論文 한국정밀공학회지 제10권 제2호 1993.6
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 10. No.2 Jun. 1993.

사다리꼴 모양의 돌기나 V형 홈을 갖는 형상 환상압연에 대한 UBET 해석

한 영 호*, 양 동 열**

Analysis of Profile Ring Rolling for Rings having V-groove or Trapezoidal Protrusion by the Upper-Bound Elemental Technique

Young-Ho Hahn*, Dong-Yol Yang**

ABSTRACT

To diversify the area of application of UBET to the analysis of ring rolling which produces rings having more complex cross-sectional configuration, an element of triangular cross-section has been introduced and the corresponding kinematically admissible velocity field has been derived while considering the material flow between neighboring elements. The theoretical predictions in roll torque and profile formation show good agreement with the experiments. The effect of process parameters such as feed rate and taper angle of the roll groove has been discussed.

Key Words : Profile ring rolling, Upper-Bound Elemental Technique

1. 서 론

환상압연(環象壓延, ring rolling)은 외경이 작고 두께가 큰 링 소재를 두 개의 롤 사이에 물려 연속적으로 압연하여 두께를 줄이고 직경을 늘리는 동시에 원하는 단면형상을 갖는 이음매가 없는 링 제품을 만들어 내는 매우 독특한 형태의 소성가공 공정으로서, 1842년 영국에서 처음 설계된 이래[1], 제품의 크기에 따라 여러가지 형태의 환상압연기가 개발, 활용되어 왔다[2]. 최근 들어서는 전산기 제어 환상압연기가 제작되어 생산현장에서 사용되고 있다[3]. 환상압연에 의해 생산된 링 제품은 공정의 특성상 타 공정에 의해 제작된 링에 비해 기계적 성질, 소재 절약, 생산성의 면에서 뛰어난 장점을 가지므로 기차차륜, 중대형 치차의 소재, 압력용기의 보강 플랜지, 베어링레이스, 항공기 및 로켓엔진용의 고강도 링 등 다양한 곳에 사용되고 있다.

그림 1에서 보는 바와 같이 환상압연에서는 비대칭인 두 롤 사이의 좁은 변형 영역에서 일어난 미소 변형이 연속적으로 누적되어 결과적인 제품형상을 이루게 되므로 일반적인 평판 압연과는 변형기구가 크게 상이할 뿐

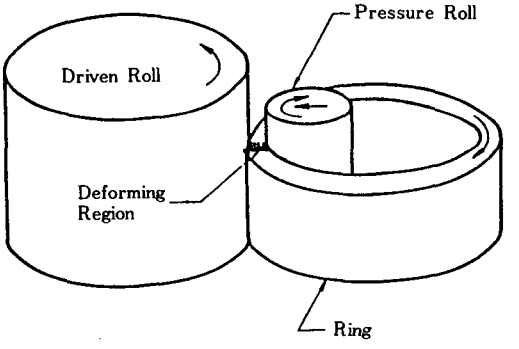


Fig. 1 Schematic diagram of the ring rolling process

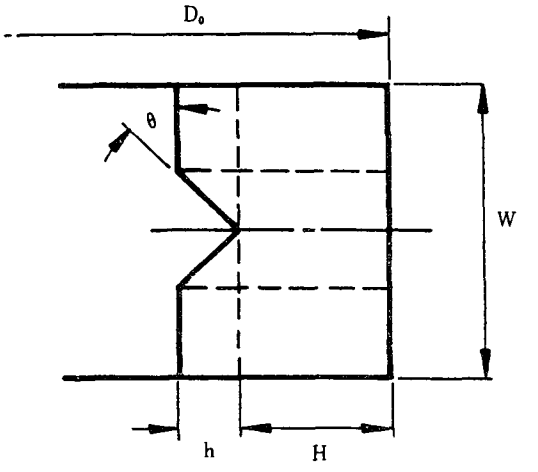
* 건국대학교 기계설계학과(정회원)
** 한국과학기술원 정밀공학과(정회원)

만 아니라, 변형역의 정확한 묘사가 어려워 이에 대한 해석은 몇몇의 이론적 예측[4]을 제외하면 실험에 의한 결과의 제시가 주를 이루어 왔다[5,6].

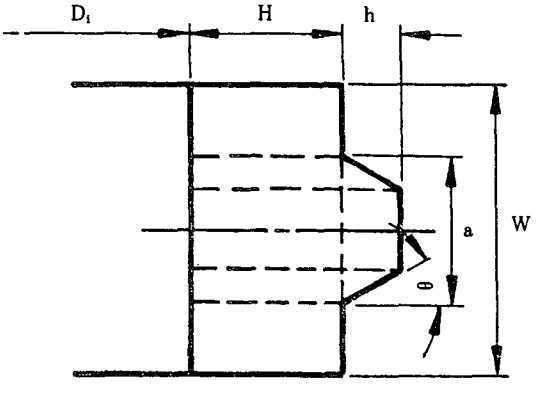
링 단면이 직사각형인 평환상압연(plane ring rolling)과는 달리 형상환상압연(profile ring rolling)의 경우는 링의 표면에 홈이나 돌기가 형성되면서 링 단면이 일반적인 모양을 가지게 되므로 소성변형이 3차원 유동을 나타내게 되고, 이 경우에 대한 변형의 해석은 과감한 가정들을 통하여 해석 가능한 형태로 변형역을 단순화시키지 않는 한 매우 어려우며, 한편으로는 도입된 가정들 역시 실제의 공정에서 나타나고 있는 제 현상들과 상반되지 않는 범위에서 선택되어져야 하므로 이론해석에 의한 연구 결과가 다른 소성가공 공정들에 비해 미약한 실정이다. 지금까지 형상환상압연에 대해 발표된 연구 결과들을 살펴보면, 1970년대 중반부터 영국에서 몇 편의 실험 결과가 발표되었으며[7,8], 해석을 통한 시뮬레이션은 주로 국내에서 시도되어 왔다. Yang등[9]은 L형 단면을 가지는 링 성형을 예로 한 형상환상압연에 대한 최초의 상계법에 의한 해석 결과를 제시하였으며, Chang[10]이 이를 이어 반경방향의 안쪽면에 직사각 홈이 파여진 링의 단면을 3개의 직사각형 요소로 분할하고 각 요소 사이의 소재 유동을 고려한 속도장을 발표하였다. Hahn등[11]은 단면이 직사각형 요소들의 조합으로 표현될 수 있는 여러 경우의 링들을 대상으로 상계요소법을 적용하여 압연중의 구동토오크와 링형상의 변화를 예측하고 이를 이미 발표된 실험결과와 비교하여 상계요소법에 의한 형상환상압연의 해석 가능성을 제시하였다. Yang과 K.H.Kim[12], 그리고 N.S. Kim[13]은 유한요소법을 형상환상압연에 적용하여 어미(fishtail)형성, 형상 충진등 환상압연 특유의 복잡한 변형양상을 정확히 예측하는 등 많은 면을 성공적으로 묘사하고 있다. 그러나 형상환상압연과 같은 3차원 소성유동 문제들이 유한요소법에 의하여 해석되기에는 문제마다의 특징적인 어려움이 많아 산업현장에서 널리 쓰이기에는 한계가 있다.

주어진 소성성형 과정에 대해 실제의 소성유동 형태를 정확히 묘사할 수 있되 너무 복잡하지 않고 계산이 지나치게 어렵지 않은 실용적인 해석 수단의 개발이라는 관점에서 본다면 비록 유한요소법에 의한 수치해의 결과가 정확하고도 다양한 정보를 제시하고 있다하나 다른 방법들도 나름대로 그 의미를 가지며 그 중의 한 방법으로써 상계요소법(Upper-bound elemental technique, 이하 UBET)을 예로 들 수 있다. Kudo[14], Kobayashi[15], Bramley 등[16], Kiuchi[17], Yang 등[18]의 연구 결과에서 보듯이 소성가공의 여러 분야에서 간편하면서도 효과적인 해석 수단으로 UBET가 평가되고 있다.

본 연구에서는 V자 모양의 홈이나 사다리꼴의 돌기가 나있는 단면 형상이 좀 더 일반적인 링에 대한 환상압연의 해석을 시도하였다. 이러한 단면모양들은 그림 2에서 보는 바와 같이 사각형 단면을 갖는 요소와 삼각형 단면을 갖는 요소의 조합으로 표시된다.



(a) ITR



(b) OTP

Fig. 2 Rings having V-groove or trapezoidal protrusion

따라서 본 연구에서는 삼각형 요소에 대해 그림 3에 주어진 속도 경계조건과 비압축성 조건을 만족하는 동적 가용 속도장을 유도한 후, 이것을 기왕의 사각형 요소에 대한 결과[11]와 조합하여 그림 2의 몇 개의 링 형상에 적용하였다.

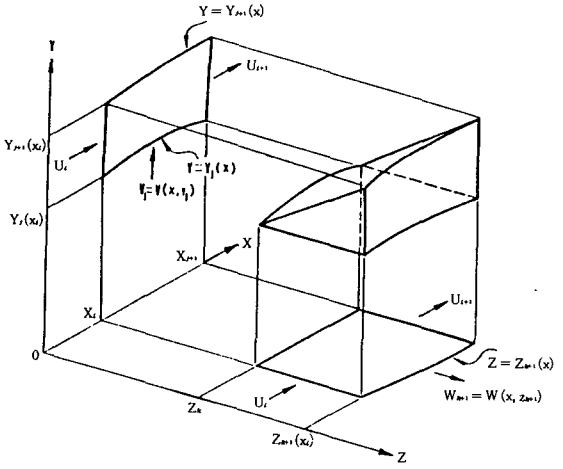


Fig. 3 Velocity boundary condition for an element of trianglar cross-section

먼저 반경 방향의 안쪽면에 V자 모양의 홈이 있는 링에 대해서는 구동토오크와 단면형상의 변화를 진행에 따라 계산한 후 Ingham[19]의 실험치와 비교하여 그 적용 가능성을 확인하였고 다른 모양의 링에 대해서도 계산 결과를 제시하였다. 또 몇 개의 공정 변수들이 제품형상에 미치는 영향에 대해서도 밝혀, 산업현장에서 이론해석을 바탕으로 하여 안정된 공정계획이 가능토록 함에 연구의 목적을 두었다. 또 이 연구를 통하여 형상 환상압연이라는 대표적인 3차원 소성변형 과정을 단순화된 UBET 요소에서의 3차원 속도장을 이용하여 표현함으로써 UBET의 적용범위를 축대칭 또는 평면변형의 문제로부터 일반적인 3차원 소성유동 문제로 확장시키고자 하였다.

2. 삼각형 단면을 가지는 요소에 대한 동적가용 속도장

환상압연의 소성변형역을 개별 요소로 나누기 전에 가정을 통하여 변형역을 단순화시키고 또 나누어진 UBET 요소들에 대해서도 속도장을 단순화하였다.

1. 두 롤과 링 사이의 접촉 길이는 서로 같다[9].
2. 소성변형 영역의 입구나 출구는 평면으로 표시된다.
3. 모든 요소는 동일한 입출구 속도를 가진다.
4. 그림 3에서 x-방향 속도성분 U는 요소 내 임의의 x-축에 수직인 면에서 균일한 값을 갖는다.

이렇게 단순화된 기본형의 UBET 요소에 대해서도 3차원 속도장이 직접 유도되기가 어려운 것이므로 추가적인 가정을 통하여 중첩의 원리를 이용하였다. 즉 U_1-V_1-W_1 속도장은 입구면을 통한 유입 속도와 z-방향으로 이웃한 요소들과의 경계면을 통한 소재유동에 기인한 것이라고 가정한 후 유도하였고, U_2-V_2-W_2 속도장은 y-방향으로 이웃한 요소들과의 경계면을 통한 소재 유동만에 의한 것으로 한정시킨 후 이를 중첩시켜 3차원 소재 유동이 표시될 수 있도록 하였다.

2.1 U_1-V_1-W_1 속도장

이웃한 요소와의 y-방향으로의 소재 유동을 무시하고 U가 x-축에 수직인 각 단면에서 균일한 것으로 가정하였으므로

$$U_1 = U_1(x) \tag{1}$$

$$W_1 = W_1(x, z). \tag{2}$$

라 한다. z-방향으로 이웃한 요소와의 경계면을 통한 소재 유동을 고려하면 W_1에 대한 속도 경계 조건이 다음과 같이 구해진다.

$$W_1(x, z_{k+1}) = U_1(x) z'_{k+1}(x) + W_{k+1}(x). \tag{3}$$

여기서 $W_{k+1}(x)$는 이웃한 요소들 사이의 z-방향 소재 유동을 나타내는 식이다. 체적일정 조건으로 부터

$$U_1(x) = U_1(x_i)\frac{A(x_i)}{A(x)} - \frac{1}{A(x)}\int_{x_i}^{x} W_{k+1}(x) \\ (y_{j+1} - y_j)dx \tag{4}$$

이며, 여기서 단면적 A는

$$A(x) = \int_{z_k}^{z_{k+1}} s(x,z)dz = \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j) \\ (z_{k+1} - z_k) \tag{5}$$

단,

$$s(x,z) = f_p(x,z) - f_p(x,z_k) = (y_{j+1} - y_j) \\ \frac{z - z_k}{z_{k+1} - z_k}.$$

이며 $f_0(x,z)$는 롤과의 접촉면을 나타내는 곡선의 y-좌표를 의미한다.

연속식에서 부터

$$V_1 = \left(-\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial z}\right) y + C_1(x,z). \quad (7)$$

가 되고, 이 식에 V_1에 대한 경계 조건인

$$V_1(x,y_j) = U_1(x)y_j'(x) \quad (8)$$

$$V_1(x,y_j+s) = U_1(x)\left[y_j'(x) + \frac{\partial s}{\partial x}\right] + W_1\frac{\partial s}{\partial z}. \quad (9)$$

를 대입하면 다음 식을 얻게 된다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(sU_1) + \frac{\partial}{\partial z}(sW_1) = 0. \quad (10)$$

링과 롤의 접촉길이가 롤 반경에 비해 매우 작은 값임을 고려하여 $s(x,z)$를 z만의 함수 $s(z)$로 고친 후 윗 식을 풀면 W_1에 대해 다음의 표현을 얻게 된다.

$$W_1(x,z) = (U_1 z_{k+1}' + W_{k+1})\frac{z-z_k}{z_{k+1}-z_k} \quad (11)$$

연속식으로 부터 V_1은 다음과 같다.

$$V_1(x,y) = U_1\left[y_j' + (y_{j+1}' - y_j')\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\right] + \frac{W_{k+1}}{z_{k+1}-z_k}(y-y_j). \quad (12)$$

2.2 U_2-V_2-W_2 속도장

y-방향으로 이웃하고 있는 요소와의 경계면을 통한 소재 유동만에 의한 속도장이므로 다음과 같이 가정한다.

$$U_2 = U_2(x) \quad (13)$$

$$V_2 = V_2(x,y). \quad (14)$$

V_2에 대한 속도 경계 조건은

$$V_2(x,y_j) = U_2(x)y_j'(x) + V_j(x) \quad (15)$$

$$V_2(x,y_j+s) = U_2(x)\left[y_j'(x) + \frac{\partial s}{\partial x}\right] + W_2\frac{\partial s}{\partial z} \quad (16)$$

여기서 $V_j(x)$는 y-방향으로 이웃한 요소와의 사이에 교환되는 소재 유동량을 표시한다.

한편 W_2에 대한 경계 조건은 다음과 같다.

$$W_2(x,z_k) = \frac{V_j(x)}{y_{j+1}-y_j}(z_{k+1}-z_k) \quad (17)$$

$$W_2(x,z_{k+1}) = U_2(x)z_{k+1}'(x). \quad (18)$$

체적 일정 조건으로 부터

$$U_2(x) = \frac{1}{A(x)}\int_{x_i}^{x} V_j(z_{k+1}-z_k)dx. \quad (19)$$

이다. 연속식으로 부터

$$V_2(x,y) = \left(-\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial W_2}{\partial z}\right) y + C_3(x,z). \quad (20)$$

이므로 이 식에 V_2의 경계 조건을 대입하면서 W_2의 경계 조건을 동시에 고려하면

$$W_2(x,z) = U_2 z_{k+1}'\frac{z-z_k}{z_{k+1}-z_k} + \frac{V_j}{y_{j+1}-y_j}(z_{k+1}-z). \quad (21)$$

가 되고, 연속식으로 부터 V_2에 대한 결과를 얻게 된다.

$$V_2(x,y) = U_2\left[y_j' + (y_{j+1}'-y_j')\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\right] + V_j\frac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j}. \quad (22)$$

3. 형상환상압연에의 UBET 적용

직사각형 단면의 소재로 부터 그림 2에 나타난 것처럼 V자 홈이나 사다리꼴 돌기가 있는 형상 링을 만들기 위한 과정을 UBET로 해석하기 위하여 앞 절에서 유도된 삼각형 요소에 대한 동적가용속도장과 앞서 발표된[1] 사각형 요소의 속도장을 이용하였다. 삼각형 요소의 경우 빗변으로 표시되는 면은 롤과 소재의 접촉면이므로 이 면을 통해서는 소재의 유동이 없으며, 다른 두 면을 통하여 이웃 요소와의 경계면을 통한 소재 유동이 고려되었다. 그러나 이들 경계면이 y-축 또는 z-축에 평행하지만 평면이 아니므로 앞 절의 V_j와 V_{j+1} 또는 W_k와 W_{k+1}들은 경계면을 통한 y-방향 또는 z-방향 속도성분을 의미한다. 이들은 다음과 같은 표현식으로 가정되었다.

$$V_j(x) = C_j\, U_1(x_i)\, \frac{g(x_i)}{g(x)}\, g'(x) \qquad (23)$$

$$V_{j+1}(x) = C_{j+1}\, U_1(x_i)\, \frac{g(x_i)}{g(x)}\, g'(x) \qquad (24)$$

$$W_k(x) = D_k\, U_1(x_i)\, \frac{g(x_i)}{g(x)}\, g'(x) \qquad (25)$$

$$W_{k+1}(x) = D_{k+1}\, U_1(x_i)\, \frac{g(x_i)}{g(x)}\, g'(x) \qquad (26)$$

여기서 C_j, C_{j+1}, D_k, D_{k+1}들은 경계면을 통한 소재 유동량에 관계되는 상수로서 단면 형상의 변화를 결정하게 되므로 상계해를 구할 때 objective parameter들로 취급된다.

주어진 속도장에서 얻게 되는 상계해는 구동토오크 T와 압연력 P에 대해

$$J^* \geq J_{actual} = T\,\omega_d + P\,V_p \qquad (27)$$

로 표시되나, 구동토오크와 압연력 사이에

$$T = \mu\, r_d\, P \qquad (28)$$

의 관계를 상정할 수 있으므로[20,21] 상계 에너지 소비율의 계산값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J^* = T^*(\omega_d + \frac{V_p}{\mu r_d}). \qquad (29)$$

여기서 ω_d는 구동롤의 각속도, V_p는 압력롤의 압입속도, μ는 소재와 구동롤 사이의 상당마찰계수, r_d는 구동롤의 반경을 의미한다. 그러나 식(29)에서 압입속도와 관계된 우변 괄호 속의 둘째 항은 첫 항에 비해 1% 미만 정도의 값을 가지므로 무시되었고, 따라서 상계해로써 얻는 값과 구동토오크 T*에 관한 것일 뿐 압연력에 대해서는 그 값을 구할 수가 없다. 그러나 V_p가 압력롤과 접하는 요소의 속도 경계조건에 부가 되어지므로 압입속도의 공정에 미치는 영향은 속도장에서 고려된다.

계산을 위한 기본 데이터들은 기존 실험치[19]를 이용하였다.

구동롤의 반경, r_d	:	3.5in
압력롤의 반경, r_p	:	1.88in
구동롤의 각속도, ω_d	:	30 rpm
압력롤의 진입량, f	:	0.014in/rev
링 소재의 외경, D_{oi}	:	5.875in
링 소재의 두께, t_i	:	0.875in
링 소재의 높이, W	:	1.0in

실험에 사용된 링 소재는 Tellurium이 함유된 납이며, Tellurium은 납의 입자 크기를 미세화시키는 것으로 알려져 있다.

4. 계산 결과 및 검토

그림 4에서 반경방향의 내면에 V홈이 있는 형상 링을 모델로 하여 구동토오크를 계산하고 실험치와 계산하였다. UBET에 의한 해석결과가 실험결과와 대체로 잘 일치하고 있으나 소위 상계토오크가 실험치보다 적은 값으로 표시된 것은 다음과 같은 원인에 기인한 것으로 여겨진다. 첫째, 계산에서 사용된 재료의 유동응력이 준정적 압축시험에서 구해진 것이므로 시편의 재질이 실온에서 열간상태인 납(Pb)인 점을 고려할 때 변형도율의 영향이 포함되지 않은 때문이라 여겨진다. 앞 절에서 주어진 데이터에서 환상압연이 진행되는 경우 변형도율의 범위가 10^{-1}/초에서 10^{0}/초의 order이고, Altan 등[22]이나 Tsukamoto등[23]에 의하면 이 변형도율의 영향으로 계산에 사용된 것보다 유동응력이 20%에서 30% 정도 증가함을 알 수 있다. 둘째, 속도장의 가정에서 x-방향으로의 속도 U가 단면에서 균일하다고 가정함으로써 과잉변형에 필요한 추가적인 소성일 (redundant work)이 고려되지 않은 점을 들 수 있다. 셋째, 압연 중 링의 단면 형상에 관계되는 변형은 양 롤사이의 소성변형역에서 주로 일어나지만 링의 직경 증가에는 롤에 물려있는 변형역의 맞은 편에 있는 링 부위에서 발생하는 소성 hinge[5]도 영향을 미치므로 이에 요구되는 부가적인 구속조건을 고려하지 않은 점등을 들 수 있다.

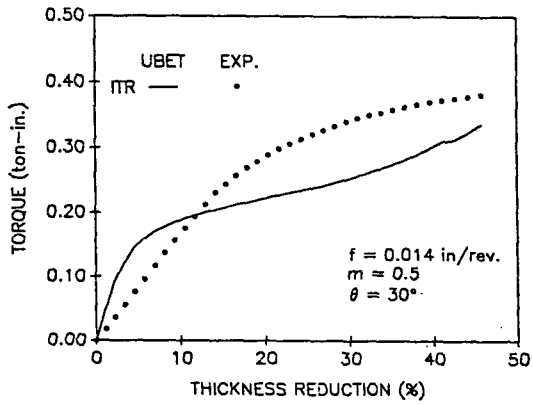


Fig. 4 Variation of roll torque with respect to thickness reduction of a ring with inner V-groove

그림 5에서는 직사각형 소재로 부터 압연이 진행될 때 반경 방향의 표면에 형성되는 V자 홈의 깊이를 나타내었다. 계산된 결과와 실험치가 거의 일치함을 보여준다. 따라서 위의 비교로 부터 UBET의 적용이 여러 가지의 과감한 가정에도 불구하고 만족할 만한 결과를 제시함을 확인하였다.

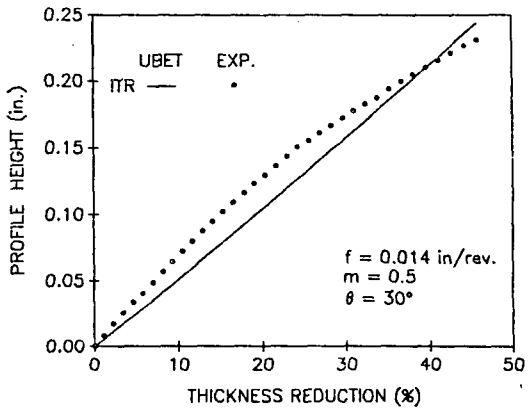


Fig. 5 Variation of profile height with respect to thickness reduction of a ring with inner V-groove

그림 6에서 그림 8까지는 공정변수들이 단면 형상의 변화에 미치는 영향을 보여준다. 먼저 그림 6에서는 외면에 사다리꼴 돌기가 있는 경우, 돌기의 테이퍼 각과 돌기의 높이와의 관계를 나타내고 있다. 테이퍼 각이 클수록 롤 공극속으로의 형상 충진이 방해를 받아 돌기의 높이가 작아짐을 보인다. 한편 그림 7과 그림 8에서는 압력롤의 진입속도가 링 형상변화에 미치는 영향을 나타내고 있다. V홈의 경우 진입속도의 영향이 미미함은 압력롤이 날카롭게 소재와 접촉하므로 압입 면적이 적은 때문으로 여겨진다. 하지만 사다리꼴 돌기의 경우는 압입 속도가 작을수록 돌기의 높이가 크게 예측된다. 이는 실험에서의 현상과 일치하며 압력롤의 압입 면적이 클 경우는 롤의 압입량이 커질수록 링의 직경이 늘어나고자 하는 경향이 단면이 충진되고자 하는 경향보다 크기 때문이다.

그림으로는 나타내지 않았으나 압력롤의 진입속도는 그 값이 클수록 구동토오크가 커지는 반면 돌기의 테이퍼 각은 구동토오크에 거의 영향을 미치지 않음을 보이고 있다.

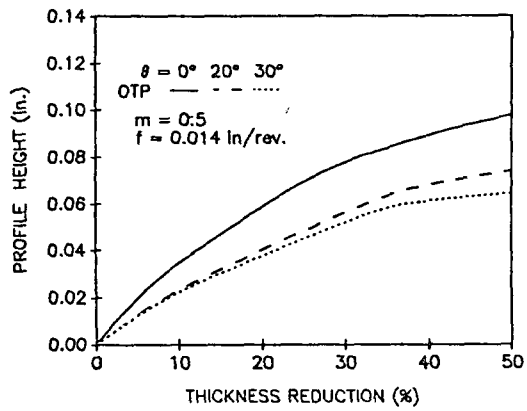


Fig. 6 Effect of taper angle on profile formation for a ring with outer trapezoidal protrusion

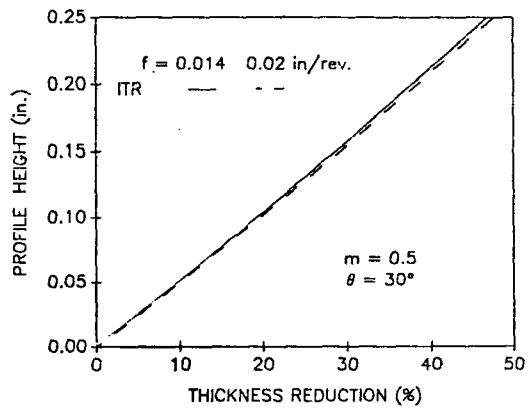


Fig. 7 Effect of feed rate on profile formation for a ring with inner V-groove

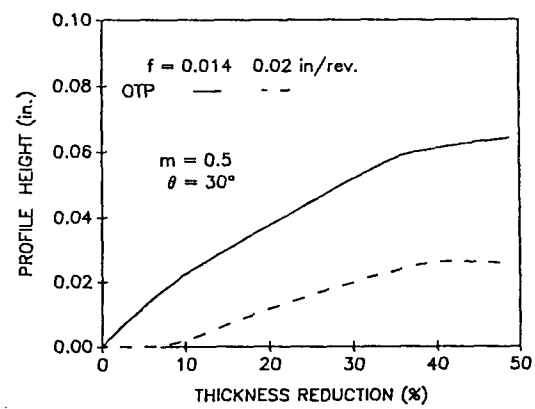


Fig. 8 Effect of feed rate on profile formation for a ring with outer trapezoidal protrusion

5. 결 론

좀 더 일반적인 단면 형상을 가지는 링의 형상환상압연에 대한 이론해석을 위하여 삼각형 단면을 가지는 요소를 제시하고 속도장을 유도한 후, 이를 사각형 요소와 조합하여 만들 수 있는 반경 방향의 표면에 V자 홈을 가지거나 사다리꼴 돌기가 있는 링을 모델로 하여 압연 중의 구동토오크와 형상변화에 대한 계산결과를 구하였다. 예측된 결과들은 실험치와 비교해 볼 때 크기와 경향이 서로 일치하고 있다.

따라서 결과의 엄밀성과 다양함에 있어서 유한요소법보다 제한적이기는 하지만 그 단순함과 넓은 적응성을 장점으로 가지는 UBET에 의하여 3차원 소성유동이 일어나는 형상환상압연이 매우 효과적으로 해석될 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

1. F.W. Harbord and J.W. Hall. Metallurgy of steel. Volume 2, Charles Griffen, London, 1923.
2. A.G. Mamalis and W. Johnson. Ring-rolling processes. J. Engg. Prod., Vol. 2, pp. 145~162, 1978.
3. H.J. Marczinski. The hot ring rolling process and its intergration into automatic production lines. Proc. of 3rd Int. Romp Conf., pp. 251~265, Kyoto, 1984.
4. J.B. Hawkyard, W. Johnson, J. Kirkand, and E. Appleton. Analyses for roll force and torque in ring rolling with some supporting experiments. Int. J. Mech. Sci., Vol. 15, pp. 873~893, 1973.
5. W. Johnson and G. Needam. Plastic hinges in ring indentation in relation to ring rolling. Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 487~490, 1968.
6. P.I. Polukhin, P.K. Teterin, M.M. Shaliapin, and V.K. Vorontsov. Experimental investigation of roll-force and torque during ring rolling Izvest. VUZ. Chern. Met., No. 7, p. 64, 1971.
7. A.G. Mamalis, J.B. Hawkyard, and W. Johnson. Spread and flow patterns in ring rolling. Int. J. Mech. Sci., Vol. 18, pp. 11~16, 1976.
8. A.G. Mamalis, J.B. Hawkyard, and W. Johnson. Cavity formation in rolling profiled ring. Int. J. Mech. Sci., Vol. 17, pp. 669~672, 1975.
9. D.Y. Yang, J.S. Ryoo, J.C. Choi, and W. Johnson. Analysis of roll torque in profile ring rolling of L-sections. Proc. of 21st Int. MTDR Conf., pp. 69~74, London, 1980.
10. C.S. Chang. Analysis of roll torque in U-section profile ring rolling: unfilled stage. Master's thesis, Korea Adv. Inst. of Sci. amd Tech., 1981.
11. Y.H. Hahn and D.Y. Yang. UBET analysis of roll torque and profile formation during the profile ring-rolling of rings having rectangular protrusions. J. Mat. Proc. Tech., Vol. 26, pp. 267~280, 1991.
12. D.Y. Yang, K.H. Kim and J.B. Hawkyard. Simulation of T-section profile ring rolling by the 3-D rigid-plastic finite element method. Int. J. Mech. Sci., Vol. 33, pp. 541~550, 1991.
13. N.S. Kim, S. Machida, and S. Kobayashi, Ring rolling process simulation by the three dimensional finite element method. Int. J. Machine Tool and Manufacture, Vol. 30, pp. 569~578, 1990.
14. H. Kudo. An upper-bound approach to plane-strain forging and extrusion-I. Int. J. Mech. Sci., Vol. 1, pp. 57~83, 1960.
15. S. Kobayashi. Upper-bound solutions for axisymmetric forging problems-I. ASME Trans., J. Eng. for Ind., Vol. 86, pp. 122~126, 1964.
16. R.P. Mcdermott and A.N. Bramley. Forging analysis-A new approach. Proc. of 2nd NAMRC, pp. 35~47, Univ. of Wisconsin, 1974.

17. M. Kiuchi. Complex simulation system of forging based in UBET. Annals of CIRP, Vol. 35, No. 1, pp. 147~150, 1986.
18. D.Y. Yang, J.H. Kim, and C.K. Lim. An arbitrarily inclined triangular UBET element and its application to combined forging. ASME Trans., J. Eng. for Ind., Vol. 107, pp. 134~140, May 1985.
19. P.M. Ingham. Investigations into profile ring rolling on a radial mill. Master's thesis, Univ. Machester Inst. Sci. Tech., 1977.
20. W. Johnson, I. Macleod, and G. Needam. An experimental investigation into the process of ring or metal tyre rolling. Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 455~468, 1968.
21. J.S. Ryoo. Analysis of the ring rolling process by using dual velocity field. PhD thesis, Korea Adv. Inst. of Sci. and Tech., 1985.
22. T. Altan, S.I. Oh, and H.L. Gegel. Metal forming : fundamentals and applications. American Society of Metals, 1983.
23. H. Tsukamoto, Y. Taura, and J. Ibushi. Simulation of hot steel in plastic working with plasticine and lead. Proc. if 1st ICTP, Adn. Tech. Plast., pp. 1003~1008, Tokyo, 1984.