

# LMS 적응 알고리즘의 스텝크기의 적정 범위에 관한 연구

正會員 朴 英 哲\* 正會員 鄭 昌 京\*\* 正會員 車 均 鉉\*\*\*

## Optimal Range of the Step Size in LMS Adaptive Algorithm

Young Chull Park\*, Chang Kyung Chung\*\*, Kyun Hyon Tchah\*\*\* *Regular Members*

### 要 約

본 논문에서는 LMS 적응 알고리즘의 수렴하기 위한 스텝크기의 적정 범위를 등화기 계수의 양자화 오차와 초과 MSE 를 고려하여 새로 제시하였으며 이의 타당성을 트랜스버설 등화기의 시뮬레이션을 통해 보였다.

### Abstract

This paper presents a new optimal range of the step size to converge LMS adaptive algorithm considering quantization error of equalizer coefficient and excess MSE. And the simulation of transversal equalizer shows the propriety of it.

### I. 서 론

디지털 통신의 수신기는 두가지의 필터 역할을 하여야한다. 하나는 부가잡음의 영향을 감소시키는 정합필터이며, 다른 하나는 전송로의 왜곡에 의하여 발생하는 부호간 간섭(ISI : intersymbol interference)의 영향을 감소시키는 필터로써 등화기(equalizer)가 이에 해당한다. 등화기에는 프리세트형 등화기(preset equalizer)와 적응 등화기(adaptive equalizer)가 있으며<sup>[1]</sup> 적응 등화기는 데이터 전송전에 일련의 시험펄스(training pulse)를 전송하여 변화하는 채널 특성에 따라 탭 계수를 조정하므로써 부호간 간섭을

최소화 시키게 되며 탭 계수의 최적치는 실제로 반복법(iteration procedure)에 의하여 구한다. 반복법은 탭 계수를 적당한 초기값으로 출발하여 점점 계수값을 자동적으로 수정하면서 최적값에 도달시키는 방법으로 회로구성이 용이하며 실용성이 높다. 등화기의 종류에 따라 사용되는 알고리즘은 그림 1과 같다.<sup>[2]</sup>

그림 1에서 보듯이 LMS 적응 알고리즘은 구조가 간단하고 구현이 용이하여 많이 사용되고 있으며 탭 계수를 수렴하기 위한 스텝의 크기  $\mu$  의 범위는 식 (1)과 같이 알려져있다.<sup>[1][3]</sup>

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (1)$$

여기서  $\lambda_{\max}$  는  $\mathbf{R}$  의 최대 고유치,  $\mathbf{R} = E[\mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T]$ 이

\* 大宥工業專門大學 電子通信科

\*\* 明知大學校 電氣工學科

\*\*\* 高麗大學校 電波工學科

論文番號 : 93-19

며,  $X_k$ 는 등화기에 입력되는 신호벡터이다. 그러나 식(1)은 디지털 구현시<sup>[4]</sup> 양자화 오차와 초과 MSE (excess MSE)를 고려하면 그범위가 축소되어야 한다.

따라서 본 논문에서는 양자화 오차와 초과 MSE 고려시 등화기의 탭 계수를 수렴시키기 위한 LMS 적용 알고리즘의 스텝 크기의 적정 범위를 제시하도록 한다.

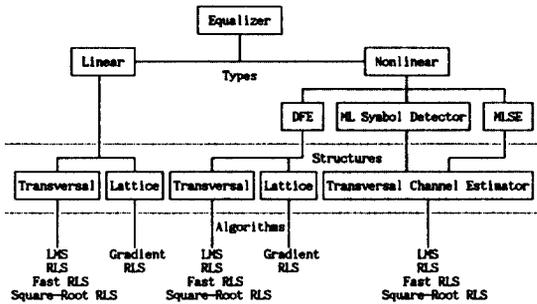


그림 1. 등화기의 종류, 구조 및 알고리즘  
Fig 1. Equalizer types, structures, and algorithm

## II. LMS 알고리즘

LMS 알고리즘은 Widrow<sup>[3]</sup>에 의해 제안이 되었으며 steepest descent 방법을 이용한 것으로 사용범위가 제한되어 있으나 간단하며 계산이 용이하다. 그림 2의 트랜스버설 등화기로부터 LMS 알고리즘의 주요 관계식을 살펴보면 다음과 같다. 위의 그림에서 시간  $k$ 에서의 오차신호는

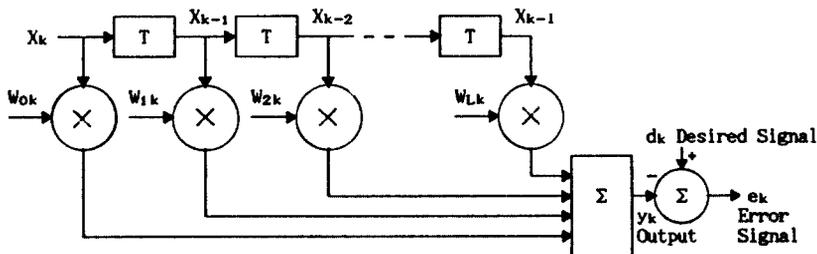


그림 2. 트랜스버설 등화기  
Fig 2. Transversal Equalizer

$$e_k = d_k - y_k \quad (2)$$

이며, 여기서

$$y_k = \sum_{i=0}^L W_{ik} X_{k-i}$$

$$W_k = [W_{0k} \ W_{1k} \ W_{2k} \ \dots \ W_{Lk}]^T$$

$$X_k = [X_k \ X_{k-1} \ X_{k-2} \ \dots \ X_{k-L}]^T$$

이므로

$$y_k = X_k^T W_k = W_k^T X_k \quad (3)$$

이다. 따라서

$$e_k = d_k - X_k^T W_k = d_k - W_k^T X_k \quad (4)$$

가 되어 순서 자승오차는

$$e_k^2 = d_k^2 + W_k^T X_k X_k^T W_k - 2d_k X_k^T W_k \quad (5)$$

가 된다. 여기서  $e_k$ ,  $d_k$  와  $X_k$  를 통계적 정제성 (statistically stationary)이라고 가정하고 시간  $k$ 에 대하여 기대치를 구하면 임의의 변수의 합의 기대치는 기대치의 합과 같으며, 변수들이 통계적 독립인 경우 곱의 기대치는 기대치 곱과 같고 신호  $X_k$  와  $d_k$ 는 일반적으로 독립이 아니므로

$$E[e_k^2] = E[d_k^2] + W_k^T E[X_k X_k^T] W_k - 2E[d_k X_k^T] W_k \quad (6)$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= E[\mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T] = E \\
 & \begin{bmatrix}
 X_{0k}^2 & X_{0k}X_{1k} & X_{0k}X_{2k} & \cdots & X_{0k}X_{Lk} \\
 X_{1k}X_{0k} & X_{1k}^2 & X_{1k}X_{2k} & \cdots & X_{1k}X_{Lk} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 X_{Lk}X_{0k} & X_{Lk}X_{1k} & X_{Lk}X_{2k} & \cdots & X_{Lk}^2
 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{P} = E[\mathbf{d}_k \mathbf{X}_k] = E[\mathbf{d}_k X_{0k} \mathbf{d}_k X_{1k} \cdots \mathbf{d}_k X_{Lk}] \quad (8)$$

라고 정의하면 MSE(mean square error)는 다음과 같이 간략하게 표현된다.

$$\text{MSE} = \xi = E[e_k^2] = [d_k^2] + \mathbf{W}_k^T \mathbf{R} \mathbf{W}_k - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}_k \quad (9)$$

즉 MSE  $\xi$  는 등화기 계수벡터  $\mathbf{W}$  의 2차 함수이다.

Steepest descent 방법에서

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + \mu(-\nabla_k) \quad (10)$$

이므로 gradient  $\nabla_k$  는 식 (4)로 부터 구하여 적용하면

$$\nabla_k = \frac{\partial e_k^2}{\partial \mathbf{W}_k} = 2e_k \frac{\partial e_k}{\partial \mathbf{W}_k} = -2e_k \mathbf{X}_k \quad (11)$$

이다. 따라서 식 (11)을 식 (10)에 대입하고 계수 2를  $\mu$ 에 포함시켜 고려하면

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + \mu e_k \mathbf{X}_k \quad (12)$$

이를 LMS 알고리즘이라 하며, 여기서 탭 계수가 수렴하기 위한 스텝의 크기  $\mu$ 의 범위는 앞서의 식 (1)과 같다.

### III. 스텝 크기의 적정 범위

알고리즘의 성능평가 방법에는 초과 MSE, misadjustment, learning curve 및 시정수등이 있으나<sup>[3][5]</sup> 초과 MSE가 대표적이므로  $\mu$ 의 범위를 구하는데 이를 사용한다. MSE는 앞서의 식 (9)와 같이 표현되며 반복법에 의하여  $\xi_{\min}$ 으로 수렴되므로 이를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\xi_k = \xi_{\min} + \xi_{\text{excess}} \quad (13)$$

여기서 초과 MSE는 다음과 같이 정의한다.

$$\text{초과 MSE} = E[\xi_k - \xi_{\min}] \quad (14)$$

또한 식 (13)은 디지털 구현시 양자화 오차를 고려하여야 하므로

$$\xi = \xi_{\min} + \xi_{\text{excess}} + \xi_q \quad (15)$$

로 표현되어야 하며  $\xi_q$ 는 양자화 오차에 의한 MSE이다.<sup>[1][6]</sup>  $\xi_{\text{excess}}$ 는  $\mu$ 가 증가함에 따라 증가하며  $\xi_q$ 는  $\mu$ 가 증가함에 따라 감소한다. 이것을 그래프로 나타내면 그림 3과 같다. 따라서 그림 2의 트랜스버설 등화기에서 양자화 오차를 고려한 MSE를 구하면 다음과 같다.<sup>[6]</sup>

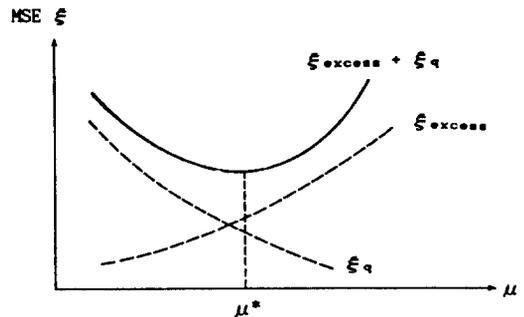


그림 3. 스텝크기  $\mu$ 에 따른 MSE  $\xi$   
 Fig 3. Step size  $\mu$  vs. MSE  $\xi$

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi_{\min} + \frac{1}{2} \mu \xi_{\min} \text{tr} \mathbf{R} + \frac{|\mathbf{W}^*|^2 \sigma_c^2}{2\mu} + \frac{1}{4} \xi_{\min} N \sigma_c^2 \\
 &+ \left[ 2 \sum_{k=1}^N R_{kk} (\mathbf{W}^{*k})^2 + C \right]
 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서  $\text{tr} \mathbf{R} = \mathbf{R}$ 의 trace

$\mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}$  로 등화기 탭의 최적계수

$N$  = 등화기 탭의 수

$\sigma_c$  = 등화기의 계수의 분산

$R_{kk}$  =  $\mathbf{R}$ 의  $(k, k)$ 번째 성분

$\mathbf{W}^{*k} = \mathbf{W}^*$ 의  $k$ 번째 성분

$C = \mathbf{R}$ 과  $\mathbf{W}^*$ 로 주어지함수

이다.  $\xi$ 가 최소가 되는  $\mu$ 의 최적치  $\mu^*$ 를 구하면

$$\mu^* = \frac{\sigma_c |W^*|}{\sqrt{\xi_{\min} \text{tr}R}} = \frac{2^{-B_c} |W^*| \sqrt{0.18}}{\sqrt{\xi_{\min} \text{tr}R}} \quad (17)$$

가 된다. 여기서  $B_c$ 는 등화기 계수의 부호비트를 제외한 비트수이다.

그러나 디지털 구현시 부동소숫점 표현법을 사용하면 계수는 다음식에 의하여 반복법에 의해 최적치로 개선되어진다.

$$W_{k+1} = \mu [W_k + \mu X_k e_k] \quad (18)$$

따라서 식 (18)이 새로운 값으로 개선되기 위해서는

$$|\mu X_k^i e_k| > 2^{-B_c - 1} |W_k^i| \quad (19)$$

가 되어야 하며  $X_k^i$  와  $W_k^i$ 는 각각  $X_k$  와  $W_k$ 는  $i$ 번째 성분이다.  $X_k$ ,  $W_k$  와  $e_k$ 를 각각  $X_{rms}$ ,  $W^*$ 와  $[E(e_k^2)]^{1/2}$ 로 대체하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\mu^2 X_{rms}^2 E(e_k^2) > \frac{2^{-2B_c}}{4} |W^*|^2 \quad (20)$$

여기에  $\mu = \mu^*$ 를 대입하면

$$\mu^2 X_{rms}^2 E(e_k^2) > \frac{2^{-2B_c} (0.72) |W^*|^2}{4} (1 + \frac{1}{2} \mu \text{tr}R) \quad (21)$$

이 되며  $(0.72 |W^*|^2 / N)(1 + \mu \text{tr}R / 2)$ 의 상한값은  $(1.44 |W^*|^2 / N)$ 으로 이는  $W^*$ 에 대하여 반드시 성립하지는 않으나 계수의 벡터 성분이 개선되는 빈도수는 매우 적으므로  $\mu$ 를  $\mu^*$ 와 같거나 작게 택하면 알고리즘은 완전히 수렴하기 전에 정지하여 버리므로

$$\mu > \mu^* \quad (22)$$

가 되도록 선택하여야 한다.

또한  $\mu$ 가 큰 경우 그림 3에서 알 수 있듯이  $\xi_{\text{excess}} \gg \xi_q$ 가 되며 misadjustment를 다음과 같이 정의한다.<sup>[3]</sup>

$$M = \frac{\text{초과 MSE}}{\xi_{\min}} \approx \frac{\mu}{2} \text{tr}R \quad (23)$$

많은 설계에 있어 misadjustment를 10%로 허용하는 것이 적당하므로 이를 식 (23)에 적용하면

$$\mu < \frac{0.2}{\text{tr}R} \quad (24)$$

이 된다. 따라서 식 (22)와 식 (23)에 의해서 LMS 알고리즘이 수렴하기 위한 스텝 크기의 적정 범위는

$$\mu^* < \mu < \frac{0.2}{\text{tr}R} \quad (25)$$

가 되어야 한다.

#### IV. 시뮬레이션 및 결과

본 절에서는 그림 4의 트랜스버설 등화기<sup>[3]</sup>의 시뮬레이션을 통해 식 (25)의 스텝크기  $\mu$ 의 적정범위와 MSE  $\xi$ 와의 관계를 알아보았다.

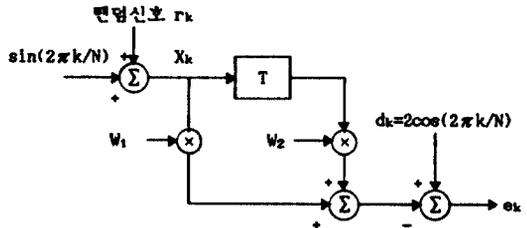


그림 4. 시뮬레이션을 위한 트랜스버설 등화기  
Fig 4. Transversal equalizer for simulation for simulation

여기서 등화기 계수의 비트수  $B_c$ 는 15, 샘플링 수  $N$ 은 16, 랜덤신호의 전력은 0.01로 하였으며 등화기 계수  $W_1, W_2$ 의 초기치는 모두 0으로 하였다. 이 경우  $\xi_{\min}$ 은 0.4가 되며 스텝 크기  $\mu$ 의 범위는

$$0.7488 \times 10^{-15} < \mu < 0.196$$

이 되므로  $\mu$ 를  $0.7488 \times 10^{-15}, 0.1, 0.4$ 의 세가지 경우에 대해서 MSE  $\xi$ 의 수렴 정도를 알아보았으며 그 결과는 그림 5와 같다. 그림 5에서 알 수 있듯이  $\mu = 0.7488 \times 10^{-15}$ 인 경우  $\xi$ 는 2로 고정되어 수렴이 일어나지 않았으며,  $\mu = 0.4$ 인 경우는 최소값으로 수렴되는 정도는 빠르나 리플발생이 심하고 최종적으로  $\xi_{\min}$ 보다 10% 이상 벗어났다.  $\mu = 0.1$ 인 경우 수렴정도가  $\mu = 0.$

4인 경우 보다는 느리나 리플 발생정도가 양호하며 최종적으로  $\xi_{min}=0.4$ 에 가장 근접하게 수렴되었다. 따라서 식 (25)의  $\mu$ 의 범위는 적절함을 알 수 있다. 표1에 각  $\mu$ 의 크기에 대해서 반복 횟수를 495회 실시하였을 경우의  $\xi$ 값을 나타내었다.

표 1. 각  $\mu$ 에 대한  $\xi$ 의 수렴값  
Table. 1. Convergence value  $\xi$  at each  $\mu$

반복횟수 k	$\mu$	$\xi$
495	$7.488 \times 10^{-15}$	2.0
	0.1	0.410937
	0.4	0.505916

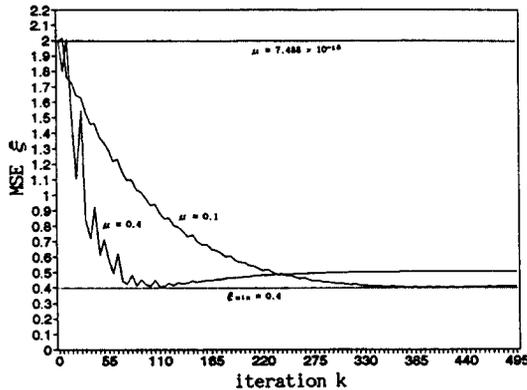


그림 5. 시뮬레이션 결과  
Fig 5. Simulation result

### V. 결 론

본 논문에서는 steepest descent 방법을 이용한 LMS 적응 알고리즘에 있어서 등화기 계수에 수렴을 위한 스텝 크기  $\mu$ 의 적정 범위에 관하여 논하였다. 일반적으로 알고있는 식 (1)의 범위는 등화기의 디지털 구현시 계수의 양자화 오차와 초과 Mse를 고려할 때 그범위가 축소되어야 한다. 더우기 MSE를 최소로 하는  $\mu$ 의 최적치  $\mu^*$ 는 양자화 오차를 고려할 때 MSE 수렴을 가져오지 않을 뿐 아니라 변화시키지 않으므로 LMS 알고리즘에서 이는 적절한 스텝 크기가 아니다. 즉  $\mu > \mu^*$ 의 스텝 크기에서만 알고리즘은 수렴한다. 또한 수렴된 MSE  $\xi$ 는 이상적으로  $\xi_{min}$ 이 되어야 하나 실제로 그 가까이로 수렴되므로 최종적

수렴된  $\xi$ 는  $\xi_{min}$  보다 10% 이상 크지 않아야 한다. 따라서 이상의 결과를 고려할 때 LMS 적응 알고리즘에서 실제적인 스텝크기  $\mu$ 의 범위는 식 (25)가 되어야 한다.

### 참 고 문 헌

1. J. G. Proakis, Digital Communications, McGraw-Hill, 1989, 2nd ed.
2. J. G. Proakis, "Adaptive Equalization for TDMA Digital Mobile Radio", IEEE Trans. Veh. Technol., vol. 40, No. 2, pp 333-341, May 1991.
3. B. Widrow et al., Adaptive Signal Processing, Prentice-Hall, 1985.
4. R. D Gitlin et al., "On the Design of Gradient Algorithms for Digitally Implemented Adaptive Filters", IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-20, No. 2, pp 125-136, Mar. 1973.
5. B. Widrow et al., "A Roundoff Error Analysis of the LMS Adaptive Algorithm", Proc. IEEE, vol. 64, No. 8, pp 1151-1162, Aug. 1976.
6. C. Caraiscos et al., "A Roundoff Error Analysis of the LMS Adaptive Algorithm", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-32, No. 1, pp 34-41, Feb. 1984.



朴 瑛 哲 (Young Chull Park) 正會員

1958年 7月 27日生

1981年 2月 : 高麗大學校 電子工學科 卒業(工學士)

1987年 2月 : 高麗大學校 大學院 電子工學科(工學碩士)

1987年 2月 ~ 1989年 9月 : 三星半道體通信 通信研究所 無線研究室 研究員

1993年 2月 : 高麗大學校 大學院 電子工學科 卒業(工學博士)

1991年 3月 ~ 現在 : 大宥工業專門大學 電子通信科 轉任講師

※主關心分野 : 디지털 移動通信



鄭 昌 京(Chang Kyung Chung) 正會員

1951年 10月 10日生

1974年 2月 : 高麗大學校 物理學科  
卒業(理學士)

1977年 9月 : 高麗大學校 大學院 電  
子工學科 卒業(工學碩  
士)

1987年 2月 : 高麗大學校 大學院 電  
子工學科 卒業(工學博  
士)

1989年 8月 ~ 1990年 8月 : 美國 스탠포드大學校 Post Doc.

1981年 3月 ~ 現在 : 明知大學校 電氣工學科 教授

※主關心分野 : 디지털 信號處理 및 디지털 移動通信



車 均 鉉(Kyun Hyon Tchah) 正會員

1939年 3月 26日生

1965年 : 서울大學校 工學士

1967年 : 美國 일리노이大學校 工學  
碩士 學位取得

1976年 : 서울大學校 工學博士 學位  
取得

1977年 ~ 現在 : 高麗大學校 工科大  
學 電波工學科 教授

※主關心分野 : CAD 및 通信시스템 等