응용통계연구 제 6권 1호
1993년 3월 pp. 105 - 123

모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도[1]

김 혁 주[2]

요 약

반응표면의 기울기를 추정하기 위한 실험계획법이 가질 수 있는 바람직한 성질로, Hader와 Park(1978)이 제시한 "축 방향에 걸친 기울기 회전성"과, Park(1987)이 제시한 "모든 방향에 걸친 기울기 회전성"이 있다. 또한 주어진 임의의 실험계획에 대하여 축 방향에 걸친 기울기 회전성의 정도를 수치로 나타낼 수 있는 측도(measure)가 Park과 Kim(1992)에 의해 제시된 바 있다. 본 논문에서는 반응표면 실험계획법이 가지고 있는 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 정도를 알 수 있게 해 주는 측도를 개발하였다. 또한 이 측도를 여러 종류의 계획들에 적용하여 결과를 관찰하였다. 이 측도의 장점 중의 하나는 어떠한 계획에도 적용이 가능하다는 점이다.

1. 서 론

반응표면분석 (response surface analysis) 은 여러 개의 독립변수가 작용함으로써 어떤 종속변수에 영향을 주고 있을 때, 이러한 반응의 변화가 이루는 반응표면에 대한 수학적 · 통계학적인 분석방법을 말한다. 독립변수는 흔히 설명변수라고도 불리며, 종속변수는 흔히 반응변수라고도 한다.

반응변수 η가 k 개의 설명변수 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$의 영향을 받고 있는 시스템을 생각하자. 예를 들어, 화학자가 어떤 화학반응에서의 반응량에 관심을 갖고 있는 경우 반응량이 반응온도와 반응습도, 그리고 반응압력의 영향을 받는다면, 반응온도(ξ_1)와 반응습도(ξ_2), 그리고 반응압력(ξ_3)이 설명변수이고 반응량(η)이 반응변수가 된다.

일반적으로 설명변수들과 반응변수 사이의 함수적 관계는

$$\eta=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$$

로 나타낼 수 있으며, 여기서 함수 f 의 형태는 알려져 있지 않거나, 알려져 있더라도 매우 복잡해서 실용성이 거의 없는 경우가 많다. 따라서 반응표면분석에서는 설명변

1) 본 연구는 1991년도 한국과학재단 연구비 지원에 의한 결과임. (KOSEF 913-0105-006-1)

2) (570-749) 전라북도 이리시 신용동 344-2 원광대학교 통계학과 조교수

수들의 적절한 영역 안에서 함수 f 를 저차의 다항식으로 근사시켜서 나타내게 된다. 다시 말해서, 반응변수 η가 원점이 흥미영역 (region of interest) 의 중앙에 오도록 코딩된 k 개의 설명변수 $x_1, x_2, \cdots, x_k$의 저차식 (1차식 또는 2차식)으로 충분히 근사하게 표현된다고 가정한다. 코딩된 변수 x_i는 원래의 변수 ξ_i의 간단한 선형함수이다.

본 논문에서는 일반적으로 가장 많이 쓰이는 모형인 2차 모형

$$\eta(\underline{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{k} \beta_{ij} x_i x_j$$

을 가정한다. 벡터를 써서 나타내면 다음과 같다.

$$\eta(\underline{x}) = \underline{x}_s{}' \underline{\beta} .$$

여기서 $1 \times k$ 벡터 $\underline{x}' = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$, $1 \times m$ 벡터 $\underline{x}_s{}' = (1, x_1, x_2, \cdots, x_k, x_1^2, x_2^2, \cdots \cdots, x_k^2, x_1 x_2, \cdots, x_{k-1} x_k)$이며, $\underline{\beta}$ 는 대응하는 회귀계수들로 이루어진 $m \times 1$벡터이다. (단, $m=(k+1)(k+2)/2$)

회귀계수들은 반응변수의 관찰값들

$$y_u = \eta(\underline{x}_u) + \varepsilon_u \, (u = 1, 2, \cdots, N)$$

로부터 최소제곱법 (method of least squares) 에 의하여 추정된다. ε_u 들은 평균이 0 이고 일정한 분산 σ^2 을 가지며 서로 상관관계가 없는 랜덤 오차항들이다. 실험점들에서 취해진 $\underline{x}_s{}'$ 의 m개의 원소의 값들로 이루어진 $N \times m$ 행렬을 X라 하고, y의 관찰값들로 이루어진 $N \times 1$ 벡터를 $\underline{y}$ 라 하면 $\underline{\beta}$의 최소제곱추정량은

$$\underline{b} = (X'X)^{-1} X' \underline{y}$$

임이 잘 알려져 있다.

$\eta(\underline{x})$를 추정하기 위한 적합된 방정식은

$$\hat{y}(\underline{x}) = \underline{x}_s{}' \underline{b}$$

이고 이것의 분산은

$$Var(\hat{y}(\underline{x})) = \sigma^2 \, \underline{x}_s{}' (X'X)^{-1} \, \underline{x}_s$$

이다. 따라서 $Var(\hat{y}(\underline{x}))$는 $\underline{x}' = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$의 함수이며, 또한 주어진 실험계획의 함수이다.

반응표면분석을 위한 실험계획이 가질 수 있는 바람직한 성질 중 회전성 (rotatability)이라는 것이 있다. 만약 $\hat{y}(\underline{x})$의 분산이 중심점 (0,0, ⋯,0) 으로부터 점 $\underline{x}$ 까지의 거리

$$\rho = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2}$$

만의 함수라면, 이와 같은 결과를 주는 실험계획을 회전계획이라고 한다. 즉 회전계획에서는 중심점으로부터 같은 거리만큼 떨어진 모든 점 $\underline{x}$ 에서 $Var(\hat{y}(\underline{x}))$가 같은 값을 갖는다. 회전성의 개념은 Box 와 Hunter (1957) 에 의하여 처음 소개되었다. 또한 주어진 실험계획이 가지고 있는 회전성의 정도를 나타내 주는 측도 (measure) 들이 Khuri (1988), Draper 와 Guttman (1988), Draper 와 Pukelsheim (1990) 에 의하여 만들어졌다.

최근에는, 반응표면분석을 위한 실험을 계획하는 데에 있어서, 반응변수의 값 자체보다 두 점에서의 반응량의 차이를 추정하는 문제에 관심이 고조되고 있다. 이 문제는 반응표면의 기울기를 추정하는 문제와 직결되는 것이다. Atkinson (1970)이 이 분야를 개척하는 연구를 하였으며, Ott 와 Mendenhall (1972), Murty 와 Studden (1972), Myers 와 Lahoda (1975), Hader 와 Park (1978), Box 와 Draper (1980), Huda 와 Mukerjee (1984,1985), Park (1987) 등이 이 문제를 다루었다.

기울기를 추정하는 문제는 실제적인 상황에서도 자주 일어난다. 예를 들면, 화학실험에서 반응속도를 추정하는 경우, 여러 종류의 비료에 대한 농작물수확량의 변화율을 추정하는 경우, 어떤 동물에 있는 방사성 물질의 분해 속도를 추정하는 경우 등이다.

반응표면의 기울기를 추정하기 위한 실험계획이 가질 수 있는 바람직한 성질로, Hader 와 Park (1978)은 "축 방향에 걸친 기울기 회전성 (slope rotatability over axial directions)" 을 제시하였으며, Park (1987)은 "모든 방향에 걸친 기울기 회전성 (slope rotatability over all directions)"을 제시하였다. 이 성질들에 관해서는 다음 장에서 간략히 알아 볼 것이다. 그런데 이 성질들을 완전히 갖지 않는 실험계획도 많기 때문에, 임의의 계획이 주어졌을 때 그 계획이 갖고 있는 기울기 회전성의 정도를 수치로 나타낼 수 있는 측도가 필요하다. 이러한 필요성에서 축 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도가 Park 과 Kim (1992)에 의하여 만들어졌다. 이 측도는 반응표면 실험계획들이 가지고 있는 축 방향에 걸친 기울기 회전성의 정도를 평가・비교할 수 있게 해 준다.

본 논문에서는 반응표면 실험계획이 가지고 있는 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 정도를 알 수 있게 해 주는 측도를 개발하고 연구하는 것을 목적으로 한다.

2. 축 방향에 걸친 기울기 회전성과 그의 측도 및 모든 방향에 걸친 기울기 회전성

2.1 축 방향에 걸친 기울기 회전성

$\eta(\underline{x})$의 1차 도함수를 추정하는 데에 관심이 있는 경우를 생각하자. 2차 모형의 경우 x_i 에 대한 $\hat{y}(\underline{x})$의 1차 도함수는

$$\frac{\partial \hat{y}(\underline{x})}{\partial x_i} = b_i + 2b_{ii}x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} b_{ij}x_j$$

이며, 이 도함수의 분산은 도함수가 추정되는 점 $\underline{x}$ 의 좌표와 실험계획의 함수이다.

Hader 와 Park (1978)은 다음과 같은 성질을 제시하였다.

[C1] 각각의 i (i=1,2, ⋯,k)에 대하여 $Var(\partial \hat{y}(\underline{x})/\partial x_i)$는 원점에서 점 $\underline{x}$ 까지의 거리 $\rho=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2)^{1/2}$ 만의 함수.

[C2] 임의의 점 $\underline{x}$ 에 대하여

$$Var\left(\frac{\partial \hat{y}(\underline{x})}{\partial x_1}\right) = Var\left(\frac{\partial \hat{y}(\underline{x})}{\partial x_2}\right) = \cdots = Var\left(\frac{\partial \hat{y}(\underline{x})}{\partial x_k}\right).$$

이 성질들을 만족시키는 실험계획의 경우, 축 방향으로의 기울기의 추정은 계획의 원점으로부터 같은 거리에 있는 모든 점들에 대하여 동일한 신뢰도를 가질 것이다. Hader 와 Park (1978)은 이 성질들을 "축 방향에 걸친 기울기 회전성" 이라 불렀으며, 이 성질을 갖는 중심합성계획 (central composite design) 들을 제시하였다.

2.2 축 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도

어떤 실험계획이 축 방향에 걸친 기울기 회전계획이 되기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_k,$$

$$4v_{11} = 4v_{22} = \cdots = 4v_{kk} = v_{12} = v_{13} = \cdots = v_{k-1,k}\ ,$$

$$c_{i,ii} = c_{i,ij} = c_{ii,ij} = c_{ij,il} = 0\,(i \neq j \neq l \neq i).$$

여기서 표현을 간단히 하기 위하여 다음과 같은 표시법을 사용했다. 앞으로 계속 이

러한 표시법을 사용할 것이다.

$$
\begin{aligned}
v_i &= Var(b_i)\\
v_{ii} &= Var(b_{ii})\\
v_{ij} &= Var(b_{ij})\\
c_{i,ii} &= Cov(b_i, b_{ii})\\
c_{i,ij} &= Cov(b_i, b_{ij})\\
c_{ii,ij} &= Cov(b_{ii}, b_{ij})\\
c_{ij,il} &= Cov(b_{ij}, b_{il})
\end{aligned}
$$

Park 과 Kim (1992)은 주어진 임의의 실험계획에 대하여 축 방향에 걸친 기울기 회전성의 정도를 알 수 있게 해 주는 측도를 제시하였다. 이 측도는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
Q_k(D) = \frac{1}{2(k-1)\sigma^4}\Bigg[& (k+2)(k+4)\sum_{i=1}^{k}\left\{(v_i-\overline{v})+\frac{a_i-\overline{a}}{k+2}\right\}^2\\
&+\frac{4}{k(k+2)}\sum_{i=1}^{k}(a_i-\overline{a})^2+2\sum_{i=1}^{k}\left\{(4v_{ii}-\frac{a_i}{k})^2+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(v_{ij}-\frac{a_i}{k})^2\right\}\\
&+4(k+4)\sum_{i=1}^{k}(4c_{i,ii}^2+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}c_{i,ij}^2)+4\sum_{i=1}^{k}(4\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}c_{ii,ij}^2+\sum_{\substack{j<l\\ j,l\neq i}}^{k}c_{ij,il}^2)\Bigg]
\end{aligned}
$$

단, 여기서

$$
\begin{aligned}
\overline{v} &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}v_i\ ,\\
a_i &= 4v_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}v_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,k)\ ,\\
\overline{a} &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i
\end{aligned}
$$

이다.

주어진 실험계획 D가 축 방향에 걸친 기울기 회전계획인 경우에 측도 $Q_k(D)$는 0의 값을 취하며, D가 축 방향에 걸친 기울기 회전계획에서 멀어질수록 $Q_k(D)$는 큰 값을 갖는다. 이 측도 $Q_k(D)$는 어떠한 형태나 종류의 계획에도 적용될 수 있다는 장점을 갖는다.

2.3 모든 방향에 걸친 기울기 회전성

기울기를 추정하는 문제에서, 반응표면의 한 점 $\underline{x}$ 에서 축 방향으로 그은 접선의 기울기 뿐 아니라 임의의 방향으로 그은 접선의 기울기를 추정하는 데에 관심이 있는 경우도 많을 것이다. 이 기울기의 분산은 접점 $\underline{x}$ 의 좌표와 접선의 방향 및 실험

계획의 함수이다. 만일 모든 가능한 방향에 걸쳐 기울기의 분산을 평균한 값을 생각한다면 이 평균분산은 접점 $\underline{x}$ 의 좌표와 실험계획만의 함수가 된다. 그런데 실험계획을 선택함으로써 계획의 원점으로부터 같은 거리에 있는 모든 점들에 대하여 이 평균분산을 일정하게 할 수 있다. 이러한 성질을 모든 방향에 걸친 기울기 회전성이라 부른다.

Park (1987)은 모든 방향에 걸친 기울기 회전성을 제시하였으며, 이 성질을 갖기 위한 필요충분조건이 다음과 같다는 것을 보였다.

[1] 모든 i 에 대하여

$$2c_{i,ii}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} c_{j,ij}=0 \quad .$$

[2] $i\neq j$ 인 모든 (i,j) 에 대하여

$$2(c_{ii,ij}+c_{jj,ij})+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i,j}}^{k} c_{il,jl}=0 \quad .$$

[3] 모든 i 에 대하여

$$4v_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} v_{ij}$$

는 같은 값을 갖는다.

회전계획, 축 방향에 걸친 기울기 회전계획, 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

[1] 회전계획은 모두 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획이다.
[2] 축 방향에 걸친 기울기 회전계획은 모두 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획이다.

다음 장에서는, 주어진 임의의 반응표면 실험계획에 대하여 그 계획이 가지고 있는 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 정도를 알 수 있게 해 주는 측도를 개발하여 제시하고자 한다.

3. 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도

3.1 몇 가지 개념과 정의

반응표면의 한 점 $\underline{x}$ 에서 임의의 방향으로 그은 접선의 기울기의 분산은 접점 $\underline{x}$ 의 좌표와 접선의 방향 및 실험계획의 함수이다. 만일 모든 가능한 방향에 걸쳐 기울기의 분산을 평균한 값을 생각한다면 이 평균분산은 접점 $\underline{x}$ 의 좌표와 실험계획만의 함수가 된다. 이 평균분산을 $\overline{V}(\underline{x})$라 하면 $\overline{V}(\underline{x})$는 다음과 같이 얻어진다.

$$\overline{V}(\underline{x}) = a + \sum_{i=1}^{k} c_i x_i + \sum_{i<j}^{k} d_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 \ . \tag{1}$$

단, 여기서

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} v_i \ , \\ c_i &= \frac{2}{k}\Big(2c_{i,ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} c_{j,ij}\Big) \ , \\ d_{ij} &= \frac{4}{k}\Big(2c_{ii,ij} + 2c_{jj,ij} + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i,j}}^{k} c_{il,jl}\Big) \ , \\ f_i &= \frac{1}{k}\Big(4v_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} v_{ij}\Big) \end{aligned} \tag{2}$$

이다.

이제 구면좌표 (spherical coordinates)를 이용하여 보자. 우리의 측도를 개발하는 데 있어서 구면좌표가 매우 중요한 역할을 하게 된다. k 차원 공간 $(k\geq 2)$ 에서 한 점 $\underline{x}' = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$는 구면좌표를 쓰면 $(\rho, \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{k-2}, \theta)$ 로 나타낼 수 있으며, 직교좌표와 구면좌표 사이의 관계는 다음과 같다. (Edwards (1973) 참조)

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos\phi_1, \\ x_2 &= \rho\sin\phi_1\cos\phi_2, \\ x_3 &= \rho\sin\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3, \\ &\ \vdots \\ x_{k-2} &= \rho\sin\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{k-3}\cos\phi_{k-2}, \\ x_{k-1} &= \rho\sin\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{k-3}\sin\phi_{k-2}\cos\theta, \\ x_k &= \rho\sin\phi_1\sin\phi_2\cdots\sin\phi_{k-3}\sin\phi_{k-2}\sin\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

(단, $\rho\geq 0,\ 0\leq\phi_1\leq\pi, \cdots, 0\leq\phi_{k-2}\leq\pi,\ 0\leq\theta < 2\pi$)

이 변환의 Jacobian 의 절대값은

$$|J| = \rho^{k-1}\sin^{k-2}\phi_1 \sin^{k-3}\phi_2 \cdots \sin^2\phi_{k-3}\sin\phi_{k-2}$$

이다.

만일 (3)을 (1)에 대입하면 (1)은 $\rho, \phi_1, \cdots, \phi_{k-2}, \theta$ 의 함수로 표시될 것이다. 그것을 $\overline{v}(\rho, \phi_1, \cdots, \phi_{k-2}, \theta)$ 로 나타내기로 하자. 그러면 이것은 구면좌표가 $(\rho, \phi_1, \cdots, \phi_{k-2}, \theta)$ 인 점에서의 접선의 기울기의 모든 가능한 방향에 걸친 평균분산이 된다.

$\overline{\overline{v}}(\rho)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\overline{\overline{v}}(\rho) = \frac{1}{I_k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\overline{v}(\rho, \phi_1, \cdots \phi_{k-2}, \theta) \times \sin^{k-2}\phi_1 \sin^{k-3}\phi_2 \cdots \sin\phi_{k-2} d\phi_1 \cdots d\phi_{k-2} d\theta \quad . \tag{4}$$

단, 여기서

$$I_k = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\sin^{k-2}\phi_1 \sin^{k-3}\phi_2 \cdots \sin\phi_{k-2} d\phi_1 \cdots d\phi_{k-2} d\theta = \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}$$

이며, Γ는 감마함수로서

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (\alpha > 0)$$

이다.

이 $\overline{\overline{v}}(\rho)$는 계획의 원점을 중심으로 하고 반지름이 ρ인 초구면 (hypersphere) 위의 모든 점들에 대하여 위의 모든 가능한 방향에 걸친 평균분산을 다시 평균한 값이다. 구면좌표를 써서 모든 방향에 걸친 기울기 회전성을 다시 정의해 보면 다음과 같다. 임의의 점 $(\rho, \phi_1, \cdots, \phi_{k-2}, \theta)$에 대하여

$$\overline{v}(\rho, \phi_1, \cdots, \phi_{k-2}, \theta) = \overline{\overline{v}}(\rho)$$

가 성립하면, 주어진 계획은 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획인 것이다.

앞으로는 표현을 간단히 하기 위하여 다음과 같은 표시법을 사용하기로 한다.

$$\int f(\rho, \phi_1, \cdots, \phi_{k-2}, \theta) d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} f(\rho, \phi_1, \cdots, \phi_{k-2}, \theta) \times \sin^{k-2}\phi_1 \sin^{k-3}\phi_2 \cdots \sin\phi_{k-2} d\phi_1 \cdots d\phi_{k-2} d\theta \quad .$$

(f 는 $\rho, \phi_1, \cdots, \phi_{k-2}, \theta$ 의 임의의 함수)

몇 가지를 더 정의하자.

$$g(\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{k-2},\theta)=\{\overline{v}(\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{k-2},\theta)-\overline{\overline{v}}(\rho)\}^2,$$

$$h(\rho)=\int g(\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{k-2},\theta)d\Omega. \tag{5}$$

그러면 $h(\rho)$는 계획의 원점을 중심으로 하고 반지름이 ρ인 초구면 위의 모든 점들 사이에 존재하는, 모든 가능한 방향에 걸친 평균분산들 간의 변동의 크기를 측정해 주는 값이 된다.

만일 단위영역

$$R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k):\sum_{i=1}^{k}x_i^2\leq 1\}$$

에 걸쳐 $h(\rho)$의 합을 취하면 그 결과는 $\int_0^1\rho^{k-1}h(\rho)d\rho$가 될 것이다. e_k를 k 에만 의존하는 적절한 양의 (positive) 상수라 하자. $\int_0^1\rho^{k-1}h(\rho)d\rho$를 e_k로 나누어

$$S_k(D)=\frac{1}{e_k}\int_0^1\rho^{k-1}h(\rho)d\rho$$

가 정의되며, 이 $S_k(D)$가 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도로 제시된다. 실험계획 D가 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획이면 $S_k(D)$는 0이며, D가 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획으로부터 멀어질수록 $S_k(D)$는 큰 값을 갖는다.

3.2 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도의 유도

이 절에서는 측도 $S_k(D)$의 구체적인 형태를 유도해 보자. 먼저 (5)의 $h(\rho)$를 다음과 같은 모양으로 바꿀 수 있다. 이 모양이 우리가 다루기에 더 쉽다.

$$h(\rho)=\int \overline{v}^2(\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{k-2},\theta)d\Omega-I_k\,\overline{\overline{v}}^2(\rho)\ . \tag{6}$$

측도를 유도하는 데에 있어서 다음의 보조정리 (lemma) 가 유용하게 쓰인다. 증명은 생략하기로 한다.

<보조정리>

[1] $\int d\Omega=\dfrac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}$ (이것을 앞에서와 같이 I_k로 표시하자)

[2] $\int x_i^2 d\Omega = \dfrac{\rho^2 I_k}{k}$

[3] $\int x_i^2 x_j^2 d\Omega = \dfrac{\rho^4 I_k}{k(k+2)} \quad (i \neq j)$

[4] $\int x_i^4 d\Omega = \dfrac{3\rho^4 I_k}{k(k+2)}$

[5] $\int x_1^{\delta_1}\, x_2^{\delta_2} \cdots x_k^{\delta_k} d\Omega = 0$ (적어도 하나의 δ_i가 홀수일 때)

이제 (6)에 관심을 기울여 보자. 우선 $\overline{\overline{v}}(\rho)$가 ρ의 함수인 명확한 형태로 표시될 필요가 있다. $\overline{v}(\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{k-2},\theta)$ 는 (3) 을 (1) 에 대입한 것이므로

$$\begin{aligned}&\int \overline{v}(\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{k-2},\theta)d\Omega \\ &= a\int d\Omega + \sum_{i=1}^{k} c_i \int x_i d\Omega + \sum_{i<j}^{k} d_{ij} \int x_i x_j d\Omega + \sum_{i=1}^{k} f_i \int x_i^2 d\Omega\end{aligned}$$

인데, 위의 보조정리를 적용하면

$$\int \overline{v}(\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{k-2},\theta)d\Omega = aI_k + \frac{\rho^2 I_k}{k}\sum_{i=1}^{k} f_i \tag{7}$$

임을 알 수 있다. (4)와 (7)로부터

$$\overline{\overline{v}}(\rho) = a + \frac{\rho^2}{k}\sum_{i=1}^{k} f_i \tag{8}$$

가 얻어진다.

다음으로, (6)에 있는 $\int \overline{v}^2(\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{k-2},\theta)d\Omega$ 를 ρ 의 함수로 명백하게 나타낼 필요가 있다. (1)로부터

$$\begin{aligned}\overline{v}^2(\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{k-2},\theta) = a^2 &+ \Big(\sum_{i=1}^{k} c_i x_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i<j}^{k} d_{ij} x_i x_j\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2\Big)^2 \\ &+ 2a\sum_{i=1}^{k} c_i x_i + 2a\sum_{i<j}^{k} d_{ij} x_i x_j + 2a\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 \\ &+ 2\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i x_i\Big)\Big(\sum_{i<j}^{k} d_{ij} x_i x_j\Big) + 2\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2\Big) \\ &+ 2\Big(\sum_{i<j}^{k} d_{ij} x_i x_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2\Big)\end{aligned}$$

이 되며, 여기에 보조정리를 적용하면

$$\begin{aligned}\int \bar{v}^2 & (\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{k-2},\theta)d\Omega \\ &= a^2\int d\Omega+\sum_{i=1}^{k}c_i^2\int x_i^2 d\Omega+\sum_{i<j}^{k}d_{ij}^2\int x_i^2x_j^2 d\Omega \\ &\quad +\sum_{i=1}^{k}f_i^2\int x_i^4 d\Omega+2\sum_{i<j}^{k}f_if_j\int x_i^2x_j^2 d\Omega+2a\sum_{i=1}^{k}f_i\int x_i^2 d\Omega \\ &= a^2 I_k+\frac{\rho^2 I_k}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}c_i^2+2a\sum_{i=1}^{k}f_i\right) \\ &\quad +\frac{\rho^4 I_k}{k(k+2)}\left(3\sum_{i=1}^{k}f_i^2+2\sum_{i<j}^{k}f_if_j+\sum_{i<j}^{k}d_{ij}^2\right) \qquad (9)\end{aligned}$$

을 얻게 된다.

이제 (8)과 (9)를 (6)에 대입하면 $h(\rho)$가 구해진다.

$$h(\rho)=\frac{\rho^2 I_k}{k}\sum_{i=1}^{k}c_i^2+\frac{\rho^4 I_k}{k(k+2)}\left\{\sum_{i<j}^{k}d_{ij}^2+\frac{2(k-1)}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}f_i\right)^2-4\sum_{i<j}^{k}f_if_j\right\}.$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_0^1 & \rho^{k-1}h(\rho)d\rho \\ &= \frac{I_k}{k(k+2)(k+4)}\left\{(k+4)\sum_{i=1}^{k}c_i^2+\sum_{i<j}^{k}d_{ij}^2+\frac{2(k-1)}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}f_i\right)^2-4\sum_{i<j}^{k}f_if_j\right\} \qquad (10)\end{aligned}$$

이 됨을 알 수 있다.

이 (10)이 바로 주어진 실험계획이 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획으로부터 얼마나 거리가 먼가를 말해 주는 양(quantity)이므로 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도로 쓰일 수도 있으나, 실제 계산을 간편하게 하기 위하여 (10)을 k에만 의존하는 양의 상수인

$$e_k=\frac{I_k\sigma^4}{k(k+2)(k+4)}$$

으로 나누어 우리의 측도로 삼기로 한다. 즉

$$\begin{aligned}S_k(D) &= \frac{1}{\sigma^4}\left\{(k+4)\sum_{i=1}^{k}c_i^2+\sum_{i<j}^{k}d_{ij}^2+\frac{2(k-1)}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}f_i\right)^2-4\sum_{i<j}^{k}f_if_j\right\} \\ &= \frac{1}{\sigma^4}\left[(k+4)\sum_{i=1}^{k}c_i^2+\sum_{i<j}^{k}d_{ij}^2+\frac{2}{k}\left\{(k-1)\sum_{i=1}^{k}f_i^2-2\sum_{i<j}^{k}f_if_j\right\}\right] \\ &= \frac{1}{\sigma^4}\left\{(k+4)\sum_{i=1}^{k}c_i^2+\sum_{i<j}^{k}d_{ij}^2+\frac{2}{k}\sum_{i<j}^{k}(f_i-f_j)^2\right\} \qquad (11)\end{aligned}$$

가 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도이다. 여기서 c_i, d_{ij}, f_i 는 (2)에서 정의된 바와 같다. 실험계획 D가 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획이면 $S_k(D)$는 0 이며, D가 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획으로부터 멀어질수록 $S_k(D)$는 큰 값을 갖는다.

2.3절에 있는 조건 [1], [2], [3]과 $S_k(D)$=0 은 서로 필요충분조건이 됨을 확인할 수 있다.

여기서 주목할 점이 있다. 측도 $S_k(D)$에 관계되어 있는 모든 분산들과 공분산들은 계획 D 에 대하여

$$[i] = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{iu} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k) \qquad [ii] = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 = 1 \tag{12}$$

로 스케일링 (scaling)을 한 뒤의 것들이라는 점이다. (Myers (1976) 참조)

또 한 가지 주목할 점은 $S_k(D)$는 설명변수의 수 k 가 같은 실험계획들에 대하여 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 정도를 비교하는 데에 사용된다는 것이다. 차원이 서로 다른 실험계획들을 비교하는 것은 의미가 거의 없기 때문이다.

$S_k(D)$와 축 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도 $Q_k(D)$ 사이의 관계는 다음과 같다. 축 방향에 걸친 기울기 회전계획은 모두 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획이므로, $Q_k(D)$=0 이 성립하는 계획은 $S_k(D)$ = 0 도 성립한다. 그러나 이것의 역은 성립하지 않는다.

$S_k(D)$ 의 큰 장점 중의 하나는, 이 측도가 대칭 · 비대칭을 막론하고 어떠한 형태로 배치되어 있는 실험점들에 대해서도 계산될 수 있다는 점이다. 다시 말하면, $S_k(D)$ 는 어떠한 종류의 실험계획에도 적용될 수 있다.

그리고 $S_k(D)$가 가지고 있는 문제점 중 한 가지는 상한선이 없다는 것이다. 이러한 문제점을 다소 해결하기 위한 방법으로 측도를

$$H_k(D) = \frac{1}{1 + S_k(D)} \tag{13}$$

로 정해 주는 방법이 있다. 이렇게 해 주면 $H_k(D)$는 0과 1 사이의 값을 갖게 된다. D가 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획일 때 $H_k(D)$는 1이 되며, D가 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획으로부터 멀어질수록 $H_k(D)$는 0에 가까운 값을 갖는다.

4. 제시된 측도의 적용

이 장에서는 우리가 제시한 측도를 여러 종류의 반응표면 실험계획들에 적용하고 그 결과를 알아보고자 한다. 몇 가지 경우로 나누어 생각해 보기로 한다.

4.1 회전계획이면서 $S_k(D)=0$ 인 계획

다음에 열거하는 실험계획들은 회전계획이며, 따라서 $S_k(D)=0$ 인, 즉 모든 방향에 걸친 기울기 회전성을 갖고 있는 계획들이다 (Park(1987) 참조). 이 계획들은 (13)에 의하여 $H_k(D)=1$이라는 값을 갖는다.

[1] 회전 중심합성계획 ($\alpha=F^{1/4}$. 단, F는 요인실험점의 수)

[2] $k=2$ 인 경우, 반지름이 ρ인 원상에 n_1 ($n_1\geq 5$) 개의 점이 등간격으로 배치되어 있고 n_0 ($n_0\geq 1$) 개의 중심점 (0,0)이 있는 등반경 계획 (equiradial design)

[3] $k=2$ 인 경우, 중심이 같은 등반경점들의 s ($s\geq 2$) 개의 집합으로 이루어진 계획 (w 번째의 집합은 반지름이 ρ_w 이고 n_w ($n_w\geq 5$) 개의 점들을 갖는다)

[4] $k=3$ 인 경우, 20면체 (icosahedron) 의 12개의 꼭지점 $(0,\pm a_1,\pm a_2)$, $(\pm a_2,0,\pm a_1)$, $(\pm a_1,\pm a_2,0)$와 n_0 ($n_0\geq 1$) 개의 중심점 (0,0,0) 으로 이루어진 20면체 계획 (icosahedral design) (단, $a_1/a_2=(\sqrt{5}+1)/2\fallingdotseq 1.6180$)

[5] $k=3$ 인 경우, 12면체 (dodecahedron)의 20개의 꼭지점 $(0,\pm 1/c,\pm c)$, $(\pm c,0,\pm 1/c)$, $(\pm 1/c,\pm c,0)$, $(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$과 n_0 ($n_0\geq 1$) 개의 중심점 (0,0,0) 으로 이루어진 12면체 계획 (dodecahedral design) (단, $c=(\sqrt{5}+1)/2\fallingdotseq 1.6180$)

[6] Box 와 Behnken (1960)이 제시한 심플렉스합 2차 회전계획

4.2 $Q_k(D)=0$, $S_k(D)=0$ 인 계획

축 방향에 걸친 기울기 회전계획 ($Q_k(D)=0$)이면서 따라서 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획 ($S_k(D)=0$, 즉 $H_k(D)=1$)도 되는 실험계획들은 다음과 같다.

[1] $4v_{ii}=v_{ij}$ 를 만족시키는 중심합성계획 (Hader 와 Park (1978) 참조)

[2] $k=3$ 인 경우, 중심점의 수 n_0 에 따라 a_1/a_2의 값이 표 1 과 같이 주어지는 20면체계획

[3] $k=3$ 인 경우, 중심점의 수 n_0 에 따라 c의 값이 표 2 와 같이 주어지는 12면체계획

표 1). $Q_k(D)=S_k(D)=0$ 인 20면체 계획이 되기 위한 a_1/a_2 의 값
(values of a_1/a_2 for icosahedral designs with $Q_k(D)=S_k(D)=0$)

n_0	1	2	3	4	5
a_1/a_2	4.2900	3.2744	2.8796	2.6711	2.5433

표 2). $Q_k(D)=S_k(D)=0$ 인 12면체 계획이 되기 위한 c의 값 (values of c for dodecahedral designs with $Q_k(D)=S_k(D)=0$)

n_0	1	2	3	4	5
c	2.4050	2.3103	2.2362	2.1779	2.1317

4.3 회전계획이 아니면서 $Q_k(D)>0$, $S_k(D)=0$ 인 계획

다음에 열거하는 계획들은 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획 ($S_k(D)=0$, 즉 $H_k(D)=1$) 이지만, 일반적으로는 회전계획도 아니고 축 방향에 걸친 기울기 회전계획도 아니다 (즉 $Q_k(D)>0$).

[1] 3^k요인계획(factorial design)과 3^{k-p}일부요인계획(fractional factorial design)
[2] 중심합성계획 (α는 임의의 양수)
[3] $k=3$인 경우, 20면체 계획 (a_1/a_2는 임의의 양수)
[4] $k=3$인 경우, 12면체 계획 (c는 임의의 양수)

4.4 $S_k(D)>0$ 인 계획

이 절에서는 $S_k(D)>0$ (즉 $H_k(D)<1$)인 계획, 다시 말해서 모든 방향에 걸친 기울기 회전성도 갖고 있지 않은 실험계획들의 경우를 살펴보자. 많이 쓰이는 실험계획들은 대부분 모든 방향에 걸친 기울기 회전성을 갖고 있기 때문에, 이 절에서 논의되는 계획들은 실용적인 가치가 작은 것들이지만, $S_k(D)$와 $H_k(D)$는 이러한 계획들에도 적용될 수 있다.

계산을 간단히 하기 위하여 $k=2$인 경우를 생각해 보자. 이 경우 (2)로부터

$$\begin{aligned} c_1 &= 2c_{1,11}+c_{2,12} \\ c_2 &= 2c_{2,22}+c_{1,12} \\ d_{12} &= 4(c_{11,12}+c_{22,12}) \\ f_1 &= ½(4v_{11}+v_{12}) \\ f_2 &= ½(4v_{22}+v_{12}) \end{aligned} \tag{14}$$

임을 알 수 있으며, (11)에 의하여

$$S_2(D) = \frac{1}{\sigma^4}\ \{6(c_1^2+c_2^2)+d_{12}^2+(f_1-f_2)^2\}$$
$$= \frac{1}{\sigma^4}\ [4(v_{11}-v_{22})^2+6\{(2c_{1,11}+c_{2,12})^2+(2c_{2,22}+c_{1,12})^2\}$$
$$+16(c_{11,12}+c_{22,12})^2]$$

을 얻게 된다.

[예1] 계획행렬 (design matrix) D가 다음과 같이 주어져 있는 경우를 생각하자. ((12)와 같이 스케일링을 한 뒤의 것임)

$$D=\begin{array}{c} \quad x_1 \qquad\ x_2 \\ \begin{pmatrix} -1.029 & -0.866 \\ -1.029 & 0.866 \\ 1.029 & -0.866 \\ 1.029 & 0.866 \\ 0 & 0 \\ -1.543 & 0 \\ 1.543 & 0 \\ 0 & -1.732 \\ 0 & 1.732 \end{pmatrix} \end{array}$$

이 경우 $(X'X)^{-1}$ 행렬은

$$(X'X)^{-1}=\begin{pmatrix} 0.803 & 0 & 0 & -0.398 & -0.295 & 0 \\ & 0.111 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0.111 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.261 & 0.136 & 0 \\ & \text{대칭} & & & 0.158 & 0 \\ & & & & & 0.315 \end{pmatrix}$$

로 얻어지며, $Var(\underline{b})=\sigma^2(X'X)^{-1}$ 라는 사실과 (14)로부터 $c_1=c_2=d_{12}=0$, $f_1=0.680\sigma^2$, $f_2=0.474\sigma^2$ 이 된다. 따라서 이 계획에 대한, 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도는 $S_2(D)=0.0424$ 라는 값을 가지며, $H_2(D)=0.9593$이 된다.

[예2] 이번에는 실험점들이 예 1 에서보다 더 아무렇게나 흩어져 있는 경우를 생각해 보자. ((12)와 같이 스케일링을 한 뒤의 것임)

$$
D = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\
D=\begin{pmatrix}
0.8743 & -0.8611 \\
-1.0071 & 0.4146 \\
-0.2878 & 1.3715 \\
2.3684 & -0.3600 \\
-0.7858 & -1.0434 \\
0.0443 & 0.1868 \\
0.4870 & -1.4535 \\
-1.2285 & 1.5993 \\
-0.3984 & 0.8703 \\
-0.0664 & -0.7245
\end{pmatrix}
$$

예 1 의 실험계획은 대칭성이라도 가지고 있었지만, (15)의 D는 대칭성마저도 가지고 있지 않은 경우이다. $(X'X)^{-1}$ 행렬은

$$
(X'X)^{-1}=\begin{pmatrix}
0.3614 & 0.0573 & 0.0428 & -0.0953 & -0.1951 & -0.0635 \\
 & 0.2923 & 0.1411 & -0.0921 & 0.0797 & 0.0984 \\
 & & 0.2011 & -0.0222 & 0.0531 & 0.1615 \\
 & & & 0.0917 & 0.0367 & 0.0727 \\
 & & \text{대칭} & & 0.2641 & 0.2319 \\
 & & & & & 0.5286
\end{pmatrix}
$$

으로 얻어지며, $c_1=-0.0227\sigma^2$, $c_2=0.2046\sigma^2$, $d_{12}=1.2184\sigma^2$, $f_1=0.4477\sigma^2$, $f_2=0.7925\sigma^2$ 이 되어 $S_2(D)=1.8576$ 이라는 값을 얻는다. 이 값은 예 1 에서의 $S_2(D)$ 보다 훨씬 큰 값이므로, 예 2 에서의 계획이 예 1에서의 계획보다 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획으로부터 훨씬 더 거리가 멀다는 것을 알 수 있다. $H_2(D)$의 값으로 비교해 보아도 예 2에서는 0.3499로 예 1에서보다 크게 감소했다.

예 1 이나 예 2 와 같이, 주어진 실험계획이 모든 방향에 걸친 기울기 회전성을 갖고 있지 않은 경우에는 실험점을 추가함으로써 이 성질을 증가시킬 수 있다. 예 1 과 같은 대칭계획인 경우에는 중심점을 추가하면 되고, 예 2 와 같은 비대칭계획인 경우에는 대칭계획에 가까워지게 하는 실험점을 추가하면 될 것이다. 실제로 예 1 의 실험계획에 중심점 (0,0)을 1개 추가한 결과 $c_1=c_2=d_{12}=0$, $f_1=0.412\sigma^2$, $f_2=0.308\sigma^2$이 되고 $S_2(D)=0.0108$, $H_2(D)=0.9893$이 되어 원래의 계획에서보다 모든 방향에 걸친 기울기 회전성이 증가했다.

5. 결 론

반응표면의 기울기를 추정하기 위한 실험계획법이 가질 수 있는 바람직한 성질로 Hader와 Park (1978)이 제시한 "축 방향에 걸친 기울기 회전성" 과 Park(1987)이 제

시한 "모든 방향에 걸친 기울기 회전성"이 있다. Park 과 Kim (1992)은 축 방향에 걸친 기울기 회전성의 측도를 제시한 바 있다.

본 논문에서는 주어진 임의의 반응표면 실험계획이 가지고 있는 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 정도를 평가할 수 있게 해 주는 측도를 제시하였다. 이 측도 $S_k(D)$는 주어진 계획 D 가 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획인 경우 0 의 값을 가지며, D 가 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획으로부터 멀어질수록 큰 값을 갖는 것으로 나타났다. $S_k(D)$의 장점은 다음과 같이 말할 수 있다.

[1] 독립변수의 수는 몇이라도 상관이 없고, 실험계획의 종류나 형태에도 제한을 받지 않는다.

[2] 스케일링 상수($[ii]=c$)에 의존하지 않는다. 본 논문에서는 (12)에서와 같이 $[ii]=1$로 스케일링을 하였으나, 그렇게 하지 않고 모든 i에 대하여 $[ii]=c$ (c는 임의의 상수. $c>0$)로 스케일링을 해도, 제 3장에서 $\rho^{k-1}h(\rho)$의 적분상한을 1대신 $\sqrt{c}$로 잡았다면 $S_k(D)$와 동등(equivalent)한 측도가 얻어졌을 것이다.

[3] 계산이 비교적 쉽다. $S_k(D)$에 관련된 모든 분산들과 공분산들은 $(X'X)^{-1}$ 행렬로부터 찾을 수 있기 때문이다.

[4] 실험점을 추가함으로써 모든 방향에 걸친 기울기 회전성의 정도를 증가시키는 데에 쓰일 수 있다.

반면 $S_k(D)$는 다음과 같은 단점도 가지고 있다. 우선 $S_k(D)$는 백분율 (percentage)로 표시되지 않는다. 백분율로 표시될 수 있었다면 직관적으로 이해하기가 더 쉬웠을 것이다. 이 단점을 다소 해소하기 위해서는 (13)에서 정의된 $H_k(D)$를 사용할 수 있다. 다음으로, $S_k(D)$는 3.1절에서 언급한 평균분산에 대한 등고선표 (contour chart) 의 형태에 관해서는 정보를 제공해 주지 못한다는 점이다($S_k(D)>0$ 일 때). 또한 $S_k(D)$는 모든 방향에 걸친 기울기 회전성을 하나의 값으로 평가해 주는 측도인데, 두 개의 실험계획이 $S_k(D)$의 값이 같아도 실험계획영역의 각 부분에 대해서는 평가가 다를 수 있다. 이러한 단점을 보완해 줄 수 있는 방법은 Giovannitti-Jensen과 Myers(1989)에 소개되어 있다.

앞으로는 단점을 극복하고 장점을 살리는 방향으로 연구가 활발히 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] Atkinson, A. C. (1970), "The design of experiments to estimate the slope of a response surface," *Biometrika* , 57, 319-328.

[2] Box, G. E. P. and Behnken, E. W. (1960), "Simplex sum designs : a class of second order rotatable designs derivable from those of first order," *Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 838-864.

[3] Box, G. E. P. and Draper, N. R. (1980), "The variance function of the difference between two estimated responses," *Journal of the Royal Statistical Society*, B. **42**, 79-82.

[4] Box, G. E. P. and Hunter, J. S. (1957), "Multifactor experimental designs for exploring response surfaces," *Annals of Mathematical Statistics*, **28**, 195-241.

[5] Draper, N. R. and Guttman, I. (1988), "An index of rotatability," *Technometrics*, **30**, 105-111.

[6] Draper, N. R. and Pukelsheim, F. (1990), "Another look at rotatability," *Technometrics*, **32**, 195-202.

[7] Edwards, C. H. (1973), *Advanced Calculus of Several Variables,* Academic Press, New York, New York and London, England.

[8] Giovannitti-Jensen, A. and Myers, R. H. (1989), "Graphical assessment of the prediction capability of response surface designs," *Technometrics,* **31**, 159-171.

[9] Hader, R. J. and Park, S. H. (1978), "Slope-rotatable central composite designs," *Technometrics*, **20**, 413-417.

[10] Huda, S. and Mukerjee, R. (1984), "Minimizing the maximum variance of the difference between two estimated responses," *Biometrika*, **71**, 381-385.

[11] Khuri, A. I. (1988), "A measure of rotatability for response-surface designs," *Technometrics*, **30**, 95-104.

[12] Mukerjee, R. and Huda, S. (1985), "Minimax second- and third-order designs to estimate the slope of a response surface," *Biometrika*, **72**, 173-178.

[13] Murty, V. N. and Studden, W. J. (1972), "Optimal designs for estimating the slope of a polynomial regression," *Journal of the American Statistical Association*, **67**, 869-873.

[14] Myers, R. H. (1976), *Response Surface Methodology*, Edwards Brothers, Ann Arbor, MI.

[15] Myers, R. H. and Lahoda, S. J. (1975), "A generalization of the response surface mean square error criterion with a specific application to the slope," *Technometrics*, **17**, 481-486.

[16] Ott, L. and Mendenhall, W. (1972), "Designs for estimating the slope of a second order linear model," *Technometrics*, **14**, 341-353.

[17] Park, S. H. (1987), "A class of multifactor designs for estimating the slope of response surfaces," *Technometrics*, **29**, 449-453.

[18] Park, S. H. and Kim, H. J. (1992), "A measure of slope-rotatability for second order response surface experimental designs," *Journal of Applied Statistics*, **19**, 391-404.

A Measure of Slope Rotatability over All Directions[1)]

Hyuk Joo Kim[2)]

Abstract

Among desirable properties that experimental designs for estimating the slope of response surfaces may have, there are slope rotatability over axial directions, proposed by Hader and Park(1978), and slope rotatability over all directions, proposed by Park(1987). And a measure has been proposed by Park and Kim(1992) which can quantify the degree of slope rotatability over axial directions for an arbitrary given design. In this paper, a measure has been developed which enables us to assess the degree of slope rotatability over all directions for response surface experimental designs. The proposed measure has been applied to several kinds of designs, and the resultant facts observed. One of the advantages of this measure is that it can be applied to any kind of design.

1) Research supported by the Korea Science and Engineering Foundation. (KOSEF 913-0105-006-1)

2) Department of Statistics, Wonkwang University, Iri, 570-749, Korea.