컴퓨터로는 실시간 제어가 불가능하다는 단점을 내포하고 있다.<sup>(6)</sup> 따라서 Tarn은 계산량을 줄이는 해결방법으로 첫째, 조작기 모터의 인덕턴스가 매우 적은 수치가므로 인덕턴스의 값( $L_i=0$ )을 무시하여 단순한 3차계(Third order)로 모델링할 수 있으며, 또다른 방법으로는 계산과정에 있어서 개선된 하드웨어나 소프트웨어의 도입을 제시하였다. 그러나 Tarn의 해결방법중에서 계산과정의 개선된 하드웨어나 소프트웨어의 도입 방법은 아직까지 현실성이 없으며 또한 인덕턴스의 값을 무시하여 3차계로 방정식을 단순화하기보다는 조작기의 동특성을 고려하면서 인덕턴스의 값을 무시한 2차계로 모델링이 가능하다.

그러므로 본 연구에서는 고속운전 및 빈번한 부하의 변동에 대해서도 효과적인 과도응답 특성을 갖도록 조작기의 동특성을 고려하면서<sup>(7)</sup> 전문적인 문제점들을 해결할 수 있는 매니플레이터의 제어알고리즘을 개발하고자 한다. 먼저 조작기의 가속도, 속도, 입력전압, 그리고 토크항으로 구성된 조작기의 동특성 방정식을 유도하여 매니플레이터의 동특성방정식과 결합시켜 2차 미분방정식으로 표현되는 새로운 전체 시스템의 모델 알고리즘을 제안한다. 여기서 제안된 모델의 상태변수는 매니플레이터의 위치벡터와 속도벡터이며 입력변수는 조작기의 입력전압으로 표현되는 2차 미분방정식의 형태이다. 또한 제안된 모델을 비선형 제환과 선형화 기법을 적용하여 변수들이 상호간에 심하게 결합되어 있는 시변 비선형 동특성 모델을 감결합된 선형 모델로 변환한다. 이럴 경우 모델의 제어기 구성시 시스템의 안정성을 얻기 위하여 극배치법을 적용하였으며, 또한 최적제어기 설계를 위해서 경로오차를 최소화 시켜주는 최적화 알고리즘을 적용하였다.

## II. 조작기를 고려한 매니플레이터 모델의 2차 동특성 방정식 유도

여기서 조작기는 산업용 로봇 매니플레이터에서 폭넓게 사용되는 영구자석형 D.C. 모터에 의해 구동된다고 하자. 매니플레이터의  $i$ 번째 관절을 구동시켜 주는  $i$ 번째 조작기는 그림 1과 같다.

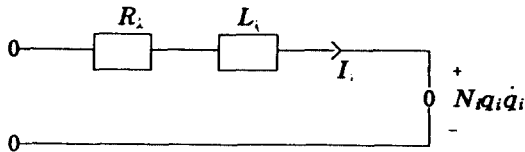


그림 1.  $i$ 번째 D.C. 모터회로.  
Fig. 1. The armature circuit of the  $i$ th D.C. motor

그림 1의 전압방정식은 식(2-1)과 같이 표현할 수 있으며,

$$R_i I_i + L_i \dot{I}_i + C_i \dot{q}_i = u_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2-1)$$

또한 모터의 토크 방정식은 다음과 같이 정리되어진다<sup>(9)</sup>.

$$J_{ri} \ddot{q}_i + B_{ci} \dot{q}_i + F_i q_i + \tau_i = N_i C_{mi} I_i \quad (2-2)$$

- 여기서,  $q_i$  : 회전자 각위치
- $\dot{q}_i$  : 회전자 각속도
- $\ddot{q}_i$  : 회전자 각가속도
- $R_i$  : 전기자 회로의 저항
- $L_i$  : 전기자 회로의 인덕턴스
- $I_i$  : 전기자 전류
- $u_i$  : 전기자 전압
- $C_E$  : 모터의 역기전력
- $C_M$  : 모터의 토크상수
- $\tau_i$  : 모터의 부하토크
- $N_i$  : 기어 감쇄비
- $J_{ri}$  : 회전자의 관성 모멘트
- $B_{ci}$  : 점성마찰(viscous) 계수
- $F_i$  : 비틀림(compliance) 계수

그림 1과 같은 조작기 모터의 상태변수로 다음과

같이 정한다.

$$x = [q_i \quad \dot{q}_i \quad I_i]^T \quad (2-3)$$

조작기의 토크방정식과 전압방정식을 상태변수로 다시 표현하면 식(2-4)와 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{x}_i = A_i x_i + C_i \tau_i + B_i u_i \quad (2-4)$$

여기서 식(2-4)의 시스템 행렬들은 다음과 같이 정리되어진다.

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-F_i}{J_{ri}} & \frac{-B_{ci}}{J_{ri}} & \frac{C_{Mi} N_i}{J_{ri}} \\ 0 & \frac{-C_{Li} N_i}{L_i} & \frac{-R_i}{L_i} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_i} \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{J_{ri}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

만약, 회전자 인덕턴스( $L_i$ )의 영향을 무시하면 식(2-5)의 조작기 설계인자 상수행렬은 다음과 같이 2차 항으로 표현 가능하며 이때 상태변수는 다음과 같다.

$$x = [q_i \quad \dot{q}_i]^T \quad (2-6)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{C_{Li} C_{Mi}}{J_{ri} R_i} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_{Mi}}{J_{ri} R_i} \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{J_{ri}} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

한편  $m$ 차 매니플레이터의 동특성방정식을 구하기 위하여 Lagrange-Euler방정식을 적용하면 다음의 식으로 정리 된다<sup>(10)</sup>.

$$\tau_i = \sum_{j=1}^m D_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m H_{ijk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k + g_i(q) \quad (2-8)$$

여기서,

$D(q)$  : 매니플레이터의 질량관성 행렬 ( $m \times m$ )

$H(q)$  : 코리올리력(Coriolis force) 과 원심력에 관

련된 행렬 ( $m \times m$ )  
 $g(q)$  : 중력항 벡터 ( $m \times 1$ )

따라서 식(2-8)의 매니플레이터 동특성방정식을 식(2-2)의 조작기 동특성 방정식에 대입하여 회전자 인덕턴스의 영향을 무시하여 2차계로 정리하면 다음과 같이 되며 이때  $A_i, B_i, C_i$ 는 식(2-7)과 같다.

$$\ddot{q}_i = A_i \dot{q}_i + C_i \left[ \sum_{j=1}^m D_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m H_{ijk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k + g_i(q) \right] + B_i u_i \quad (2-9)$$

이제 식(2-9)를 상태방정식으로 표현하기 위하여 상태변수를 다음과 같이 정하면

$$x_1 = q_1, \quad x_{m+1} = \dot{q}_1, \quad (2-10)$$

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2m}]^T, \quad \dot{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T$$

조작기의 동특성을 고려한 매니플레이터의 상태방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \\ \dot{x}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_{2m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \\ \dot{x}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{-1}(\dot{x}) S(x) \\ E^{-1}(\dot{x}) B \end{bmatrix}$$

여기서,

$$E(\dot{x}) = \begin{bmatrix} 1-C_1 D_{11} & -C_1 D_{12} & \dots & -C_1 D_{1m} \\ -C_2 D_{21} & 1-C_2 D_{22} & \dots & -C_2 D_{2m} \\ \dots & & & \\ -C_m D_{m1} & -C_m D_{m2} & \dots & 1-C_m D_{mm} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_m \end{bmatrix}$$

$$S(x) = \begin{bmatrix} C_1 \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m H_{1ij} x_{m+j} x_{m+k} + g_1 \right] + A_1 x_{m+1} \\ C_2 \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m H_{2ij} x_{m+j} x_{m+k} + g_2 \right] + A_2 x_{m+1} \\ \dots \\ C_m \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m H_{mij} x_{m+j} x_{m+k} + g_m \right] + A_m x_{m+1} \end{bmatrix}$$

또한, 매니플레이터 그리퍼의 공간상의 위치를 나타내는 출력방정식은 다음과 같다.

$$y = [y_1(x) \ y_2(x) \ \dots \ y_6(x)] \quad (2-12)$$

여기서  $y$ 벡터는 위치와 자세(orientation)를 표시하는데 만약  $n=6$ 이면  $y_1, y_2, y_3$ 는 그리퍼의 위치 ( $x, y, z$ )를 나타내고  $y_4, y_5, y_6$ 은 물체의 자세를 표시한다.

### III. 모델의 비선형 궤환과 선형화

조작기의 모델이 포함된 매니플레이터의 상태방정식과 출력방정식은 매우 복잡하며 각 변수들이 상호간에 결합되어 있으므로 비선형방정식으로 표현된다. 따라서 선형화된 시스템의 상태방정식과 감결합된 출력방정식을 얻어 내기 위해서는 결합된 비선형 매니플레이터의 모델방정식을 감결합된 선형 모델방정식으로 변환시켜 주어야 한다.

따라서 비선형 매니플레이터 모델을 선형모델 방정식으로 변환하기 위하여 본 연구에서는 C. Yilong이 제안한 다음과 같은 비선형궤환법(nonlinear feedback law)을 이용한다.<sup>(10)</sup>

$$u = \alpha(x) + \beta(x) \bar{v} \quad (3-1)$$

$$= -B^{-1} E(\dot{x}) J_y^{-1} \partial J_y \dot{x} - B^{-1} S(x) + B^{-1} E(\dot{x}) J_y^{-1} \bar{v}$$

여기서,  $\alpha(x) = -B^{-1} E(\dot{x}) J_y^{-1} \partial J_y \dot{x} - B^{-1} S(x)$

$$\beta(x) = B^{-1} E(\dot{x}) J_y^{-1} \bar{v}_i$$

$\bar{v}$  : 입력전압 제어벡터

$J_y$  :  $y(x)$ 의 Jacobian 행렬이며, 관절과 작업장 사이의 미분관계

$$J_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}, \quad \partial J_y = \left[ \frac{\partial J_y}{\partial x_1} \dot{x} \dots \frac{\partial J_y}{\partial x_m} \dot{x} \right]$$

또한 각각의 부시스템(subsystem)에 대하여 정확한 선형화 과정을 만족시키는 식(3-2)와 같은 선형화 변환을 적용한다. 이때 변환  $t(x)$ 는 상태벡터  $x$ 에서 새로운 상태벡터  $z$ 로 변환시켜 주는 함수이다.

$$z = t(x) = [y_1(x) \ L_f y_1(x) \ \dots \ y_m(x) \ L_f y_m(x)]^T \quad (3-2)$$

여기서  $L_f$ 는 Lie 미분연산자<sup>(4)</sup>.

따라서 조작기의 동특성을 포함하는 매니플레이터의 비선형 시스템방정식 (2-11)과 출력방정식 (2-12)에 비선형계환법과 선형화기법을 적용하면 다음과 같은 Brunovsky 표준형으로 감결합된 선형 동적방정식으로 표현되며 이것에 대한 블록선도는 그림 2에 도시하였다.

$$\dot{z} = \bar{A} z + \bar{B} \bar{v} \quad (3-3)$$

$$y = \bar{C} z \quad (3-4)$$

여기서,  $z = [z_1 \ \dots \ z_{2m}]^T$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_m \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & b_m \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c_m \end{bmatrix}$$

$$a_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_i = [1 \ 0] \quad i=1, 2, \dots, m$$

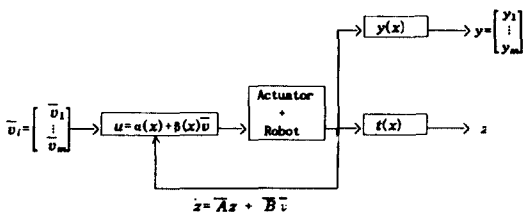


그림 2. 비선형 계환과 선형화 블록선도.

Fig. 2. Block diagram of the nonlinear feedback and linearization

또한 식(3-3)의 감결합된 시스템방정식과 식(3-4)의 출력방정식으로 부터 입력전압을 제어하기 위한 제어를 설계시 계산량의 부담을 줄이기 위해서는 다음과 같이 각각의 관절에 대하여 독립적인 부시스템으로 구성시켜 주어야 한다.

$$\dot{z}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{v}_i \quad (3-5)$$

$$y_i = [1 \ 0] z_i \quad (3-6)$$

여기서,

$$z_i = \begin{bmatrix} z_{2i-1} \\ z_{2i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

그러나 식(3-5)와 같은 부시스템의 고유치는 원점에 이중 극점으로 나타나기 때문에 시스템이 불안정하게 된다. 따라서 부시스템의 안정도를 개선하기 위한 방법으로는 부시스템의 극점을 허수축의 좌반부 내에 존재하게끔 상수블록 대각행렬(constant block diagonal matrix)  $F$ 를 이용하여 그림 3과 같이 상태를 선형계환시켜 주어야 한다.

따라서 상태를 선형계환시켜줄 때 식(3-5)로부터  $\bar{v}$ 의 벡터방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{v} = v - Fz \quad (3-7)$$

여기서  $v$ : 새로운 제어벡터

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f_{21} & f_{22} & 0 \\ \vdots & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & f_{i1} & f_{i2} \end{bmatrix}$$

단,  $f_{i1}, f_{i2}$ : 상수블록 대각행렬요소

결국 식(3-3)을 정리하면 다음과 같이 집약된다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \bar{A} z + \bar{B}(v - Fz) \\ &= (\bar{A} - \bar{B}F) z + \bar{B}v \end{aligned} \quad (3-8)$$

따라서 식(2-11)로 표현되는 조작기의 동특성을 고

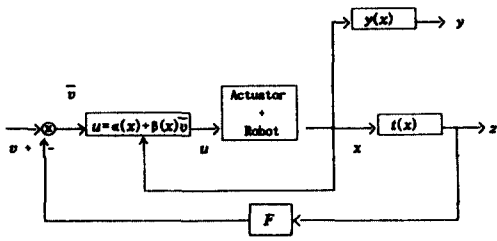


그림 3. 시스템의 안정도를 개선하기 위한 상수이득행렬 (F)을 가해준 시스템도.

Fig. 3. Block diagram of the constant gain matrix(F) to increase the stability.

려한 매니플레이터의 비선형 방정식은 식(3-8)과 같이 선형 부시스템방정식으로 구성할 수 있으며 개별적인 관절에 대한 부시스템들의 방정식은 다음과 같은 2차 형태를 가진다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{2i-1} \\ \dot{z}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f_{i1} & -f_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{2i-1} \\ z_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_i \quad (3-9)$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{2i-1} \\ z_{2i} \end{bmatrix}$$

또한 부시스템의 극점은 다음 관계식을 이용하여 구할 수 있다.<sup>(11)</sup>

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

여기서,  $\zeta$  = 제동 비율 (Damping Ratio)

$\omega_n$  = 자연 주파수 (Natural Frequency)

$$\omega_n^2 = f_{i1}, \quad 2\zeta\omega_n = f_{i2}$$

#### IV. 매니플레이터의 최적 제어

본 장에서는 매니플레이터가 안정도를 유지하면서 주어진 작업을 정밀하게 수행하게 하는 최적경로 제어 알고리즘문제를 다루었으며 최적제어 알고리즘을 적용한 최종 블록다이어그램을 그림 4에 도시하였다.

먼저 식(3-3)과 식(3-4)의 감결합된 시스템방정식으로 부터 최적으로 경로를 제어하기 위한 제어기 설계 계산량의 부담을 줄이기 위하여 각각의 공간상 위치에 대해 관절들이 서로 독립적인 부시스템으로

구성시켜줄 때 매니플레이터의 이상적인 수학적 모델 방정식과 출력방정식은 다음의 형태를 가진다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{2i-1}^d \\ \dot{z}_{2i}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f_{i1} & -f_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{2i-1}^d \\ z_{2i}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_i^d \quad (4-1)$$

$$y_i^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{2i-1}^d \\ z_{2i}^d \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (4-2)$$

여기서  $y_i^d$ 는 희망하는 경로이며, "d"의 기호는 이상적인 매니플레이터의 모델방정식을 의미한다.

이때 출력측의 오차방정식을 다음과 같이 가정한다.

$$e_i = \begin{bmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i - y_i^d \\ \dot{y}_i - \dot{y}_i^d \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

그리고 시스템 오차방정식은 식(3-9)와 식(4-1)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$(v_i - v_i^d) = (\ddot{y}_i - \ddot{y}_i^d) + f_{i2}(\dot{y}_i - \dot{y}_i^d) + f_{i1}(y_i - y_i^d) \quad (4-4)$$

따라서 시스템 오차방정식을 식(4-3)의 출력 오차 방정식 입력으로 놓고 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{e}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f_{i1} & -f_{i2} \end{bmatrix} e_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (v_i - v_i^d) \quad (4-5)$$

$$= A_i e_i + B_i \Delta v_i$$

$$\Delta v_i = \dot{e}_{i2} + f_{i2} e_{i2} + f_{i1} e_{i1}$$

$\Delta v_1$  : 수학적 모델방정식과 실제 시스템방정식의 차

한편 최적제어기를 설계하기 위하여 출력오차를 최소화시켜주는 평가척도 함수(cost index function)를 다음과 같이 정의할 때

$$J(\Delta v_i) = \int_0^T \Delta v_i^T R \Delta v_i dt + \int_0^T e_i^T(t) Q e_i(t) dt + e_i^T(T) S e_i(T) \quad (4-6)$$

여기서,  $R$  = 하중상수

$Q =$  하중행렬 ( $2 \times 2$ )

$S =$  하중행렬 ( $2 \times 2$ )

$T =$  매니플레이터의 운동시간

$$-PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q = 0 \quad (4-10)$$

$P$ : Riccati 방정식의 정상상태 해

최적보정(Optimal Correction)은 다음의 식으로 표현된다.

$$\Delta v_i^* = -R^{-1} B_i^T P(t) e_i(t) \quad (4-7)$$

여기서  $P(t)$ 는

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

이며 Riccati 방정식의 해로서 positive definite를 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) \\ P(T) &= S \end{aligned} \quad (4-9)$$

만일 Riccati 방정식으로 부터 정상상태 해만을 원했을 때 ( $t \rightarrow \infty$ ) 다음과 같은 대수방정식으로 표현되며,

$$\begin{aligned} 2f_{i1} p_{12} + R^{-1} p_{12}^2 - q_{11} &= 0 \\ -p_{11} + f_{i2} p_{12} + f_{i1} p_{22} + R^{-1} p_{12} p_{22} - q_{12} &= 0 \\ -2(p_{12} - f_{i2} p_{22}) + R^{-1} p_{22}^2 - q_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (4-11)$$

따라서 Riccati 방정식을 식(4-7)에 적용하였을 때 아래와 같은 최적정보식을 얻을 수 있다.

$$\Delta v_i^* = -R^{-1} B_i^T P e_i(t) \quad (4-12)$$

또는 식(4-5)에서 적용된  $B_i^T = [0, 1]$ 와 식(4-8)의  $P(t)$  그리고 식(4-3)을 식(4-11)에 대입하면 식(4-7)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\Delta v_i^* = -R^{-1} [ p_{12}(y_i - y_i^d) + p_{22}(\dot{y}_i - \dot{y}_i^d) ]$$

여기서  $p_{12}$ 와  $p_{22}$ 는 식(4-11)으로 부터 다음과 같이

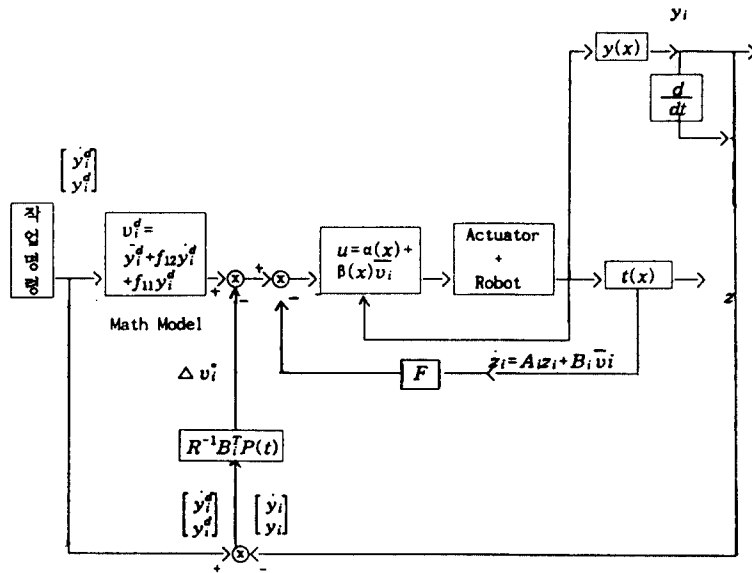


그림 4. 매니플레이터의 최적 제어법을 나타낸 블록선도.  
Fig. 4. Block diagram of the optimal control method.

구할 수 있다.

$$p_{12} = -Rf_{i2} \pm R\sqrt{f_{i2}^2 + q_{11}}R^{-1}$$

$$p_{22} = -2Rf_{i2} \pm R\sqrt{4f_{i2}^2 - (2f_{i2} \mp 2\sqrt{f_{i2}^2 + q_{11}} - q_{22})R^{-1}}$$

### V. 시뮬레이션 및 검토

본 장에서는 사례대상으로 JPL-Stanford 로봇 매니플레이터를 동특성 모델로 선정하였으며 계산의 간략화를 위해서 JPL-Stanford 로봇 매니플레이터의 6관절중에서 4, 5, 6관절은 물체를 쥘 동일한 자세로 가정하고 처음의 1, 2, 3관절만을 고려하였다. 또한 각 관절을 구동시키는 조작기는 D. C. 서보모터 GLOBE형 102A200-8을 선정하였다.<sup>(1)</sup> 한편 매니플레이터의 그리퍼가 희망하는 경로생성을 하기 위해 그림 5와 같이 평면에서의 동작 또는 직선운동 대신에 평면과 45°의 각을 이루며 반경 R(=0.6[m])인 원을 각속도 ω로 주기 T=6초로 하여 움직이는 경로를 선정하였다.

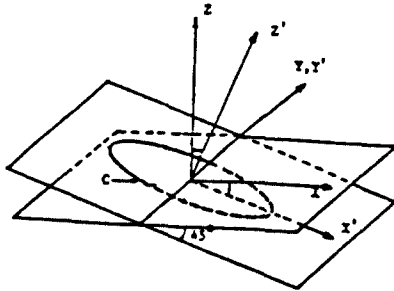


그림 5. 직각좌표계에서 원하는 경로.  
Fig. 5. Desired path in Cartesian coordinate frame.

$$\begin{bmatrix} y_1^d \\ y_2^d \\ y_3^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ -0.5R\cos\omega t \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

$$\begin{bmatrix} y_4^d \\ y_5^d \\ y_6^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^d \\ y_2^d \\ y_3^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ -0.5R\cos\omega t \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

또한 부하(payload)는 1kg으로 두었으며 매니플레이터의 최적경로제어에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 행하는데 있어서 좌표공간상에서 최대위치오차와 속도오차는 정상상태에서 그리퍼의 최대위치오차 및 속도오차값을 의미한다. 그리고 실제 모델과 계산된 모델과의 매개변수 오차를 5%와 10%에 대하여 고려하였으며 시뮬레이션 결과 작업장에서 희망하는 궤적을 따라 움직이는 동안 위치오차를 그림 6, 그림 7에 도시되었다. 또한 속도오차를 그림 8, 그림 9와 같다. 이러한 결과로 정상상태에서 주어진 경로를 추적하고 있음을 알 수 있다.

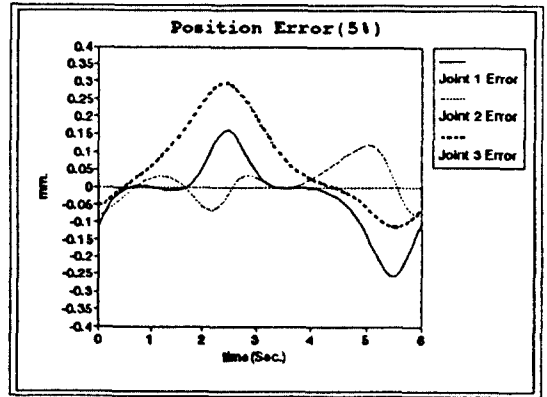


그림 6. 위치오차(오차율 5%).  
Fig. 6. Position error(variation 5%)

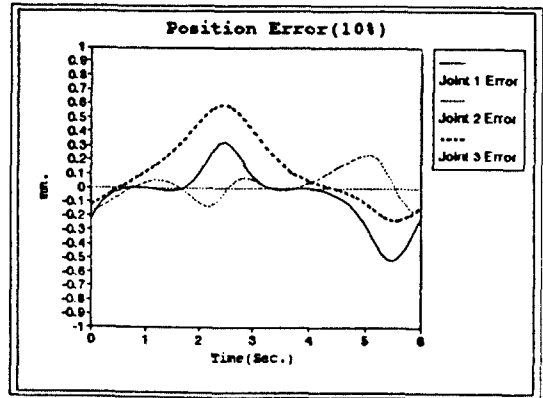


그림 7. 위치오차(오차율 10%).  
Fig. 7. Position error(variation 10%)



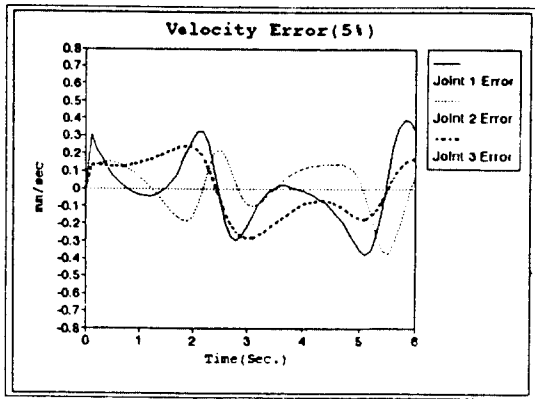


그림 8. 속도오차(오차율 5%).  
Fig. 8. Velocity error(variation 5%)

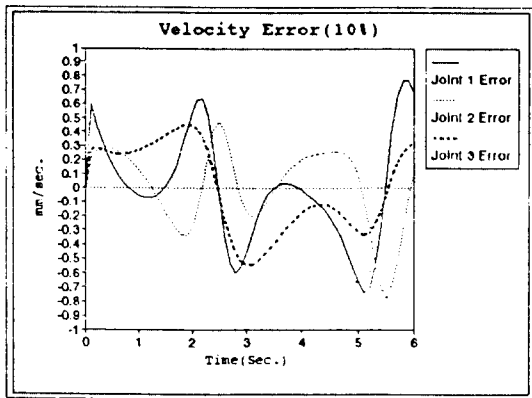


그림 9. 속도오차(오차율 10%).  
Fig. 9. Velocity error(variation 10%)

한편 조작기를 포함하지 않은 경우와 조작기를 포함하면서 인덕턴스를 무시한 경우와 인덕턴스를 고려한 3차계에 있어서 최대위치오차와 최대속도오차를 표 1.에서 비교하였다. 또한 인덕턴스를 고려한 3차계와 인덕턴스를 고려하지 않은 2차계의 비선형계환시에 계산량의 비교를 표 2.에서 나타내었다. 표 1.에서 인덕턴스를 고려하지 않은 2차계는 인덕턴스를 고려한 3차계보다 최대위치오차 및 최대속도오차가 약 10%가 크지만 표 2.에서 나타낸 계산량의 부담에 있어서 계산속도는 매우 빨리 실시간 제어가 가능하다.

표 2. 계산량 비교표

Table 2. Comparison of Computational Loads.

	2차계 제어기			3차계 제어기		
	1관절	2관절	3관절	1관절	2관절	3관절
곱셈, 나눗셈의 수	39	39	17	113	107	59
덧셈, 뺄셈의 수	17	17	17	57	52	42

## VI. 결 론

본 연구에서는 조작기가 포함된 강체 로봇트 매니플레이터에 대하여 최적제어기법을 적용하여 매니플레이터가 희망하는 경로를 추종할 수 있게 하는 최적 경로 추종제어기를 설계하였다. 먼저 매니플레이터의 동특성모델과 조작기의 동특성 모델을 결합한 3차 동력학방정식을 구한후 회전자 인덕턴스를 무시하여 매니플레이터의 동특성모델과 조작기의 동특성 모델을 결합한 2차계로 표현되는 새로운 전체 시스템의 모델 알고리즘을 구한후 제안된 알고리즘을 선형화로 유도하기 위하여 비선형계환 및 선형화기법을 이용하여 상호감결합된 선형시스템으로 변환하였다. 이때 감결합된 시스템방정식과 출력방정식을 공간상

표 1. 오차비교표.

Table 1. Comparison of error.

	조작기를 포함하지 않은 2차계	조작기를 포함한 2차계( $L_i = 0$ )	조작기를 포함한 3차계( $L_i \neq 0$ )
최대위치오차(5%) [mm]	3.5812	0.2959	0.0313
최대위치오차(10%) [mm]	4.7891	0.5941	0.0618
최대속도오차(5%) [mm/s]	4.5793	0.3896	0.0338
최대속도오차(10%) [mm/s]	3.5487	0.7843	0.0415

의 각각의 위치변수에 대하여 독립적인 부시스템으로 구성시켜 계산량의 부담을 줄였으며, 상수불록 대각행렬인 선형제환 이득을 가해 주므로써 부시스템의 안정도를 개선하였다.

또한 제안된 알고리즘을 JPL-Stanford 매니플레이터에 적용하여 경로오차를 최소화하는 제어방법을 제시하였고, 매니플레이터가 희망하는 경로를 따라 움직이는 동안 각 관절에 공급되는 입력전압을 최적 제어하여 효과적인 전압제어를 가능케 하였다.

제안된 알고리즘의 타당성을 입증하기 위하여 희망하는 경로를 따라 움직이도록 컴퓨터 시뮬레이션을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 제안된 알고리즘은 부하의 변화나 외란에도 불구하고 강인한 제어를 할 수 있다.
- 2) 매개변수의 오차가 있더라도 위치 및 속도 제어는 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다.
- 3) 회전자의 인덕턴스를 고려한 3차계 보다 인덕턴스를 무시한 2차계에 있어서 최대 위치오차 및 최대속도오차는 약 10%가 크지만 계산량의 부담이 적어 실시간 제어가 가능하다.

앞으로의 연구과제는 매개변수 설정에 대한 최적화 문제와 선형제환 시켜주는 안정도 문제 그리고 계산속도에 관련된 문제를 고려하고자 한다.

### 참 고 문 헌

1. Vukobratovic, M., Potkonjak. "Dynamics of Manipulation Robot : Theory and Application." Springer-Verlag, 1982.
2. Goor, M.Roert. "A New Approach to Minimum

Time Robot Control." Research Publication GMR-4896, 1984.

3. Guez, Allon, "Optimal Control of Robotic Manipulators," Ph.D Dissertation, University of Florida in Gainesville, Florida. 1983.
4. T.J.Tarn, Z.Li, A.K.Bejczy, X.Yun, "Nonlinear Robot Arm Control Through Third order Moter Model." IFAC Robot Control Karlsruhe, FRG. pp.55-58. 1988.
5. A.K. Bejczy, "Robot Arm Dynamics and Control," JPL Technical Memorandum 33-669, 1974.
6. 김학범, 이양범, "조작기의 동특성을 고려한 로봇트 매니플레이터의 최적제어," 제어계측연구회 합동 학술발표회 논문집, pp.47-52, 1993.
7. 김학범, 이양범, "액츄웨이터의 동적특성을 고려한 비선형 로봇트 매니플레이터의 모델링에 관한 연구," 대한전기학회 하계학술대회 논문집, pp.354-358, 1992.
8. M. Vukobratovic, D. Stokic, Control of Manipulation Robots, Spring Verlag Verin, 1982.
9. A.K. Bejczy, "Dynamic Models and Control Equations for Manipulators," JPL Report 715-19, November 30, 1979.
10. Chen Yilong, "Nonlinear Feedback and Computer Control of Robot Arms" Washington University, Ph.D Disertation, 1984.
11. W. K. Chung, "On the Dynamic Characteristics and Control of Blanced Robotic Manipulators," Ph. Dissertation, K.I.S.T., 1987.



**金學範(Hak Pom Kim)** 정희원  
 1986년 : 경북대학교 공과대학 전자공학과(공학사)  
 1988년 : 울산대학교 대학원 전기공학과(공학석사)  
 1991년 : 울산대학교 대학원 박사과정 수료  
 1991년 9월 ~ 현재 : 상지전문대 전자과 전임강사

※주관심분야 : Adaptive Control, Optimal Control, Robotics, Computer Vision System



**李陽範(Yang Bum Lee)** 정희원  
 1975년 : 한양대학교 전기공학과(공학사)  
 1977년 : 한양대학교 대학원 전기공학과(공학석사)  
 1985년 : 한양대학교 대학원 전기공학과(공학박사)  
 1980년 9월 ~ 현재 : 울산대학교 전기공학과 교수

1991년 1월 ~ 1992년 2월 : The State of Pennsylvania University 객원교수

※주관심분야 : Multivariable Control, Robotics Kalman Filter, Computer vision system