

유전적분형 선형 점탄성문제의 유한요소법에 의한 효율적 해석

Advanced Finite Element Analysis for Linear Viscoelastic Problems of a Hereditary-Type Constitutive Law

심 우 진*
Sim, Woo-Jin
이 성 희**
Lee, Sung-Hee

.....
요 약

유전적분형 물성방정식에 근거한 선형 점탄성문제의 효율적인 수치해석을 위해서 새로운 유한요소해법을 공식화하였다. 각 시간구간에서 변수변화를 선형적으로 가정하고 유전적분의 계산을 매우 효율적으로 처리하였다. 그 결과 과거의 해석법에 비하여 수치정확도 및 경제성에서 큰 향상을 얻었다.

Abstract

An advanced time-domain finite element formulation is presented for the displacement and stress analysis of isotropic, linear viscoelastic problems of a hereditary-type constitutive law. The semidiscrete finite element method with linear time-stepping scheme and an elastic-viscoelastic correspondence principle are used in the theoretical development. An efficient treatment of hereditary integral is introduced to improve the numerical accuracy, to reduce the computation time, and to avoid the use of large memory storage. Two-dimensional numerical examples of plane strain and plane stress are solved under the assumption on the material property of being elastic in dilatation and like three-element Voigt model in distortion, and compared with the analytical solutions and the past numerical results to show the versatility and efficiency of the proposed method.

.....
1. 서 론

등방성 선형 점탄성 재료의 물성방정식(혹은 응력-변형도 관계식)은 미분식 혹은 유전적분식(hereditary integral)의 두 형태[1-3]로 표현되어

지며 수치해석의 경우 그 선택에 따라 해석의 접근방식이 다르게 된다. 일반적으로 전자를 택하였을 경우[4-7]에는 실제해로의 안정적 수렴을 위해서 시간증분을 작게해야 하는데 계산시간이 오래

* 정회원 금오공과대학교 기계설계공학과 교수
** 금오공과대학교 기계설계공학과 석사과정

이 논문에 대한 토론을 1993년 12월 30일까지 본학회에 보내주시면 1994년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

걸리게 되고 오차의 누적이 커질 수가 있다. 후자의 경우[8-11]에는 실제해로의 안정적 수렴 및 실험결과와의 이용면에서 더 유리하다. 그러나 탄성문제와는 달리 과거에 계산된 모든 변위결과들이 현 시각 변위계산에 영향을 끼치는 유전효과 계산으로 인하여 전산기에서 많은 기억용량을 필요로 한다. 저자는 최근 논문[11]에서 선형 점탄성 재료의 유전적분형 유한요소해석을 위한 변분공식을 유도하였으며 시간진행절차에 있어서는 시간축을 등간격으로 나누고 각 구간에서 변수변화가 일정(constant time variation)하다는 가정으로서 수식을 전개하여 최종 시스템연립방정식을 공식화하였다. 그때 시스템연립방정식(분문식(8)참조)의 등식 우측에서는 유전효과와의 영향을 고려하기 위하여 매시간 단계에서 현시각 질점번호수 만큼의 강성행렬들이 각각 과거의 해당시간 변위벡터들과 곱하고 합하여지게 된다. 그러므로, 시간의 진행에 따라 불어난 강성행렬들의 계산 및 저장, 그리고 그와 관련된 곱으로 인한 계산량의 증가등이 문제점으로 지적될 수가 있다.

본 논문에서는 유전적 강성행렬들의 계산을 매우 효율적으로 처리하여 기억용량사용과 프로그램 수행시간 그리고 반복적 계산으로 인한 오차누적을 최소화시키고, 각 시간구간에서 시간변수들을 선형(linear time variation)으로 가정함으로써 정확성, 경제성에서 큰 개선을 가져오는 유한요소 해석법을 새로이 유도·제시한다. 그리고 이를 입증하기 위해 2차원의 대표적인 예제를 택하고 변위와 응력을 해석하여 이론해와 논문[11]의 해법에 의한 수치결과와 비교·검토한다.

2. 시스템연립방정식의 유도

등방성, 선형 점탄성재료의 유한요소해석을 위한 변분공식은 다음과 같다[11].

$$\int_{\Omega} D_{ijkl}(t) * du_{k,l}(x,t) \delta u_{i,j}(x) d\Omega$$

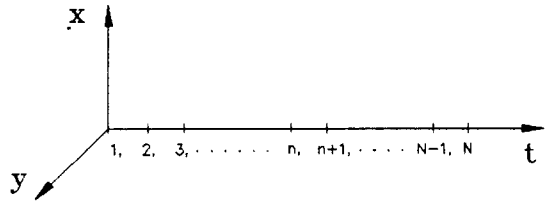
$$= \int_{\Gamma} T_i(x,t) \delta u_i(x) d\Gamma \quad (1)$$

여기서 D_{ijkl} 은 점탄성 물성행렬, u_i 는 변위벡터, $T_i = \sigma_{ij}n_j$ 는 표면력벡터, x 는 위치벡터, t 는 시간, Ω 는 영역, Γ 는 경계면, δ 는 변분기호, 그리고 *기호는 Stieltjes convolution[1]을 의미하며 다음처럼 정의된다.

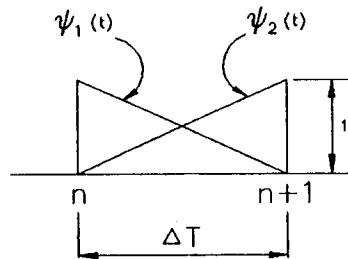
$$D_{ijkl}(t) * du_{k,l}(x,t)$$

$$= \int_{0^-}^t D_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} u_{k,l}(x,\tau) d\tau$$

$$= D_{ijkl}(t) u_{k,l}(x,0) + \int_{0^+}^t D_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} u_{k,l}(x,\tau) d\tau \quad (2)$$



(a) 시간축 분할 및 시간절점번호:
n=임의의 시간절점, N=현재의 시간절점



(b) 임의의 시간구간에서 선형적 내삽함수

그림 1.

식(2)의 둘째항은 유적적분[2]으로 알려져 있으며 이를 풀기위해서 그림 1(a)에서처럼 시간축을 등간격으로 나누고, $u_i(x,t)$ 는 각 시간구간에서 선형적으로 변화한다고 가정한다. 이것을 그림 1(b)에서처럼 시간변수의 내삽함수를 사용하여 다음처럼 근사적으로 표현할 수가 있다. 즉,

$$u_i(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \{ \psi_1(t) u_i^n(x) + \psi_2(t) u_i^{n+1}(x) \} \quad (3)$$

여기서,

$$\psi_1(\tau) = \frac{t_{n+1} - \tau}{\Delta T}, \quad \psi_2(\tau) = \frac{\tau - t_n}{\Delta T}$$

$$t_n \leq \tau \leq t_{n+1}$$

$\psi_1(\tau) = 0, \quad \psi_2(\tau) = 0$ 그 외의 구간에서 (4)

그리고 t 는 현재의 시간, n 은 임의의 시간절점번호, ΔT 는 시간증분, $\psi(t)$ 는 시간변수의 내삽함수, 그리고 임의의 시간절점 $t_n = (n-1) \Delta T$ 로 계산되며, 그 때의 변위 및 표면력은 u_i^n, T_i^n 등으로 표기된다. 따라서, $t=0$ 에서의 변위 및 표면력은 u_i^0, T_i^0 으로 표기됨을 주의한다. 한편,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u_{k,1}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ -\frac{1}{\Delta T} u_{k,1}^n(x) + \frac{1}{\Delta T} u_{k,1}^{n+1}(x) \right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=1}^{N-1} \{ u_{k,1}^{n+1}(x) - u_{k,1}^n(x) \} \quad (5)$$

이므로 식(5)를 식(2)에 대입하여 정리하면 다음처럼 된다.

$$D_{i,jk1}(t) * du_{k,1}(x, t)$$

$$= D_{i,jk1}(t) u_{k,1}(x, 0) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\{ u_{k,1}^{n+1}(x) - u_{k,1}^n(x) \}}{\Delta T} \int_{t_n}^{t_{n+1}} D_{i,jk1}(t-\tau) d\tau \quad (6)$$

식(6)은 현시각 $t=t_N$ 까지의 근사계산을 의미하고, 첫항은 탄성해 계산을 의미한다. 식(6)을 식(1)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} D_{i,jk1}(t) u_{k,1}(x, 0) \delta u_{i,j}(x) d\Omega + \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=1}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} D_{i,jk1}(t-\tau) d\tau \int_{\Omega} \{ u_{k,1}^{n+1}(x) - u_{k,1}^n(x) \} \delta u_{i,j}(x) d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma} T_i(x, t) \delta u_i(x) d\Gamma \quad (7)$$

식(7)의 공간변수 적분을 유한요소개념을 사용하여 근사시키고 급수전개를 현시각 $t=t_N$ 에서의 변위절점을 미지수로 하는 형태로 고쳐쓰면 다음과 같은 시스템연립방정식을 얻는다.

$$[K(t-\tau)]_{N-1}^N \{ u^N - u^{N-1} \}$$

$$= - \sum_{n=1}^{N-2} [K(t-\tau)]_n^{n+1} \{ u^{n+1} - u^n \} - [K(t)] \{ u^1 \} + \{ \bar{F} \} \quad (8)$$

위의 식(8)에서 $\sum_{n=1}^{N-2}$ 기호는 $N \geq 3, n \geq 1$ 경우에 적용되며, u^k 는 시간절점 k 에서의 변위벡터를 의미한다. 그리고,

$$\begin{aligned}
 [\underline{K}(t-\tau)]_{N-1}^N &= \int_{\underline{Q}} [B]^T [\underline{D}(t-\tau)]_{t_{N-1}}^{t_N} \\
 [B] d\underline{Q} &= [\underline{K}(\Delta T)] \\
 [\underline{K}(t-\tau)]_n^{n+1} &= \int_{\underline{Q}} [B]^T [\underline{D}(t-\tau)]_{t_n}^{t_{n+1}} \\
 [B] d\underline{Q} \\
 [K(t)] &= \Delta T \int_{\underline{Q}} [B]^T [D(t)] [B] d\underline{Q} \\
 \{ \bar{F} \} &= \Delta T \int_{\Gamma} T_i(x, t) N_i(x) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{9}$$

여기서 [B]는 변형률-변위행렬, N_i 는 형상함수, $[K(\Delta T)]$ 는 ΔT 만의 함수, $[K(t-\tau)]_n^{n+1}$ 은 현시각 t 와 n 의 함수, 그리고 $[K(t)]$ 는 현시각 t 의 함수를 의미하며, 점탄성 물성행렬 $[D(t)]$ 및 $[\underline{D}(t-\tau)]_{t_n}^{t_{n+1}}$ $[\underline{D}(t-\tau)]_{t_{N-1}}^{t_N}$ 행렬계산은 다음절을 참조한다.

3. 점탄성 물성행렬들의 계산

수식적 표현을 위하여 점탄성 재료는 정수압변형시 탄성의 성질을 갖고, 전단변형시에는 3요소 Voigt 모델의 특성으로 거동함을 가정한다. 즉,

$$\begin{aligned}
 G(t) &= G_0 \{ \alpha + (1 - \alpha) e^{-\lambda t} \} \\
 K(t) &= K_0
 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $G(t)$, $K(t)$ 는 전단과 팽창에 관한 이완 함수이며 G_0 , K_0 , α , λ 는 상수이다. 그리고 물성행렬들의 유도는 평면응력의 경우를 예로들며 평면 변형의 경우는 참고문헌[13]을 참조한다.

1) $[\underline{D}(t-\tau)]_{t_n}^{t_{n+1}}$ 계산

식(10)의 특성을 지니는 점탄성 재료의 평면응력에 관한 물성행렬 $[D(t)]$ 는 다음과 같다[11].

$$[D(t)] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \tag{11}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= d_{22} = p_1 + p_2 e^{-\gamma_1 t} + p_3 e^{-\gamma_2 t} \\
 d_{12} &= d_{21} = q_1 + q_2 e^{-\gamma_1 t} + q_3 e^{-\gamma_2 t} \\
 d_{33} &= w_1 + w_2 e^{-\lambda t}
 \end{aligned} \tag{12}$$

이며, 계수들 $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, w_1$ 및 w_2 는 부록 A.1을 참조한다. 그리고

$$\begin{aligned}
 [\underline{D}(t-\tau)]_{t_n}^{t_{n+1}} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} [D(t-\tau)] dr \\
 &= \int_{(n-1)\Delta T}^{n\Delta T} [D(t-\tau)] dr
 \end{aligned} \tag{13}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \underline{d}_{11} &= \underline{d}_{22} = p_1 \Delta T + \frac{p_2}{\gamma_1} e^{\gamma_1 (n\Delta T - t)} \\
 &\quad (1 - e^{-\gamma_1 \Delta T}) \\
 &\quad + \frac{p_3}{\gamma_2} e^{\gamma_2 (n\Delta T - t)} (1 - e^{-\gamma_2 \Delta T}) \\
 \underline{d}_{12} &= \underline{d}_{21} = q_1 \Delta T + \frac{q_2}{\gamma_1} e^{\gamma_1 (n\Delta T - t)} \\
 &\quad (1 - e^{-\gamma_1 \Delta T}) \\
 &\quad + \frac{q_3}{\gamma_2} e^{\gamma_2 (n\Delta T - t)} (1 - e^{-\gamma_2 \Delta T}) \\
 \underline{d}_{33} &= w_1 \Delta T + \frac{w_2}{\lambda} e^{\lambda (n\Delta T - t)} (1 - e^{-\lambda \Delta T})
 \end{aligned} \tag{14}$$

2) $[D(t-\tau)]_{t_{N+1}}^{t_N}$ 계산

식(14)에 $n=N-1$, $t=(N-1)\Delta T$ 를 대입하면 $[D(t-\tau)]_{t_{N+1}}^{t_N}$ 의 요소들을 다음처럼 얻는다. 즉,

$$\begin{aligned} \underline{d}_{11} &= \underline{d}_{22} = p_1 \Delta T + \frac{p_2}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 \Delta T}) \\ &\quad + \frac{p_3}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 \Delta T}) \\ \underline{d}_{12} &= \underline{d}_{21} = q_1 \Delta T + \frac{q_2}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 \Delta T}) \\ &\quad + \frac{q_3}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 \Delta T}) \\ \underline{d}_{33} &= w_1 \Delta T + \frac{w_2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \Delta T}) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $[D(t-\tau)]_{t_{N+1}}^{t_N}$ 은 ΔT 만의 함수임을 알 수가 있다.

4. 시스템연립방정식의 효율적 계산

시스템연립방정식 식(8)은 이해하기 쉬운 형태로 다음처럼 쓸 수가 있다.

$$\begin{aligned} & [\underline{K}(\Delta T)] \{ u^N \} \\ &= \sum_{n=1}^{N-2} [[\underline{K}(t-\tau)]_{n+1}^{n+2} - [\underline{K}(t-\tau)]_n^{n+1}] \\ &\quad \{ u^{n+1} \} + [[\underline{K}(t-\tau)]_1^2 - [\underline{K}(t)]] \\ &\quad \{ u^1 \} + \{ \bar{F} \} \\ &= \sum_{n=1}^{N-2} [\underline{K}(n, t)] \{ u^{n+1} \} + [\underline{K}(t)] \\ &\quad \{ u^1 \} + \{ \bar{F} \} \end{aligned} \quad (16)$$

식(16)에서 $[\underline{K}(\Delta T)]$ 는 주어진 ΔT 에 관해서 불변하나, $[\underline{K}(n, t)]$ 는 현시각 및 n 값에 따라서 매번 $[\underline{K}]$ 를 계산을 해야하고, $[\underline{K}(t)]$ 은 현시각

에 따라 변하므로, 이를 모두 계산 저장하려면 많은 계산시간과 기억용량을 차지하게 되어 비효율적으로 된다. 강성행렬들의 효율적계산 및 전산기 기억용량 사용을 최소화하는 방법으로서 식(16)을 다음처럼 재구성하여 적는다.

$$\begin{aligned} & [\underline{K}(\Delta T)] \{ u^N \} \\ &= \sum_{n=1}^{N-2} [K^A(n, t) + K^B(n, t) + K^C(n, t)] \\ &\quad \{ u^{n+1} \} + [K^D(t) + K^E(t) + K^F(t)] \\ &\quad \{ u^1 \} + \{ \bar{F} \} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$[K^A(n, t)] = \int_0^{\Delta T} [B]^T [D^A(n, t)] [B] d\Omega \quad (18a)$$

$$[K^D(t)] = \int_0^{\Delta T} [B]^T [D^D(t)] [B] d\Omega \quad (18b)$$

그리고 $[K^B(n, t)]$, $[K^C(n, t)]$ 는 식(18a)에서 $[D^A(n, t)]$ 대신 $[D^B(n, t)]$, $[D^C(n, t)]$ 를 넣어 구하여지며, $[K^E(t)]$, $[K^F(t)]$ 는 식(18b)에서 $[D^D(t)]$ 대신 $[D^E(t)]$, $[D^F(t)]$ 를 넣어 계산하여 구한다. 그리고 이와 관련된 점탄성 물성행렬들은 부록 A.2를 참조한다. 각 행렬의 요소들이 시간을 포함하는 지수함수를 공통으로 포함하고 있으므로 식(17)은 다음처럼 다시 표현된다. 즉,

$$\begin{aligned} & [\underline{K}(\Delta T)] \{ u^N \} \\ &= \sum_{n=1}^{N-2} \left[e^{\gamma_1(n\Delta T-t)} [K_o^A] + e^{\gamma_2(n\Delta T-t)} \right. \\ &\quad \left. [K_o^B] + e^{\lambda(n\Delta T-t)} [K_o^C] \right] \{ u^{n+1} \} + \end{aligned}$$

$$\left[e^{-\gamma_1 t} [K_o^D] + e^{-\gamma_2 t} [K_o^E] + e^{-\lambda t} [K_o^F] \right] \{ u^1 \} + \{ F \} \quad (19)$$

여기서 기본강성행렬들 $[K_o^A]$, $[K_o^B]$, $[K_o^C]$, $[K_o^D]$, $[K_o^E]$, $[K_o^F]$ 는 식(17)에서 t 와 n 변수를 포함하는 공통 지수함수들을 빼어낸 행렬들로서 시간에 무관하고 ΔT 만의 함수가 된다. 식(19)는 다음처럼 더 단순화시켜 표현될 수가 있다.

$$\begin{aligned} & [\underline{K}(\Delta T)] \{ u^N \} \\ &= \sum_{n=1}^{N-2} \left[e^{\gamma_1(n-N+1)\Delta T} \{ u_A^{n+1} \} \right. \\ &+ e^{\gamma_2(n-N+1)\Delta T} \{ u_B^{n+1} \} + e^{\lambda(n-N+1)\Delta T} \{ u_C^{n+1} \} \left. \right] \\ &+ \left[e^{-\gamma_1 t} \{ u_D^1 \} + e^{-\gamma_2 t} \{ u_E^1 \} \right. \\ &+ \left. e^{-\lambda t} \{ u_F^1 \} \right] + \{ \bar{F} \} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{ u_A^{n+1} \} &= [K_o^A] \{ u^{n+1} \} \\ \{ u_B^{n+1} \} &= [K_o^B] \{ u^{n+1} \} \\ \{ u_C^{n+1} \} &= [K_o^C] \{ u^{n+1} \} \\ \{ u_D^1 \} &= [K_o^D] \{ u^1 \} \\ \{ u_E^1 \} &= [K_o^E] \{ u^1 \} \\ \{ u_F^1 \} &= [K_o^F] \{ u^1 \} \end{aligned} \quad (21)$$

결국, 식(20)을 처음의 식(16)과의 비교로부터 알 수 있는 사실은 유전적 강성행렬들을 매시간 t , 그리고 n 값의 변화에 따라 반복해서 구하지 않고서 지수함수만을 수정하여 곱하여 주는 것으로 대체되었다. 그러므로 계산시간 및 계산량의 단축은 물론 전산기 기억용량 사용에 있어서 큰 절약을 가져온다.

5. 응력계산

등방성, 선형 점탄성 재료에 대한 응력-변형도 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, t) &= D_{ijkl}(t) * d\epsilon_{kl}(x, t) \\ &= D_{ijkl}(t) \epsilon_{kl}(x, 0) + \int_0^t D_{ijkl}(t-\tau) \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \tau} \epsilon_{kl}(x, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 σ_{ij} 는 응력, ϵ_{ij} 는 변형률을 나타내는 텐서이며 $\epsilon_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_i} \right\}$ 이다.

그리고 식(22)를 전개하기 위해서 $\epsilon_{ij}(x, t)$ 의 분포가 식(3)에서처럼 선형적이라고 가정한다. 즉,

$$\epsilon_{ij}(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \psi_1(t) \epsilon_{ij}^n(x) + \psi_2(t) \epsilon_{ij}^{n+1}(x) \right\} \quad (23)$$

식(23)을 식(22)에 대입하여 전개하는 과정은 식(6)의 유도과정과 동일하다. 그러므로,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, t) &= D_{ijkl}(t) \epsilon_{kl}(x, 0) + \\ &\quad \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\{ \epsilon_{kl}^{n+1}(x) - \epsilon_{kl}^n(x) \}}{\Delta T} \int_{t_n}^{t_{n+1}} D_{ijkl}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

이 된다. 그리고 행렬식으로 표현하면 다음처럼 된다.

$$\begin{aligned} \{ \sigma(t) \} &= [D(t)] \{ \epsilon^1 \} \\ &+ \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=1}^{N-1} [\underline{D}(n, t)] \{ \epsilon^{n+1} - \epsilon^n \} \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 $\{\epsilon^1\}$ 은 $N=1(t=0)$ 에서의 변형률이며, $[D(n,t)] = [D(t-\tau)]_{t_n}^{t_{n+1}}$ 이다. 식(25)를 다음의 형태로 재배열시켜 계산하면 더 간단하게 된다. 즉,

$$\begin{aligned} \{ \sigma(t) \} &= [[D(t)] - \frac{1}{\Delta T} [\underline{D}(t-\tau)]_{t_1}^{t_2}] \{ \epsilon^1 \} + \\ &\frac{1}{\Delta T} \sum_{n=1}^{N-2} [[\underline{D}(t-\tau)]_{t_n}^{t_{n+1}} - [\underline{D}(t-\tau)]_{t_{n+1}}^{t_{n+2}}] \{ \epsilon^{n+1} \} + \\ &\frac{1}{\Delta T} [\underline{D}(t-\tau)]_{t_{N-1}}^{t_N} \{ \epsilon^N \} \end{aligned} \quad (26)$$

식(26)은 식(16)과 형태가 유사하므로 앞에서 얻어진 결과를 사용할 수가 있다. 즉,

$$\begin{aligned} [[\underline{D}(t-\tau)]_{t_n}^{t_{n+1}} - [\underline{D}(t-\tau)]_{t_{n+1}}^{t_{n+2}}] \\ = - [D^A(n, t) + D^B(n, t) + D^C(n, t)] \\ [[D(t)] - \frac{1}{\Delta T} [\underline{D}(t-\tau)]_{t_1}^{t_2}] \\ = - \frac{1}{\Delta T} [D^D(t) + D^E(t) + D^F(t)] \end{aligned} \quad (27)$$

여기서, 점탄성 물성행렬들 $[D^A(n,t)]$, $[D^B(n,t)]$, $[D^C(n,t)]$, $[D^D(t)]$, $[D^E(t)]$, $[D^F(t)]$ 은 부록 A.2를 참조한다.

6. 수치해석 예

기하학적 영역 및 공간변수를 근사시키기 위하

여 8절점 등매개 사각형유한요소가 사용되어졌으며, 응력은 각 요소의 변위분포식을 미분하여 각 절점에서 구하였는데 이때 이웃요소와 접하여진 절점들에서는 접한 수만큼 평균한 값을 사용하였다. 시간증분의 크기는 변수변화를 일정(constant time variation)으로 가정한 논문[11]에서 적합한 시간증분이 $\Delta T=0.5\sim 1.0$ 초로 판명되었으므로 더 높은 치수의 시간변화함수를 사용한 본 논문에서는 $\Delta T=1.0$ 초로 계산하였다. 예제는 대표적인 평면응력 및 평면변형 문제를 택하여 그 수치결과를 이론해와 논문[11]의 해법에 의한 수치결과와 비교하였다. 그리고 수치적 계산을 위해 점탄성이 완함수에 가정된 상수값은 $G_0=480$, $K_0=1280$, $\alpha=0.25$ 및 $\lambda=0.4$ 로 하였으며 t_R 은 지연시간으로 α/λ^2 로 계산된다.

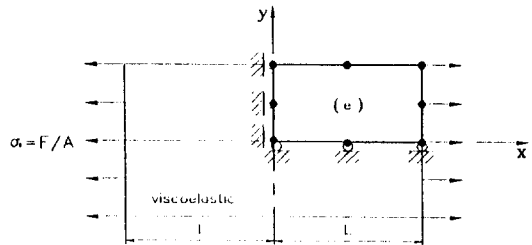


그림 2. 인장력을 받는 점탄성 평판

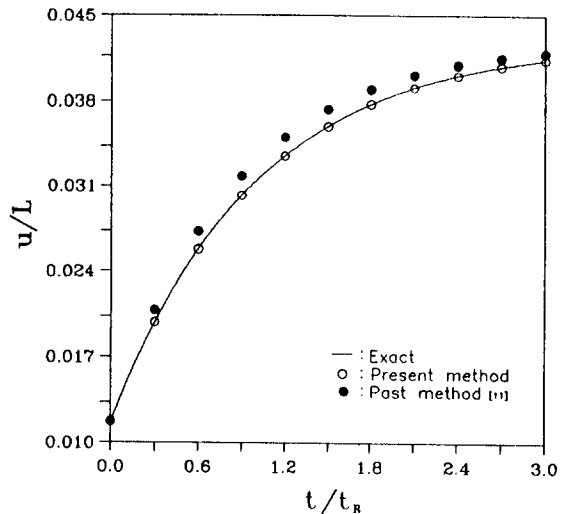


그림 3. $x/L=0.5$ 에서의 x방향 변위분포

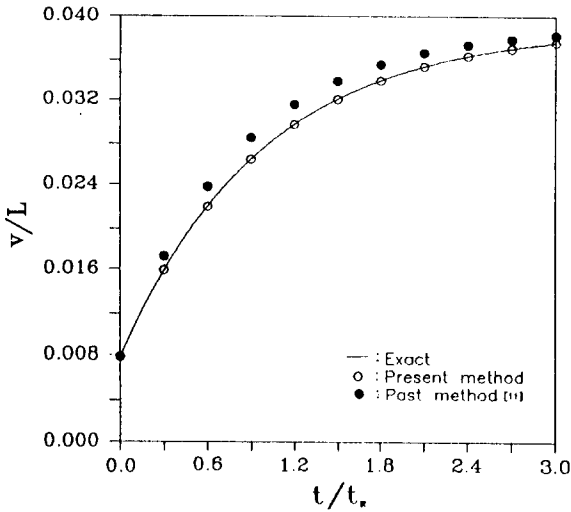


그림 4. $x/L=0.5$ 에서의 y 방향 변위분포

(1) 인장력을 받는 점탄성 평판

식(10)과 같은 특성을 지니는 점탄성 재료의 평판이 그림 2에서 처럼 인장력을 받고 있다. 이때 x, y 방향의 변위는 탄성-점탄성 상응원리[1-3]를 이용해서 유도할 수가 있다. 즉,

$$u(x, t) = \frac{F x}{A} [h_1 - h_2 e^{-a\lambda t}]$$

$$v(x, t) = \frac{F y}{2 A} [h_3 - h_4 \{ 1 - (1-a) e^{-a\lambda t} \}] \quad (28)$$

여기서, 계수들 h_1, h_2, h_3, h_4 는 부록 A.3을 참조한다. 수치해를 구하기 위해서 사용된 유한요소 모델은 그림 2에서처럼 우측 상단의 1/4모델이며 그 결과가 그림 3, 4에 비교되어져 있다. 요소가 1개 입에도 불구하고 수치결과가 매우 정확함을 알 수 있으며 논문[11]의 해법에 의하여 이 정확도의 결과를 얻으려면 요소수 16개 그리고 $\Delta T=0.125$ 초 정도의 세분화된 자료를 요구한다.

(2) 내압을 받는 점탄성 원반

일정 크기의 내압을 받는 점탄성 재료의 원반이 있다. 이때, 수치해석을 위한 유한요소모델은 대

칭성을 고려하여 그림 5와 같은 형상을 취하였으며 반경방향의 변위, 원주 및 반경방향 응력들에 관한 수치결과를 무차원화시켜서 그림 6, 7, 8에 이론해[12] 및 논문[11]의 해법에 의한 수치결과와 비교하였다.

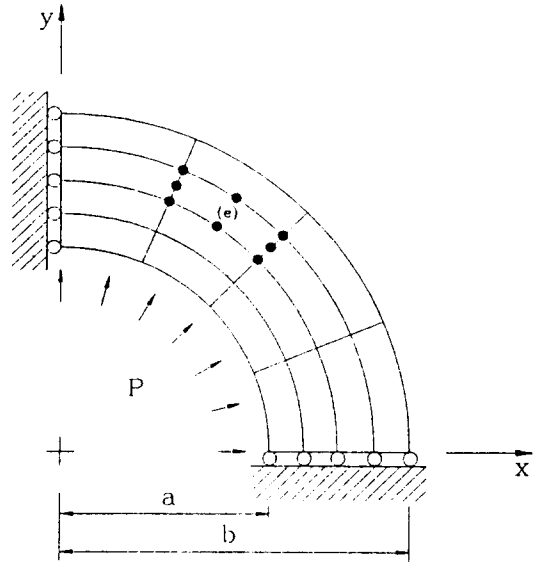


그림 5. 내압을 받는 점탄성 원반의 유한요소모델

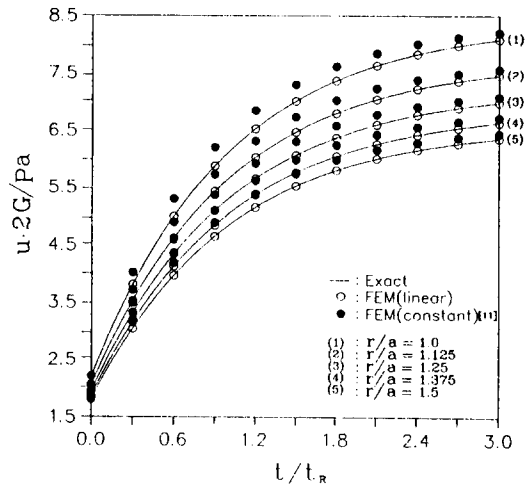


그림 6. 내압을 받는 점탄성 원반의 반경방향 변위분포

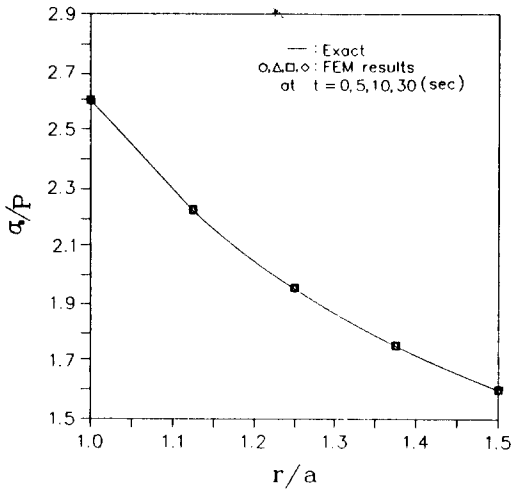


그림 7. 내압을 받는 점탄성 원반의 원주방향 응력분포

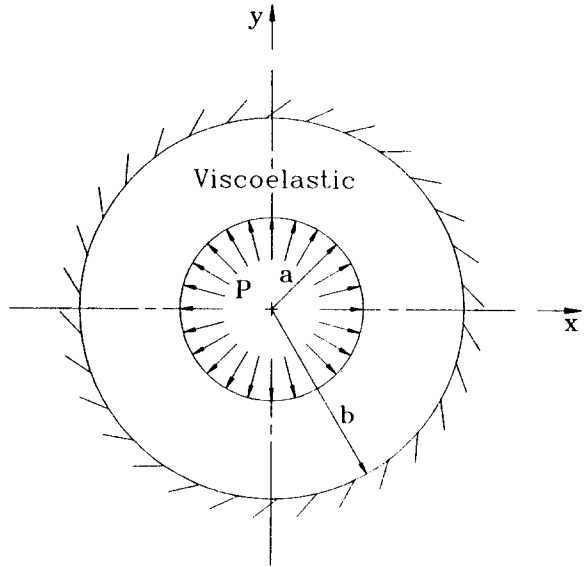


그림 9. 외벽이 고정되고 내압을 받는 점탄성 원통

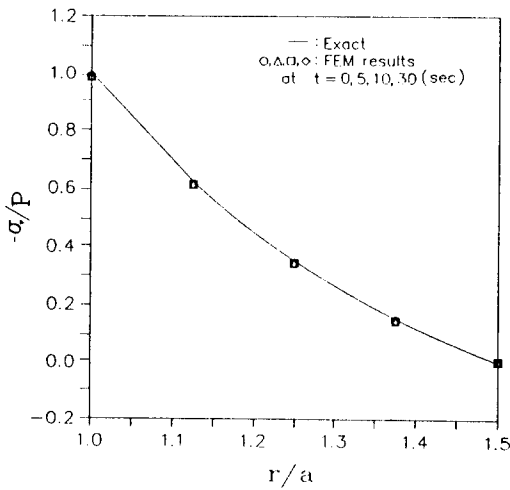


그림 8. 내압을 받는 점탄성 원반의 반경방향 응력분포

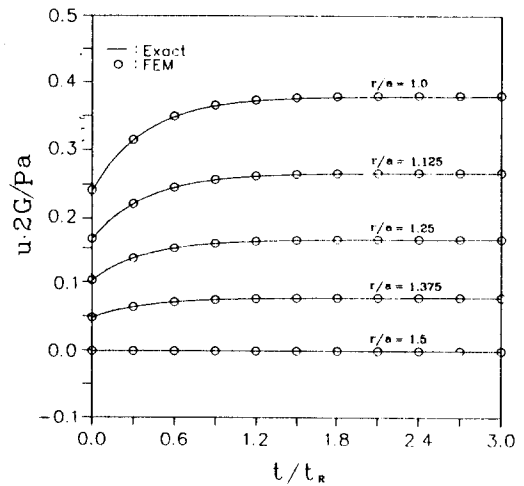


그림 10. 외벽이 고정된 점탄성 원통의 반경방향 변위분포

(3) 외벽이 고정된 점탄성 원통

외벽이 고정된 점탄성 원통이 그림 9에서 처럼 일정크기의 내압을 받고 있다. 그림 5와 동일한 유한요소모델을 사용한 수치해 결과를 그림 10, 11, 12에 이론해와 함께 도시하였다. 표 1에는 현재의 방법과 논문[11]의 해법에 의한 프로그램 컴파일 후의 실수행시간에 대한 비교를 기록하였는데 효

율적 계산에 의한 본 논문의 방법이 매우 경제적인임을 알 수가 있다. 참고로, 외벽이 고정되지 않은 원통의 경우에는 그림 5보다 분할을 더 잘게해야 응력의 정확성이 높다.

7. 결 론

유전적분형 물성방정식에 근거한 선형 점탄성 문제의 효율적이고, 정확한 해석을 위해서 새로운

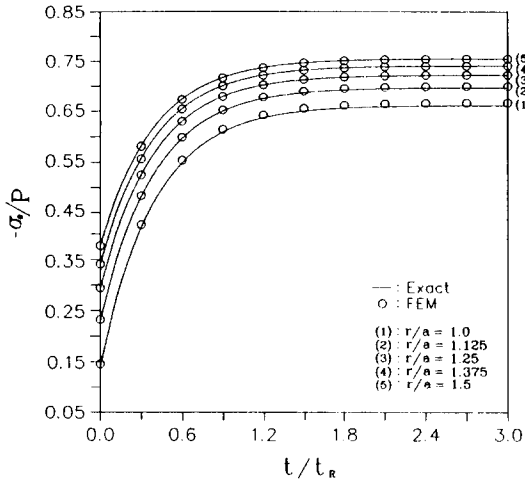


그림 11. 외벽이 고정된 점탄성 원통의 원주방향 응력분포

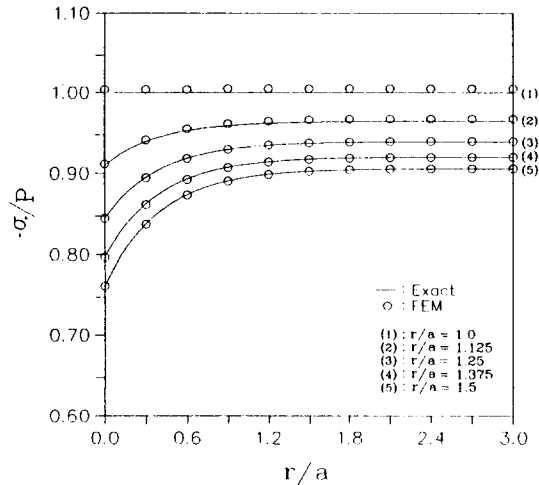


그림 12. 외벽이 고정된 점탄성 원통의 반경방향 응력분포

표 1. 프로그램 수행시간 비교(DTS 3230/ RISC station)

모델(요소수)	해법	
	현재의 해법	논문[11]의 해법
점탄성 평판(1)	1.93초	13.55초
점탄성 원반(16)	18.80초	152.58초
외벽이 고정된 점탄성 원통(16)	18.89초	157.67초

유한요소해법을 공식화하였다. 각 시간구간에서 변수변화를 선형적으로 가정하였고, 시간변수의 유전적 강성행렬을 시간변수의 지수함수와 일정

크기의 기본강성행렬의 곱들의 합으로 표현함으로써 시간진행에 따라 매시간 강성행렬들을 해당 절점수 만큼 반복적으로 새로 계산·저장하던 것을 지수함수들만을 계산하여 일정크기의 기본강성행렬들과 곱하는 것으로 대체시켰다. 즉, 반복적이고 번거로운 많은 양의 유전적분 계산을 소량의 간결한 계산으로 바꾸었다. 그 결과 과거의 해석법에 비하여 전산기 기억용량 사용을 매우 줄였으며 또한 수치계산시 계산시간의 최소화 그리고 수치결과에 있어서 정확성의 향상 등의 좋은 결과를 얻었다. 그러나 점탄성 이완함수들의 계수들이 시간에 따라 변하거나, 지수함수로 표시되지 않을 경우에는 위 방법을 그대로 적용할 수 없으므로 앞으로의 연구과제로 남는다.

감사의 글

위 논문은 1992년도 교육부지원 한국학술진흥재단의 지방대학육성과제 학술연구조성비에 의한 지원을 받았으며 이에 감사를 표함.

참 고 문 헌

1. R.M. Cristensen, Theory of Viscoelasticity, Academic Press, New York, 1971.
2. W. Flügge, Viscoelasticity, 2nd end., Springer-Verlag, Berlin, 1975.
3. W.N. Findly, J.S. Lai and K. Onaran, Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials, North-Holland, Amsterdam, 1976.
4. O.C. Zienkiewicz, M. Watson and I.P. King, "A numerical method of viscoelastic stress analysis", Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 807-827, (1968).
5. O.C. Zienkiewicz and I.C. Corneau, "Viscoplasticity, plasticity and creep in elastic solids-A unified numerical solution approach", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 8, pp.821-845, (1974).
6. D.R.J. Owen and E. Hinton, Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, Swansea, 1980.
7. S.H. Lee, "Generalized viscoelastic model for creep analysis coupled with plastic deformation", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 26,

pp.153-165, (1988).
 8. O.C. Zienkiewicz and M. Watson, "Some creep effects in stress analysis with particular reference to concrete pressure vessels", Nucl. Eng. Design, Vol. 4, pp.406-412, (1966).
 9. R.A. Adey and C.A. Brebbia, "Efficient method for solution of viscoelastic problems", J. Eng. Mech. ASCE, pp.1119-1127, (1973).
 10. W.J. Sim and B.M. Kwak, "Time-domain boundary element formulation for linear viscoelasticity with body forces using particular integrals", Edited by M. Tanaka, C.A. Brebbia

and T. Honma, Boundary Elements XII Vol. 1, pp.367-381, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
 11. 심우진, 이호섭, "유전적분형 물성방정식에 근거한 선형 점탄성문제의 시간영역 유한요소해석", 대한기계학회논문집 제16권 제8호, pp.1429-1437, (1992).
 12. 심우진, "탄성-점탄성 상용원리를 이용한 선형 점탄성문제의 해석", 금오공과대학 논문집 제7집, pp.17-28, (1986).
 13. 이성희, "등방성 선형 점탄성재료의 유한요소법에 의한 새로운 해석", 석사학위논문, 금오공과대학 대학원, 1993.

부 록

A.1 점탄성 물성행렬들의 계수들(평면응력의 경우)

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 12 K_0 G_0 + 4 G_0^2 \\
 m_2 &= 12 K_0 G_0 \lambda + 12 K_0 G_0 a \lambda + 8 G_0^2 a \lambda \\
 m_3 &= 12 K_0 G_0 a \lambda^2 + 4 G_0^2 a^2 \lambda^2 \\
 n_1 &= 6 K_0 G_0 - 4 G_0^2 \\
 n_2 &= 6 K_0 G_0 \lambda + 6 K_0 G_0 a \lambda - 8 G_0^2 a \lambda \\
 n_3 &= 6 K_0 G_0 a \lambda^2 - 4 G_0^2 a^2 \lambda^2 \\
 a_1 &= 3 K_0 + 4 G_0 \\
 b_1 &= 6 K_0 \lambda + 4 G_0 a \lambda + 4 G_0 \lambda \\
 c_1 &= 3 K_0 \lambda^2 + 4 G_0 a \lambda^2 \\
 \gamma_1, \gamma_2 &= - \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 a_1 c_1}}{2 a_1} \\
 p_1 &= \frac{m_3}{a_1 \gamma_1 \gamma_2} \\
 p_2 &= \frac{m_1 (-\gamma_1)^2 + m_2 (-\gamma_1) + m_3}{\gamma_1 a_1 (\gamma_1 - \gamma_2)} \\
 p_3 &= \frac{m_1 (-\gamma_2)^2 + m_2 (-\gamma_2) + m_3}{\gamma_2 a_1 (\gamma_2 - \gamma_1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{n_3}{a_1 \gamma_1 \gamma_2} \\
 q_2 &= \frac{n_1 (-\gamma_1)^2 + n_2 (-\gamma_1) + n_3}{\gamma_1 a_1 (\gamma_1 - \gamma_2)} \\
 q_3 &= \frac{n_1 (-\gamma_2)^2 + n_2 (-\gamma_2) + n_3}{\gamma_2 a_1 (\gamma_2 - \gamma_1)} \\
 w_1 &= G_0 a \\
 w_2 &= \frac{G_0 \lambda - G_0 a \lambda}{\lambda}
 \end{aligned}$$

A.2 점탄성 물성행렬들의 유도(평면응력의 경우)

1) [D^A(n, t)] 의 요소 d^A_{ij} :

$$\begin{aligned}
 d_{11}^A &= d_{22}^A = \frac{p_2}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 t/T}) \\
 &\quad (e^{\gamma_1 t/T} - 1) e^{\gamma_1 (n t/T - t)} \\
 d_{12}^A &= d_{21}^A = \frac{q_2}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 t/T}) \\
 &\quad (e^{\gamma_1 t/T} - 1) e^{\gamma_1 (n t/T - t)}
 \end{aligned}$$

d^A₃₃ = 0

2) [D^B(n, t)] 의 요소 d^B_{ij} :

$$d_{11}^B = d_{22}^B = \frac{p_3}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 \Delta T})$$

$$(e^{\gamma_2 \Delta T} - 1) e^{\gamma_2(n\Delta T - t)}$$

$$d_{11}^E = d_{22}^E = p_3 \left\{ \frac{1}{\gamma_2} e^{\gamma_2 \Delta T} (1 - e^{-\gamma_2 \Delta T}) \right.$$

$$\left. - \Delta T \right\} e^{-\gamma_2 t}$$

$$d_{12}^B = d_{21}^B = \frac{q_3}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 \Delta T})$$

$$(e^{\gamma_2 \Delta T} - 1) e^{\gamma_2(n\Delta T - t)}$$

$$d_{12}^E = d_{21}^E = q_3 \left\{ \frac{1}{\gamma_2} e^{\gamma_2 \Delta T} (1 - e^{-\gamma_2 \Delta T}) \right.$$

$$\left. - \Delta T \right\} e^{-\gamma_2 t}$$

$$d_{33}^B = 0$$

$$d_{33}^E = 0$$

3) [D^C(n, t)] 의 요소 d_{ij}^C :

$$d_{11}^C = d_{22}^C = 0, \quad d_{12}^C = d_{21}^C = 0$$

$$d_{33}^C = \frac{w_2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \Delta T})$$

$$(e^{\lambda \Delta T} - 1) e^{\lambda(n\Delta T - t)}$$

6) [D^F(t)] 의 요소 d_{ij}^F :

$$d_{11}^F = d_{22}^F = 0, \quad d_{12}^F = d_{21}^F = 0$$

$$d_{33}^F = w_2 \left\{ \frac{1}{\lambda} e^{\lambda \Delta T} (1 - e^{-\lambda \Delta T}) \right.$$

$$\left. - \Delta T \right\} e^{-\lambda t}$$

4) [D^D(t)] 의 요소 d_{ij}^D :

$$d_{11}^D = d_{22}^D = p_2 \left\{ \frac{1}{\gamma_1} e^{\gamma_1 \Delta T} (1 - e^{-\gamma_1 \Delta T}) \right.$$

$$\left. - \Delta T \right\} e^{-\gamma_1 t}$$

$$d_{12}^D = d_{21}^D = q_2 \left\{ \frac{1}{\gamma_1} e^{\gamma_1 \Delta T} (1 - e^{-\gamma_1 \Delta T}) \right.$$

$$\left. - \Delta T \right\} e^{-\gamma_1 t}$$

$$d_{33}^D = 0$$

5) [D^E(t)] 의 요소 d_{ij}^E :

A.3 인장력을 받는 점탄성 평판의 변위해의 계수들

$$h_1 = \frac{3 K_0 \lambda + G_0 a \lambda}{9 K_0 G_0 a \lambda}$$

$$h_2 = \frac{1 - a}{3 G_0 a}$$

$$h_3 = \frac{2}{9 K_0}$$

$$h_4 = \frac{1}{3 G_0 a}$$

(접수일자 : 1993. 1. 12)