

직교다항식을 이용한 구조계의 축약된 동강성행렬 표현

Representation of Dynamic Stiffness Matrix with Orthogonal Polynomials

양 경 택* , 최 계 식**
Yang, Kyung-Taek Choi, Kye - Shik

요 약

노후 구조물의 안전진단을 위하여 동적재하시험을 수행하고 그 결과를 유한요소모델과 같은 해석적 모델과 결합하여 기존구조물의 강성평가 및 파손부위 색출에 적용하고 있는데 측정점의 제한성과 유한요소모델의 많은 자유도가 측정데이터를 유한요소모델과 연계하는데 커다란 문제점으로 대두된다. 본 연구에서는 유한요소모델과 같이 많은 자유도를 갖는 구조계의 해석적 모델을 측정데이터와 결합하기 위하여 축약된 좌표계에서 구조계의 동강성행렬(dynamic stiffness matrix) 표현방법을 제시하였다. 유한요소모델로부터 좌표계를 축약시 필연적으로 발생하는 주파수의존성(frequency dependency)을 고려하기 위하여 주파수영역에서 Chebyshev다항식으로 축약된 동강성행렬을 표시하였고 특이점에서 발생하는 악조건(ill-condition)을 극복하기 위하여 특이해분리(singular value decomposition) 기법을 사용하였다. 제시된 방법의 검증을 위하여 간단한 구조계에 대하여 시뮬레이션을 수행하였으며 본 방법으로 수립된 구조계의 동적 모델은 축약이전의 전체계에 대한 동적특성을 비교적 정확히 유지하고 있고 일반적으로 사용되는 정적축약 형태의 수학적 모델보다 우수함을 알 수 있었다.

Abstract

A modeling method is described to provide a smaller structural dynamic model which can be used to compare finite element model of a structure with its experimental counterpart. A structural dynamic model is assumed to be represented by dynamic stiffness matrix. To validate a finite element model, it is often necessary to condense a large degrees of freedom (dofs) to a relatively small number of dofs. For these purpose, static reduction techniques are widely used. However, errors in these techniques are caused by neglecting frequency dependent terms in the functions relating slave dofs and master dofs. An alternative method is proposed in this paper in which the frequency dependent terms are considered by expressing the reduced dynamic stiffness matrix with orthogonal polynomials. The reduced model

* 선임연구원, 공학박사
** 연구소장, 공학박사
대림산업(주), 기술연구소

이 논문에 대한 토론을 1993년 12월 30일까지 본학회에 보내주
시면 1994년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

has finally a minimum set of dofs, such as sensors and excitation points and it is under the same condition as the physical system. It is proposed that the reduced model can be derived from finite element model. The procedure is applied to example structure and the results are discussed.

1. 서 론

구조해석의 궁극적인 목적은 구조물을 묘사하는 해석적모델을 구하는데 있다. 이러한 해석적모델은 구조물의 설계시 매우 중요하며 구조변경(structural modification)의 효과를 정량적 또는 정성적으로 평가하는데 유용하게 사용된다. 일반적으로 사용되는 구조물의 모델링 방법에는 유한요소법과 같이 구조물을 여러개의 요소로 나누어 많은 자유도를 지닌 이산모델(discrete model)을 구성하는 것으로 컴퓨터의 보편화와 상용프로그램의 개발 및 보급으로 구조물의 정적, 동적해석에 널리 사용되고 있으며, 이와 더불어 해석결과의 신뢰도제고가 요구되고 있는 실정이다. 이러한 상황에서 대상구조물의 정확한 해석적 모델수립이 필요하게 되고 실측데이터를 이용하여 이미 수립된 유한요소모델의 신뢰도를 개선하려는 많은 연구가 있었으며, 이와 같은 연구에서는 유한요소모델의 질량, 강성, 감쇠행렬전체에 불확실성이 존재한다는 가정하에 실측데이터를 이용하여 유한요소모델의 신뢰도를 개선하였다.^(1~5)

최근들어 이와 같은 연구의 일환으로 노후구조물의 강성을 평가하거나 구조물의 손상부위를 색출하기 위하여 동적재하시험으로부터 얻은 실측데이터를 유한요소모델과 결합하려는 시도가 활발히 진행되고 있다. 그러나 구조계에 작용하는 입력하중과 측정기록을 유한요소모델과 결합하는데 있어 가장 큰 어려움은 측정점과 유한요소모델의 자유도(dgree of freedom) 수의 차이이다. 즉, 수백개의 자유도를 지닌 유한요소모델에 비해 측정된 자유도는 측정위치, 센서갯수의 제한성과 같은 현실적 어려움때문에 단지 몇 지점에 지나지 않게 된다. 이와 같은 불완전성을 극복하기 위하여 좌표변환을 통하여 유한요소모델과 측정데이터를 연계하게 되는데 해석대상물의 수학적 모델들 사이에는 관점에 따라 그림 1과 같은 상호관계가 존재하며, 이 세 가지의 수학적 모델은 등가의

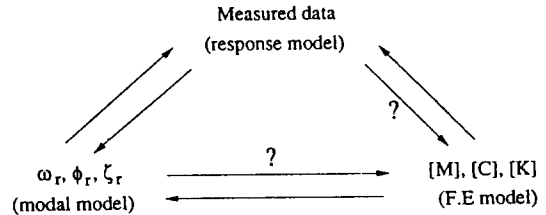


Figure 1 Representation of mathematical models.

표현이므로 한 모델에서 다른 모델로의 변환이 가능하나 각각의 모델이 가지고 있는 제한적 요소 때문에 실질적으로는 이들 모델간에 완전한 등가가 이루어질 수 없다^(6, 7). 예를 들면 측정점의 수와 모우드와의 수가 일치하지 않아 측정된 주파수응답함수(frequency response function)로부터 유한요소모델의 특성행렬로의 변환이 어렵게 되고 실험적 모우드 해석으로부터 구한 모우드 매개변수(modal parameter)를 이용하여 유한요소모델의 행렬들을 정확히 구할 수 없다는 제약이 있다. 따라서 측정데이터를 이용하여 구조계의 수학적 모델을 구하거나 또는 실험적 모델과 유한요소모델과 같은 해석적 모델을 결합시키기 위하여는 좌표계를 축약하여 축약된 좌표계에서 이들의 모델을 연계하여야 한다.

본 연구에서는 측정데이터와 유한요소모델과 같은 해석적 모델을 물리좌표계에서 직접 연계시키기 위하여 측정점과 관계되는 자유도에 대하여 구조계의 수학적모델을 동강성행렬(dynamic stiffness matrix)로 정의한 뒤, 축약된 좌표계에서 필연적으로 발생하는 주파수의존성을 고려하여 주파수영역에서 이를 Chebyshev 다항식으로 표시하였다. 주어진 많은 자유도의 유한요소모델로부터 이처럼 선택된 좌표계에 대하여 구조계의 동강성행렬을 구하는 것은 일종의 축약이고, 측정된 응답으로부터 측정점과 관계되는 좌표계에 대하여 동강성행렬을 구하는 과정은 측정데이터로부터

터 대상 구조계를 잘 묘사하는 해석적 모델의 수립이 된다. 이와 같이 주파수의존성을 고려하여 표현된 구조계의 동강성행렬은 주파수의 고차항을 가진 함수이므로 측정점과 관계되는 적은 자유도 만으로도 구조계를 잘 묘사할 수 있으며 실측데이터를 물리좌표계에서 직접 유한요소모델과 결합시킬 수 있다.

2. 이론적 배경

n개의 자유도를 가지는 구조계의 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = f \tag{1}$$

여기서 [M], [C], [K]는 구조계의 질량, 감쇠, 강성행렬이다.

유한요소모델과 같은 선형계의 이산 모델은 보통 많은 수의 자유도를 가지게 되는데 이 경우 연산의 효율성을 위하여 계의 운동방정식을 기술하는 특성행렬의 차수를 줄이게 된다. n개의 자유도 중 가진위치(exciting point) 및 관심있는 응답의 위치에 대한 m개의 자유도(master degree of freedom)를 $\{x_m\}$ 으로 하고 (n-m)개의 제거될 자유도(slave degree of freedom)를 $\{x_s\}$ 로 구분하여 분리된 행렬형태로 표현하면

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_m \\ f_s \end{Bmatrix} \tag{2}$$

가진력이 $\{x_m\}$ 의 자유도에만 작용하는 경우에, 식(2)는 주파수영역에서 식(3)과 같이 기술된다.

$$\begin{bmatrix} D_{mm}(\omega) & D_{ms}(\omega) \\ D_{sm}(\omega) & D_{ss}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_m(\omega) \\ X_s(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m(\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

여기서 $X_m(\omega)$, $X_s(\omega)$, $F_m(\omega)$ 는 $x_m(t)$, $x_s(t)$, $f_m(t)$ 의 Fourier 변환이고 $D_{ij}(\omega)$ (i, j=m 또는 s)는 동강성행렬성분이다.

$X_s(\omega)$ 를 제거하기 위하여 식(3)의 아래부분으로부터 다음식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{X_s(\omega)\} &= [D_{ss}(\omega)]^{-1} [D_{sm}(\omega)]\{X_m(\omega)\} \\ &= -[[K_{ss}] - \omega^2[M_{ss}]]^{-1} [[K_{sm}] - \omega^2[M_{sm}]]\{X_m(\omega)\} \end{aligned} \tag{4}$$

그리고 축약된 좌표계(X_m)에 대한 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[D_R(\omega)]\{X_m(\omega)\} = \{F_m(\omega)\} \tag{5}$$

여기서

$$[D_R(\omega)] = [D_{mm}(\omega)] - [D_{ms}(\omega)] [D_{ss}(\omega)]^{-1} [D_{sm}(\omega)] \tag{6}$$

이와같이 동적축약을 통해 구한 구조계의 동강성행렬($[D_R(\omega)]$)은 $m \times m$ 의 행렬이지만 n개의 고유진동수를 갖게 되고 주파수응답함수의 관점에서 축약이전의 계를 완벽하게 묘사하며 식(6)과 같이 주파수의 복잡한 함수형태를 갖게 된다. 이는 식(4)에서 보듯이 $X_m(\omega)$ 와 $X_s(\omega)$ 의 관계에서 관성력이 주파수에 따라 변화하게 되므로 관성력을 고려할 경우에는 변환행렬이 항상 주파수의존성(frequency dependency)을 갖게 된다.

일반적인 유한요소 프로그램에서 많은 자유도를 줄이기 위하여 사용하는 정적축약은 관성력에 의한 영향을 무시하여 $X_m(\omega)$ 와 $X_s(\omega)$ 의 관계를 주파수의존성 없이 다음과 같이 표시한다.^(8, 9)

$$\{X_s(\omega)\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{X_m(\omega)\} \tag{7}$$

식(7)은 식(4)의 관계에서 주파수의존성을 무시하였으므로 관성력이 작은 저주파수범위에서는 비교적 계를 정확히 묘사하나 주파수가 커질수록 오차가 커지고 또한 이와 같이 정적축약으로 구한 구조계의 수학적모델이 유효한 주파수범위는 약 $1/2\omega_G$ 이하의 주파수범위로 알려져 있다.⁽¹⁰⁾ 여기서 ω_G 는 다음 고유치문제의 최소의 고유치이며,

$$[[K_{ss}] - \omega^2[M_{ss}]] \{ \phi \} = \{ 0 \} \tag{8}$$

$[K_{ss}]$ 와 $[M_{ss}]$ 는 제거되는 자유도에 대한 강성 및 질량행렬이다.

이처럼 정적축약으로 구해진 계의 모델은 식(8)에서 보듯이 제거될 좌표계 X_s 에 따라 유효한 주파수범위가 변하게 되므로 되도록 ω_G 가 최대가 되는 조건으로 X_m 을 선택하여야 하며 또한 단순

히 이런 조건으로 선택한 X_m 은 반드시 물리적으로 관심있는 자유도만을 포함하지는 않는다.

이상과 같이 정적축약으로 계의 해석적 모델을 구하는 경우에는 X_s 와 X_m 의 관계가 주파수의존성이 없이 표시되어 축약된 계의 특성행렬, 즉 질량과 강성행렬이 상수로 결정되나 ω_C 이상의 주파수범위에 대하여는 축약이전의 계를 묘사하지 못한다. 반면 식(5)와 식(6)의 동적축약의 경우에는 축약이전의 계를 완벽하게 묘사할 수 있으나 X_s 과 X_m 의 관계가 주파수의존성이 있어 축약된 계의 동강성행렬이 주파수의존성을 갖게 되며 시간영역에서 구조계의 운동을 기술하는 질량과 강성행렬의 성분을 구하기가 어려워진다. 이와 같은 축약된 구조계의 주파수의존성을 고려하기 위하여 Kidder⁽¹¹⁾등은 아래와 같이 짝수차 다항식 전개(binomial expansion)를 이용하여 주파수의존성을 고려하였다.

$$[[K_{ss}] - \omega^2 [H_{ss}]]^{-1} = [K_{ss}]^{-1} ([1] + \omega^2 [M_{ss}] [K_{ss}]^{-1} + \omega^4 [M_{ss}] [K_{ss}]^{-1} [M_{ss}] [K_{ss}]^{-1} + \omega^6 \dots) \quad (9)$$

식(9)를 식(4)와 식(6)에 대입하여 축약된 좌표계에 대하여 계의 동강성행렬을 ω 의 짝수차 다항식으로 모델링할 수 있으나 위의 전개도 $\omega < \omega_C$ 인 경우에만 수렴이 보장된다. 식(9)를 이용해 구조계의 동강성행렬을 구하면 고차항의 계수는 저차항의 계수에 비해 값이 작아 해석시 불안정성(ill-condition)이 발생하게 되고 또한 축정된 주파수 응답함수를 이용하여 최소사승법(least square method)으로 계를 모델링할 경우에는 구하려는 계수들의 크기차이가 심하여 고차항을 정확히 구하기 힘들게 된다.

3. 구조계의 축약된 수학적모델

본 연구에서는 축약된 좌표계에서 발생하는 주파수의존성을 고려하기 위하여 관심있는 주파수 영역내에서 계의 동강성행렬을 직교다항식(orthogonal polynomial)인 p차의 Chebyshev 다항식으로 아래와 같이 표시하였다.

$$[D_R(\omega)] = \sum_{i=0}^p [A^i] T_i(\omega) \quad (10)$$

여기서 $[A^i]$ 는 계수행렬이고 $T_i(\omega)$ 는 Chebyshev 다항식의 i번째항이며 다음과 같은 직교성을 가진다.

$$\int_{-1}^1 T_\mu(\omega) T_\nu(\omega) d\omega = 0 \quad \text{for } \mu \neq \nu \quad (11)$$

여기서 μ 와 ν 는 양의 정수이고 Ω 는 고려되는 주파수성분의 갯수이다.

관심있는 주파수영역에서 축약된 계의 주파수의존성을 이처럼 직교 다항식으로 표시하면 저차다항식의 계수들이 고차다항식의 계수에 무관하므로 계의 차수를 모르는 경우에도 효율적으로 계수를 구할 수 있고 식(9)와 같이 짝수차의 다항식으로 모델링한 경우에는 저차와 고차다항식의 계수차이가 크게 되나 직교다항식을 사용하면 기저(base)를 정규화(normalize)시킬 수가 있어 계수들의 크기가 비슷해져 측정데이터로부터 계의 계수를 효율적으로 구할 수 있다. Chebyshev 다항식의 또다른 장점은 고려하는 주파수영역에 대하여 피팅(fitting)된 결과의 오차가 특정범위 안에 든다고 알려져 있다.

식(2)나 식(3)과 같이 전체계의 해석적모델을 유한요소법으로 구한 경우에는 특정한 Ω 개의 주파수성분에 대하여 식(6)을 이용하여 오차가 없는 동강성행렬($[D_R(\omega)]$)을 구하고 이를 식(10)에 대입한다.

$$\begin{aligned} [A^0]T_0(\omega_1) + [A^1]T_1(\omega_1) + \dots + [A^p]T_p(\omega_1) &= [D_R(\omega_1)] \\ [A^0]T_0(\omega_2) + [A^1]T_1(\omega_2) + \dots + [A^p]T_p(\omega_2) &= [D_R(\omega_2)] \\ \dots & \dots \dots \dots \\ [A^0]T_0(\omega_\Omega) + [A^1]T_1(\omega_\Omega) + \dots + [A^p]T_p(\omega_\Omega) &= [D_R(\omega_\Omega)] \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)로부터 $[A^i]$ 가 대칭행렬임을 고려하여 다음의 식을 풀어 계의 계수행렬($[A^i]$)을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} T_0(\omega_1)] & T_1(\omega_1)] & \dots & T_p(\omega_1)] \\ T_0(\omega_2)] & T_1(\omega_2)] & \dots & T_p(\omega_2)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_0(\omega_\Omega)] & T_1(\omega_\Omega)] & \dots & T_p(\omega_\Omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A^0] \\ [A^1] \\ \dots \\ [A^p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_R(\omega_1)] \\ \cdot \\ \cdot \\ [D_R(\omega_\Omega)] \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서 식(13)이 유일해(unique solution)를 갖기 위하여는 고려하는 주파수성분의 수(Ω)가 다항식의 차수(P) 이상이어야 한다.

식(13)을 구성하기 위하여 동강성행렬($[D_R(\omega)]$)을 구할 경우 ω 가 식(8)에서 정의된 특이점 ω_G 에 근접하면 랭크(rank)가 부족하게 되어 식(6)에서 수치적으로 $[D_{ss}(\omega)]$ 의 역행렬을 구하기가 어렵게 된다. 따라서 다음과 같이 특이치 분리(singular value decomposition)을 이용하여 역행렬을 구한다.⁽¹²⁾

$$[D_{ss}(\omega)] = [K_{ss}] - \omega^2 [M_{ss}] \\ = [U][\Sigma][V]^T \quad (14)$$

여기서 $[\Sigma]$ 는 특이치(singular value, σ_i)로 구성되는 대각행렬로서 랭크가 부족한 경우에는 최소의 특이치들이 영 근처의 값을 갖게 되고 $[U]$, $[V]$ 는 다음의 성질을 갖는 직교행렬로서 좌측 특이벡터(left singular vector)와 우측특이벡터(right singular vector)이다.

$$[U]^T = [U]^{-1}, [V]^T = [V]^{-1} \quad (15)$$

따라서 일반화된 역행렬(generalized inverse)은 다음과 같다.

$$[D_{ss}(\omega)]^+ = [V][\Sigma]^+[U]^T \quad (16)$$

여기서 $[\Sigma]^+$ 는 특이치 σ_i 의 역수를 대각항으로 갖는 행렬로서 σ_i 가 특정값(τ)보다 작은 경우에는 $1/\sigma_i$ 을 영으로 한다.

$$\text{즉 } ([D_{ss}(\omega)]^+)_i = \sum_k \frac{V_k U_k}{\sigma_k} \quad (17)$$

식(16)의 $[D_{ss}(\omega)]^+$ 는 최소자승오차의 개념으로 $\| [D_{ss}(\omega)]^+ \|$ 를 최소화하는 값이 된다.

이처럼 구한 $[D_{ss}(\omega)]^+$ 의 역행렬을 이용하여 식(6)으로 특이점 근처에서의 동강성행렬성분을 구하고 식(13)을 풀어 축약된 좌표계에 대해 계의 동강성행렬을 직교 다항식으로 표시할 수 있다. 임의로 $\{x_m\}$ 을 선택한 뒤 축약된 좌표계에 대하여 계의 동적 특성을 이처럼 Chebyshev 다항식으로

표시하면 정적축약과는 달리 식(8)에서 정의되는 특이점(ω_G)에 의해 유효한 영역이 제한되지 않고 고려하는 주파수영역에 대하여 대상 구조계를 잘 묘사할 수 있다.

4. 예제 및 고찰

앞 절에서 제시된 바와 같이 주어진 유한요소모델로부터 선택된 좌표계에 대하여 주파수의존성을 고려하여 구조계의 모델을 수립하기 위하여 축약된 좌표계에서의 동강성행렬을 Chebyshev 다항식으로 표시하였다.

그림 2와 같이 양단이 지지되는 보를 16개의 자유도를 가지고 유한요소모델로 모델링한 뒤, 4개의 모드만을 고려하기 위하여 4개의 좌표를 선택하여 축약된 좌표계에 대한 계의 동강성행렬을 Chebyshev 다항식으로 표시하였다. 그리고 이와 같이 표시된 계의 해석적모델로부터 구한 주파수응답함수와 축약이전의 전체계로부터 구한 주파수응답함수를 비교하여 축약된 모델의 정확성

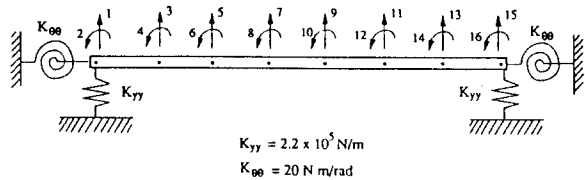


Figure 2 Finite element model of beam.

을 평가하였다. 식(6)과 식(8)에서 처럼 축약된 좌표계를 선택하는 방법에 따라 특이점(ω_G)이 관심있는 주파수영역내에 존재할 수도 있고 그렇지 않을 경우도 있으므로 다음과 같이 두 경우를 고려하였다.

(i) case 1: 특이점(ω_G)이 관심있는 주파수영역내에 있는 경우

대상으로 하는 주파수영역내(0-600Hz)에서 4개의 모드를 고려하기 위하여 4개의 좌표를 선택하는 방법은 상당히 많지만 본 예제에서는 $\{x_m\}$ 을 $\{x_1, x_5, x_{11}, x_{15}\}$ 으로 선정하였다. 이 경우

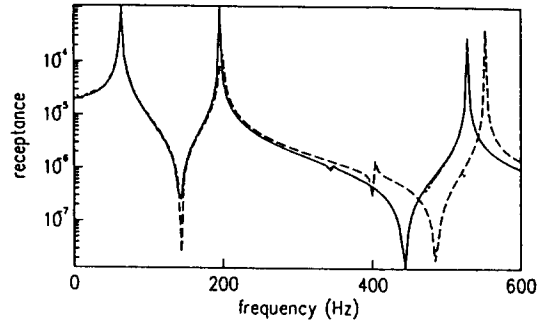
나머지 좌표계 $\{x_s\}$ 에 대한 강성과 질량행렬로 식 (8)에 의해 결정되는 ω_G 는 약 420Hz가 된다. 축약된 좌표계에 대한 동강성행렬은 Chebyshev 다항식의 6개 항을 고려하여 아래와 같이 가정하였다.

$$[D_R(\omega)] = \sum_{i=1}^6 |A^i| T_i(\omega)$$

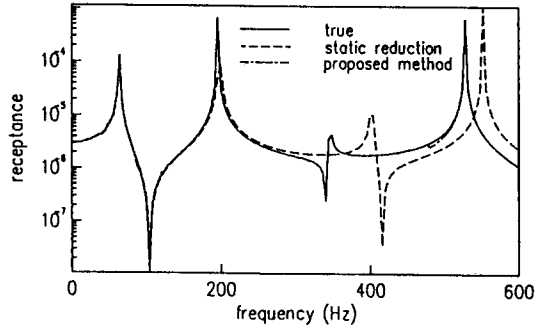
60개의 주파수성분($\Omega=60, \Delta f=10\text{Hz}$)에 대해 식(6)을 이용하여 동강성행렬값을 구하고 ω_G 근처의 주파수 성분에 대하여는 특이치분리의 결과식인 식(17)을 이용하였다. 60개의 동강성행렬값으로 식(13)을 구성하고 계수행렬 $[A^i]$ 를 구하였다. 이처럼 구한 축약된 좌표계의 동강성행렬을 이용하여 가진점을 11로 한 경우의 각 지점에 대한 주파수 응답함수를 구하고 이를 축약이전의 전체계로부터 구한 주파수 응답함수와 비교하고 또한 정적 축약으로부터 구한 결과와도 그림 3에서 비교하였다. 그림에서처럼 주파수의존성을 고려하기 위하여 고차의 주파수항을 고려한 동강성행렬은 축약이전의 전체계에 대한 주파수 응답함수와 정확히 일치하고 있으나 정적축약을 이용하여 구한 결과는 앞에서 언급하였듯이 약 210Hz($1/2\omega_G$) 이내에서만 정확하고 그 이상의 영역에서는 실제 계를 묘사하지 못한다. 즉 정적축약에서는 좌표계 $\{x_s\}$ 에 대한 강성과 질량행렬에 의해 결정되는 ω_G 에 의해 축약된 모델의 유용한 범위가 제한을 받게 되나 제시된 방법으로 구한 해석적모델은 $[A^i]$ 의 각 항이 질량이나 강성과 같은 물리적 의미는 갖지 못하나 고려한 주파수영역내에서 축약이전의 전체계의 동적특성을 잘 나타내고 있다.

(ii) case 2: 특이점(ω_G)이 관심있는 주파수영역 내에 없는 경우

앞의 경우와 마찬가지로 4개의 모우드를 고려하기 위하여 4개의 좌표를 선정하였다. $\{x_m\}$ 은 $\{x_3, x_6, x_{11}, x_{13}\}$ 으로 하였고 이 경우 나머지 좌표계 $\{x_s\}$ 에 대한 강성 및 질량행렬에 의해 결정되는 ω_G 는 약 612Hz로 관심있는 주파수범위내에 들지 않게 된다. 축약된 좌표계에 대한 동강성행렬을 Chebyshev 다항식으로 표시하기 위하여 case



(a) FRF ($H(i,j), i=11, j=11$)

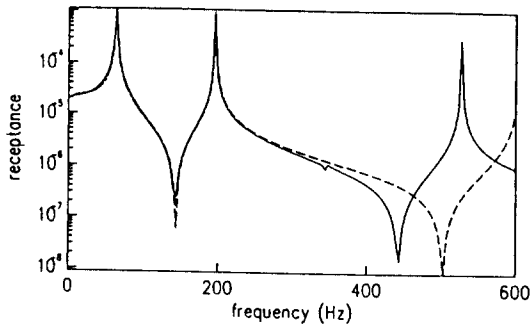


(b) FRF ($H(i,j), i=15, j=11$)

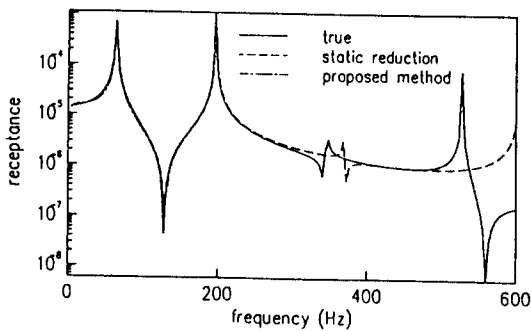
Figure 3 Comparison of FRFs(case 1).

1)과 마찬가지로 60개의 주파수성분에 대해 동강성행렬값을 구하고 이를 이용하여 식(13)으로 계수행렬을 구하였다. 이처럼 축약된 좌표계에서 수립된 계의 동강성행렬로 주파수 응답함수를 구하여 축약이전의 전체계에 대한 주파수 응답함수와 비교하였고 또한 정적축약의 결과와도 그림 4에서 비교하였다. case 1)의 결과와 마찬가지로 주파수의존성을 고려하여 축약된 동강성행렬은 주파수 응답함수의 관점에서 축약이전의 계를 완벽하게 묘사하나 정적축약으로 구한 결과는 그림에서처럼 처음 2개의 모우드만을 묘사하고 $1/2\omega_G$ 이상의 주파수영역에서는 축약이전의 계를 묘사하지 못한다.

또한 위의 두 경우에 대하여 축약된 동강성행렬로부터 구한 고유진동수를 축약이전의 유한요소모델로부터 구한 고유진동수와 표 1과 표 2에서 비교하였다. 주파수의존성을 고려하여 제시된



(a) FRF ($H(i,j)$, $i=11, j=11$)



(b) FRF ($H(i,j)$, $i=13, j=11$)

Figure 4 Comparison of FRFs(case 2).

방법으로 수립된 해석적모델은 고려된 주파수영역 내에 있는 네개의 고유진동수에 대하여 축약이전의 전체구조계를 잘 묘사하나 정적축약으로 수립된 모델은 첫번째 고유진동수는 비교적 정확하나 고차의 모드에서는 많은 오차가 수반됨을 알 수 있다. 일반적인 구조물에 있어서 부분적인 손상이나 강성감소는 대개 고차의 고유진동수에 많은 영향을 미치게 되므로 제시된 방법으로 수립된 구조계의 수학적 모델은 이러한 관점에서 정적축약형태의 수학적 모델보다 우수함을 알 수 있다.

5. 결 론

유한요소법을 이용하여 구조계의 응답을 구하는 경우나 실험데이터를 이용하여 구조계의 강성을 평가하는데 있어서 취급할 수 있는 자유도의 수가

Table 1 True and estimated natural frequencies(case 1).

mode no.	full FEM	proposed method (% error)	static reduction (% error)
1	63.9Hz	63.5Hz (0.06%)	63.0Hz (1.41%)
2	196.8Hz	196.8Hz (0%)	205.4Hz (4.4%)
3	345.4Hz	346.1Hz (0.17%)	400.7Hz (16%)
4	533.3Hz	534.0Hz (0.13%)	557.6Hz (4.5%)

Table 2 True and estimated natural frequencies(case 2).

mode no.	full FEM	proposed method (% error)	static reduction (% error)
1	63.9Hz	63.1Hz (1.25%)	62.6Hz (1.72%)
2	196.8Hz	196.2Hz (0.30%)	199.3Hz (1.16%)
3	345.4Hz	346.0Hz (0.17%)	375.0Hz (8.56%)
4	533.3Hz	534.1Hz (0.14%)	-

제한되므로 대개의 경우 좌표계의 축약이 필요하다. 본 연구에서는 주어진 많은 자유도의 유한요소모델로부터 관심있는 자유도를 선택한 뒤, 구조계의 동적특성을 선택된 좌표계에 대한 동강성행렬로 정의하고 이를 Chebyshev 다항식으로 표시하였다. 고려하는 주파수영역내에서 선택된 좌표계에 대한 동강성행렬을 이차립 직교다항식으로 표현하면 좌표계의 축약시 필연적으로 발생하는 주파수의존성을 고려할 수 있고 정적축약과는 달리 축약된 모델의 유효한 범위가 제한받지 않게 된다.

이처럼 주파수의 고차항을 고려하여 수립된 해석적모델은 비복 질량과 강성행렬을 따로 분리할 수 없을 지라도 고려한 주파수영역내의 모드에서 전체구조계를 잘 묘사하고 있으므로 최소한의 자유도로 전체구조계의 동적 특성을 효율적으로 표현할 수 있다고 판단된다. 또한 제시된 수학

적모델은 주파수응답함수의 관점에서 대상 구조계를 잘 묘사하므로 실측된 동적데이터와 유한요소모델을 물리좌표계에서 직접 연계함으로써 다음의 분야에 이용될 수 있고 이에 대한 연구가 진행중이다.

- 1) 측정된 응답을 이용한 구조계의 매개변수 모델(parametric model)
- 2) 측정데이터를 이용한 유한요소모델의 신뢰도 평가
- 3) 측정된 응답과 유한요소모델을 이용한 구조계의 입력하중 규명

REFERENCES

1. Jon D. Collins, Gary C. Hart, "Statistical Identification of Structures", *AIAA Journal*, Vol. 12, 1974, pp.185-192.
2. Hart, G. C and Collins, J.D, "The Treatment of Randomness in Finite Element Modelling", *Transactions of The SAE*, Vol.81, Part 4, 1970, pp.2408-2416.
3. Kiefling, "Comment on the Eigenvalue Problem for Structural Systems with Statistical Properties", *AIAA Journal*, Vol.8(7), 1970, pp.1371-1372.
4. T.K. Hasselman and G.C. Hart, "Modal Analysis and Random Structural Systems", *ASCE Journal*, June, 1972, pp.561-579.
5. J.K. Vandiver, "Structural Damage Detection by Measurement of Dynamic Response", *The Spring Meeting/STAR Symposium*, San Francisco, Cal, May 25-27, 1977.
6. A.Berman and E.J. Nagy, "Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data", *AIAA Journal* 21, 1983, pp.1168-1173.
7. Shah, V.N. and Raymund, M., "Analytical Selection of Masters for Reduced Eigenvalue Problem", *Int'J for Numerical Methods in Engineering*, Vol.18, 1982, pp.89-98.
8. Robert J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", *AIAA Journal*, Vol.3(2), 1965, pp.380.
9. Bruce, Irons, "Structural Eigenvalue Problems : Elimination of Unwanted Variables", *AIAA Journal*, Vol.3(5), 1965, pp.961-962.
10. N. Bouhaddi, S. Cogan and R. fillod, "Dynamic Substructuring by Guyan Condensation Selection of The Master DOF", *The 10th Internal Modal Analysis Conferences*, 1992, pp.328-333.
11. R.L. Kidder, "Reduction of Structural Frequency Equations", *AIAA Journal*, Vol.11, 1973, pp.892.
12. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing, *Cambridge University Press*, 1986.
13. 윤정방, Masanobu Shinozuka, "구조물의 동특성 추정방법에 관한 연구", *전산구조공학회지*, 제2권, 제2호, 1989, pp.113-116.
14. Andrew Yee-Tuk Leung, "An Accurate Method of Dynamic Condensation in Structural Analysis", *Int'J for Numerical Methods in Engineering*, Vol.12, 1978, pp.1705-1715.
15. A.J. Fricker, "A New Approach to the Dynamic Analysis of Structures using Fixed Frequency Dynamic Stiffness Matrices", *Int'J for Numerical Methods in Engineering*, Vol.19, 1983, pp.1111-1129.

(접수일자 : 1992. 12. 21)