

## 고정도 천체력 S/W 개발 (I)<sup>1</sup>

안영숙 · 신종섭 · 박필호 · 박은광  
천문대 위치천문 연구실

이정숙  
한국전자통신연구소 위성통신항우연구실

## S/W DEVELOPMENT OF HIGH PRECISION EPHEMERIS(I)

Young-Shoek Ahn, Jong-Seob Shin, Pil-Ho Park, Eun-Kwang Park  
Positional Astronomy Section, Korea Astronomy Observatory,  
Taejeon 305-348, Korea

and

Jeong-Sook Lee  
Electronics and Telecommunications Research Institute,  
Taejeon 305-606, Korea

(Received November 21, 1993; Accepted December 15, 1993)

### 요 약

이 연구에서는 태양계 천체들의 운동에 대한 역학 모델을 설정하고, 그에 적합한 운동 방정식을 수치 적분하여 임의의 시각에 각 행성과 달의 위치를 계산할 수 있도록 하였다. 이때 역학 모델에는 (1) 점질량 상호작용, (2) 지구와 달의 중력 포텐셜에 의한 figure 효과, (3) 조석력, (4) 지구와 달의 orientation 등에 의한 섭동력 등을 모두 고려하였다. 그리고 이 프로그램을 이용해 계산한 결과를 미국의 JPL에서 생산한 DE200 자료와 비교 분석하였다.

### ABSTRACT

We developed the S/W which calculate the Planetary and the Moon ephemerides. The ephemeris of the Solar system objects was obtained from a simultaneous numerical integration of the equations of motion for the nine planets and the Moon. The mathematical model includes contributions from (1) point-mass interactions (2) figure effect (3) earth tides (4) the orientations of the Earth and the Moon. The calculated ephemerides are compared with DE200 data produced by JPL (Jet Propulsion Laboratory).

<sup>1</sup>이 연구는 과학기술처 특정연구사업의 지원으로 수행되었음

## 1. 서 론

지금까지 우리나라에서는 천체력에 관한 프로그램 개발이 지극히 초보적이어서 외국의 자료에 의존하는 경우가 종종 있었다. 즉, 외국의 자료를 그대로 이용하거나 아니면 그 자료를 이용해 필요한 여러 자료들을 추출하여 사용하고 있었다. 그러나 이러한 방법은 외국의 기술의존도가 너무 크고, 자료 입력에 따른 비생산성, 각국 자료의 각기 다른 값등 여러 문제가 있었다. 이에 우리는 이 난점들을 해결하고 우리나라도 독자적으로 천체력을 제작할 수 있는 필수 능력을 확보하기 위해 이 연구를 수행하였다.

이 연구에서는 태양계 천체들의 운동에 대한 역학 모델을 JE (Japanese Ephemeris)의 모델 (Fukushima 1991)을 따라 설정하고, 적절한 적분법을 택해 역학 모델에 따른 운동방정식을 풀었다. 그리고 그 계산 결과의 정확도를 JPL/NASA의 DE 200의 자료 (Standish and Newhall 1990)와 비교하여 분석하였다.

## 2. 태양계 천체들의 역학적 모델

## 2-1. 운동 방정식

태양계 천체들의 운동을 모델화하는 것은 이 운동을 수학적인 방식으로 표현하는 Newton 역학으로 부터 출발한다. Newton의 운동 방정식에 Einstein의 상대성 이론에 의한 항을 보정함으로써 태양계 천체들의 운동을 보다 더 정확하게 기술할 수 있다. 여기서 태양계 천체들이라 함은 태양, 달, 9개의 행성 (수성 - 명왕성) 들을 말한다. 또한 태양계내의 행성들의 위치와 운동에 영향을 미치는 섭동력으로, 4개의 소행성 (세레스, 팔라스, 유노, 베스타)에 의한 힘을 고려해 주어야 한다. 태양계내의 다른 천체들은 그 질량이 너무 작아서 무시할 만하나, 이 4개의 소행성은 행성에 비해서는 그 질량이 작지만 계산 결과에 영향을 미칠만큼의 질량을 가지고 있으므로 이 영향에 따른 가속도 변화량도 필히 보정해 주어야 한다.

각 행성들의 상호 작용은 이들을 점질량이라고 가정하고, 상대론적 효과와 소행성에 의한 영향을 보정한 다음과 같은 n체 운동 방정식 (Newhall et al. 1983)을 택하여 사용하였다.

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}}_i = & \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} \right. \\
 & + \gamma \left( \frac{v_i}{c} \right)^2 + (1 + \gamma) \left( \frac{v_j}{c} \right)^2 - \left( \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \right) \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_j \\
 & \left. - \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j \right\} \\
 & + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \{ (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot [(2 + 2\gamma)\dot{\mathbf{r}}_i - (1 + 2\gamma)\dot{\mathbf{r}}_j] \} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \\
 & + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} + \sum_{m=1}^4 \frac{\mu_m (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_i)}{r_{im}^3} \quad (1)
 \end{aligned}$$

윗식에서  $i, j, k$  등은 각 천체이고,  $\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, \ddot{\mathbf{r}}_i$ 는 각각 태양계 질량 중심에서의  $i$  천체의 위치, 속도, 가속도 벡터이다.  $\mu_j$ 는  $Gm_j$ 로서,  $G$ 는 중력 상수,  $m_j$ 는  $j$  천체의 질량이고,  $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ ,  $v_i = |\dot{\mathbf{r}}_i|$ ,  $c$ 는 빛의 속도이다.  $\beta$ 와  $\gamma$ 는 PPN요소 (parameterized post newtonian parameter)이며, 각각 1로 사용하였다. 그리고  $m$ 은 각 소행성을 의미하고,  $r_{im}$ 은 행성과 소행성사이의 거리이다.

태양계내의 천체들 중 지구-달 계의 경우는 두 천체가 근접해 있어서 이 영향에 따른 섭동력으로 중력 섭동력과 조석에 의한 섭동력을 보정해 주어야 한다. 지구와 달의 질량 분포에 따른 figure potential은 다음 식과 같다.

$$r = \frac{GM_k}{r_j^{(k)}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{r_j^{(k)}} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm,k} \cos m\lambda_j^{(k)} + S_{nm,k} \sin m\lambda_j^{(k)}) P_n^m(\sin \phi_j^{(k)}) \quad (2)$$

윗식에서  $M_k, a_k$ 는 중심 천체  $k$ 의 질량과 적도 반경,  $r_j^{(k)}, \phi_j^{(k)}, \lambda_j^{(k)}$ 는 천체  $k$ 를 중심으로 하는 좌표계 ( $k$  body fixed coord.)에서의 천체  $j$ 의 궤도 반경, 위도, 경도이며,  $C_{nm,k}$ 와  $S_{nm,k}$ 는 harmonics 계수이고,  $P_n(\sin \phi_j)$ 는 Legendre polynomial이다.

조석력은 solid earth tide에 의한 효과는 아주 작으므로 무시하고, ocean tide에 의한 효과만을 고려하여 다음과 같은 식 (Newhall et al. 1983)으로 섭동 가속도를 구하여 보정해 준다.

$$\ddot{\mathbf{r}}_x = -\frac{3k_2GM_m}{r_{em}^3} \left( 1 + \frac{GM_m}{GM_e} \right) \left( \frac{a_e}{r_{em}} \right)^5 \begin{pmatrix} x + y\delta \\ y - x\delta \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$

윗식에서  $r_{em}$ 은 지구중심과 달의 중심 사이 거리이고,  $x, y, z$ 는  $r_{em}$ 의 각 성분으로, 달의 지구 중심 직교 좌표이다.  $M_e$ 와  $a_e$ 는 각각 지구의 질량과 적도 반경,  $M_m$ 은 달의 질량,  $k_2$ 는 지구의 potential love number이고,  $\delta$ 은 phase angle로서 지구의 불룩한 부분 (적도의 튀어나온 부분)과 지구-달을 연결하는 선과의 사잇각을 나타낸다.

### 2-2. 지구와 달의 orientation

지구와 달의 운동을 정확히 아는 것은 지구와 달의 운동 방정식을 정하는 데에 있어 중요한 요소가 된다. 지구와 달의 정확한 운동을 기술하기 위해서는 지구축의 운동에 영향을 미치는 세차 (precession)와 장동 (nutation), 그리고 달의 축을 묘사할 수 있는 칭동 (libration)을 정확하게 수학적으로 표현한 것을 사용해야 한다.

이 연구에서 사용한 세차와 장동에 관한 식은 J2000.0년을 기준으로한 수식 (Lieske et al. 1977)을 이용하였다. 세차를 계산하기 위한 세차각 (precession angles)  $\xi, Z, \theta$ 는 다음과 같으며,  $3 \times 3$  matrix로 계산하였다.

$$\xi = (2306''.2181 + 1''.39656T - 0''.000139T^2)t + (0''.30188 - 0''.000345T)t^2 + 0''.017998t^3$$

$$\begin{aligned}
Z &= (2306''.2181 + 1''.39656T - 0''.000139T^2)t \\
&\quad + (1''.09468 + 0''.000066T)t^2 + 0''.018203t^3 \\
\theta &= (2004'.3109 - 0''.85330T - 0''.000217T^2)t \\
&\quad + (-0''.42665 - 0''.000217T)t^2 - 0''.041833t^3
\end{aligned} \tag{4}$$

이 식에서  $t$ 와  $T$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
t &= (JD(\text{현재}) - JD(1950))/36525, \\
T &= (JD(1950) - JD(2000))/36525.
\end{aligned} \tag{5}$$

장동을 계산하기 위한 장동각(Nutation angles)으로는  $\Delta\phi$ 와  $\Delta\varepsilon$ 를 사용하는데,  $\Delta\phi$ 는 주어진 시각에서 평균 춘분점의 실제 경도 (true longitude)의 변화량이고,  $\varepsilon$ 는 진적도 (true equator)로부터 측정된 진황도 경사각(true obliquity)으로, 적도의 평균 황도 경사각인  $\varepsilon_0$ 와의 관계는  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ 이다.  $\Delta\varepsilon$ 은 평균 황도경사각과 진황도 경사각과의 편차이다. 이  $\Delta\phi$ 와  $\Delta\varepsilon$ 는 각각 106개의 삼각함수로 표현된 다항식 (신증섭 등 1990)으로 구성된다. J2000.0년을 기준으로 하는  $\varepsilon$  값은 다음과 같다 (Lieske *et al.* 1977). 이 장동값 계산도  $3 \times 3$  matrix로 계산했다.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= 23^\circ 26' 21''.448 \\
\varepsilon_A &= \varepsilon_0 - 46''.8150T - 0''.00059T^2 + 0''.001813T^3 \\
\varepsilon &= \varepsilon_A + (-46''.8150 - 0''.00117T + 0''.005439T^2)t \\
&\quad + (-0''.00059 + 0''.005439T)t^2 + 0''.001813t^3
\end{aligned} \tag{6}$$

마지막으로 달의 칭동은 황도면을 기준으로 할 때, 달 자전축의 방향 여현의  $x$  성분인  $p_1$ ,  $y$  성분인  $p_2$ , 달의 경도상에서의 칭동  $\tau$ 의 세 축을 기준으로 설명할 수 있다. 이때  $\tau$ 는 행성들의 영향으로 섭동을 받게 되므로  $\tau$ 의 평균 값에 행성 섭동량을 보정해야 한다. 즉,  $\tau_p = \tau + \Delta\tau$ 로 표시되는 평균량과 행성 섭동량의 합으로 나타낸다. 이러한 방법으로 칭동을 보정한 달의 진 경도는 평균 경도에  $\tau_p$ 를 더한 값으로서 정할 수 있는데, 이 값은 Eckhardt (1982)의 칭동표를 이용하였다.

### 2-3. 운동방정식의 적분법 선정

앞절의 운동방정식에 맞는 적절한 적분법을 택하기 위해 여러방법을 시도해 본 결과, extrapolation method를 택했다. 이 방법은 Fukushima (1989)가 언급한 바와 같이 장시간 (long-time)적분 후에 누적되는 round-off error를 줄일 수 있는 잇점이 있고 계산 속도가 빠르다는 잇점이 있다.

Extrapolation method의 기본 algorithm은 1965년 Gragg (1965)로부터 시작되었는데, 크게 두 단계로 mid-point method와 extrapolation schemes로 나눌 수 있다. 앞의 운동 방정식에 이 extrapolation method의 여러 변형된 방법을 모두 시험해 본 결과, Mid-point method는 널리 사용되는 Bulirsch sequence가 적합하며, extrapolation schemes은 rational함수 (Stoer and Bulirsch 1980)보다 polynomial함수 (Stoer and Bulirsch

1980)가 더 적합한 것으로 판단 되었다. 이 연구에 사용한 Bulirsch sequence의  $n_i$ 는 다음과 같다.

$$\text{Bulirsch sequence } \xi_B = \{ 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64 \}$$

### 3. 천체의 위치 계산 알고리즘

계산에 이용한 운동방정식은 점질량을 가정한 n-체 운동방정식이고, 섭동력으로는 상대론적 효과, 소행성들에 의한 섭동력, 지구와 달의 potential에 따른 figure effect, 그리고 조석효과 등을 고려하였다. 운동방정식에 포함된 천체들은 태양, 달, 9개의 행성 (수성 - 명왕성), 4개의 소행성 (세레스, 팔라스, 유노, 베스타) 등 모두 15개의 천체이다. 이 프로그램에 이용한 상수들은 IAU (1976)의 천문상수값들 (표 1)을 이용하였다. 각 행성들의 위치는 태양중심 직교좌표계의 값으로 구하고, 달의 위치는 지구 중심 직교좌표계의 값으로 구하였다. 이 알고리즘의 개략도를 다음 그림 1로 요약하여 나타내었다.

표 1. 입력자료의 초기값

정의 상수		소행성 질량(단위 : 태양질량)	
중력상수, k	$0.01720209895 \text{ au}^3 \text{ d}^{-2}$	세레스	$5.9 \text{ e}^{-10}$
빛의 속도, c	$299792.458 \text{ km s}^{-1}$	필라스	$1.1 \text{ e}^{-10}$
AU	$149597870.66 \text{ m}$	유노	$0.0 \text{ e}^{-10}$
G	$6.67259 \times 10^{-11}$	베스타	$1.2 \text{ e}^{-10}$
$T_a$	$499.4782 \text{ s}$		
w	$7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$	Terrestrial	
$GM_{\text{earth}}$	$3.98600440 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	$J_2$	$-0.108263 \text{ e}^{-2}$
지구 적도반경	$6378.140 \text{ km}$	$J_3$	$0.254000 \text{ e}^{-5}$
달의 반경	$1738.09 \text{ km}$	$J_4$	$0.161 \text{ e}^{-5}$
		potential love number $k^2$	$0.30$
질량		Lag angle $\delta$	$0.040700012 \text{ rad}$
태양/달	$0.012300002$	Lunar	
태양/수성	$6023600.0$	$C_{20}$	$-0.2027 \text{ e}^{-3}$
태양/금성	$408523.5$	$C_{22}$	$0.223 \text{ e}^{-4}$
태양/(지구와 달)	$328900.5$	$C_{30}$	$-0.06 \text{ e}^{-4}$
태양/화성	$3098710.0$	$C_{31}$	$0.29 \text{ e}^{-4}$
태양/목성	$1047.355$	$C_{32}$	$0.48 \text{ e}^{-5}$
태양/토성	$3498.5$	$C_{33}$	$0.18 \text{ e}^{-5}$
태양/천왕성	$22869.0$	$S_{31}$	$0.4 \text{ e}^{-5}$
태양/해왕성	$19314.0$	$S_{32}$	$0.17 \text{ e}^{-5}$
태양/명왕성	$3000000.0$	$S_{33}$	$-1.0 \text{ e}^{-6}$

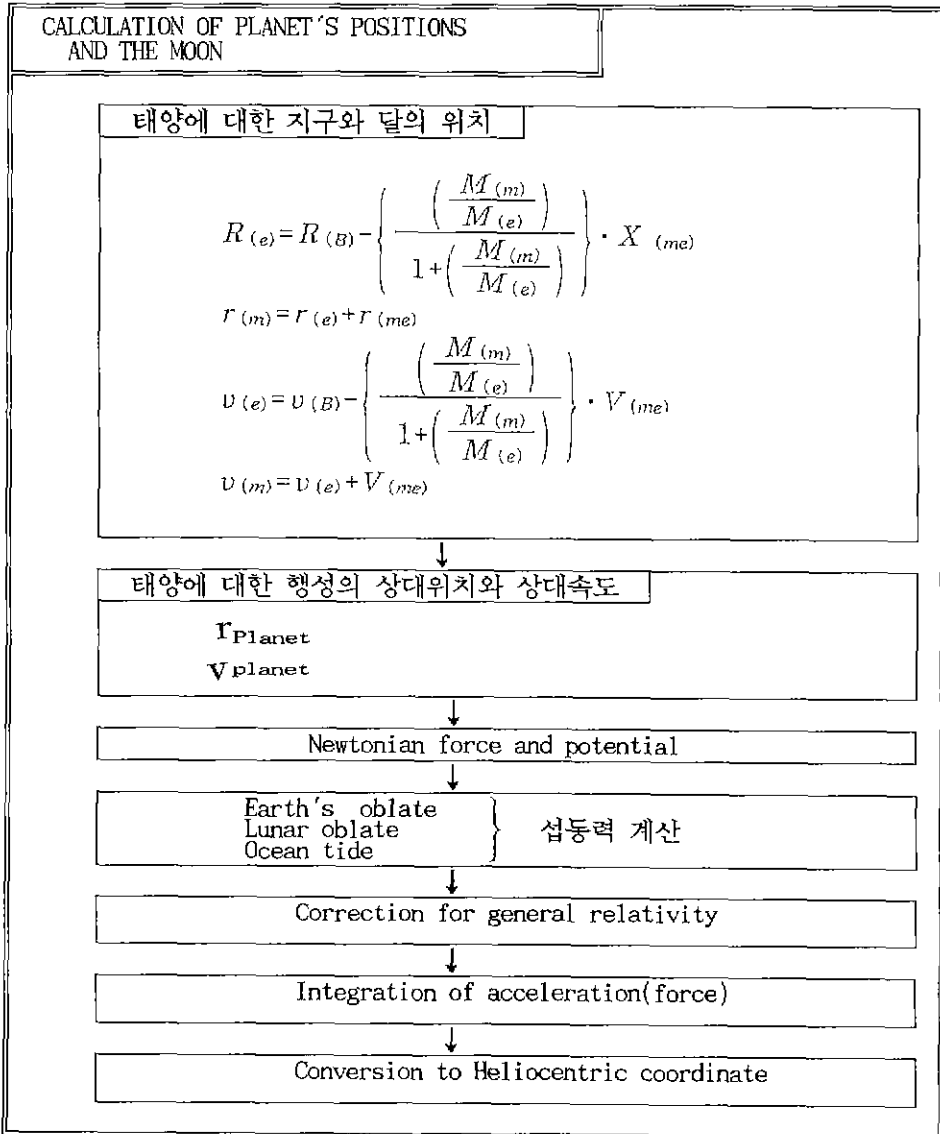


그림 1. 천체의 위치 계산 알고리즘의 전체적인 개략도 (B는 지구-달계 질량중심임)

### 4. 계산 결과와 논의

이 연구에서는 우리가 개발한 행성의 위치 계산 S/W의 정확도를 검증하기 위해 지금까지 전 세계에서 그 신뢰도를 가장 높게 평가받고 있는 DE200 data package (Standish and Newhall 1990)를 이용하였다. DE200 자료는 0.001초의 높은 정확도 (Kammeyer 1989)로 장기간에 걸친 행성의 위치를 계산한 ephemeris으로, 그 좌표 시스템은 J2000년의 평균 적도와 분점에 의해 규정된 시스템이다 (Standish 1982).

표 2. 태양계 질량 중심좌표계에서의 각 행성의 위치와 속도의 초기 자료값. P는 각 행성의 위치값 (AU)이고, V는 각 행성의 속도값 (AU/day)이다

기준 계산 시각: JD2440000.500

행성		X	Y	Z
수성	P	-0.3951988375754460	-0.0843466323597693	-0.0040274104194561
	V	-0.0003291876681225	-0.0233504421058070	-0.0124374821488036
금성	P	0.5069039376158238	0.4813958910883343	0.1844295820491489
	V	-0.0144769548800002	0.0125290743274798	0.0065518761904343
지구 달	P	-0.4546052777834040	-0.8303445173918211	-0.3600715676773557
	V	0.0150930581071024	-0.0071432575714152	-0.0030975035579419
화성	P	0.3614420271122264	1.3611886466675176	0.6145183018058898
	V	-0.0130651445328064	0.0039443851066105	0.0021633035274904
목성	P	-5.0276525518358977	1.7708007870470819	0.8816519497359159
	V	-0.0028490001601377	-0.0061629557580521	-0.0025724772837269
토성	P	8.9337534886661842	2.7456333638384094	0.7496737028955081
	V	-0.0019840384672629	0.0048716581483871	0.0020967383298982
천왕성	P	-18.2870422363900431	0.3468653840325384	0.41110151156140237
	V	-0.0001358574281276	-0.0037751235779646	-0.0016514296130401
해왕성	P	-17.1020867939629113	-23.3213801291395590	-9.1200285668760035
	V	0.0025691592417021	-0.0016035098278871	-0.0007203688573200
명왕성	P	-30.5938778648537948	0.3866037759503654	9.3367529245063601
	V	0.0002072817725565	-0.0031492072879798	-0.0010465137687076
달	P	0.0024001159162622	0.0011238365246477	0.0005282799025644
	V	-0.0002465233886425	0.0004412753301503	0.0002459636043011
세레스	P	-0.9157682327642473	-2.4373828340796326	-0.9653754326361608
	V	0.0092525719875499	-0.0030724916305750	-0.0033385427546793
팔라스	P	-1.8300706592445485	-2.0359744429094851	0.5359528628922088
	V	0.0059366934526379	-0.0082948077435426	0.0011929400391922
유노	P	0.5761917873211796	-2.9507660002037759	-0.5774684147097813
	V	0.0083399151210307	0.0035720772327234	0.0003355358483265
베스타	P	1.7164382991135558	-1.2753718234343265	-0.7347079883640857
	V	0.0081437900654339	0.0080883329344770	0.0021629373106189

우리의 계산 자료 중 그 계산의 정확도를 검증하기 위해 택한 비교 자료는 9개 행성의 태양중심 좌표값 (Heliocentric position value)과 달의 지구중심 좌표값 (Geocentric position value)이다. 비교 방법은 두 프로그램을 이용해 JD2440000.5년에서 JD2440800.5년까지 800일간

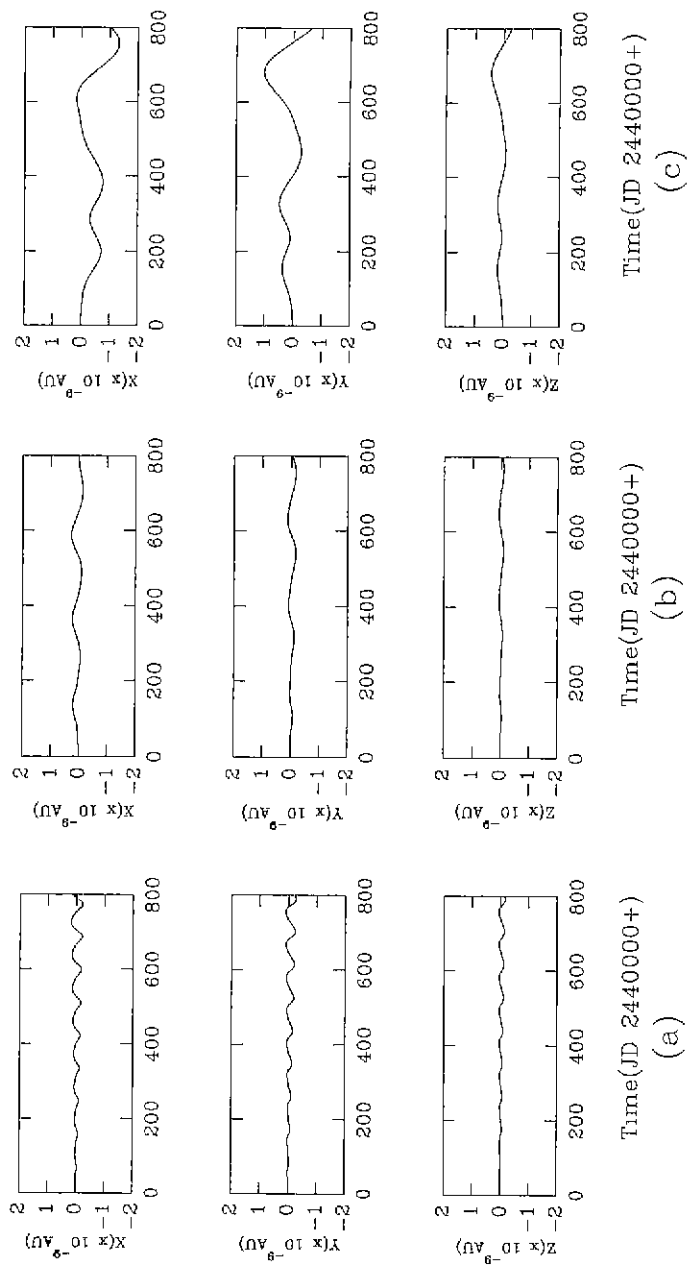


그림 2. 각 행성들의 위치 성분의 차이. 이 위치 성분의 차이값은 DE200 package로 계산한 위치 값에서 우리가 계산한 각 행성들의 위치값을 각 성분별로 뺀 값이다. 각 그림은 각각 (a)수성 (b)금성 (c)지구- 달 계의 질량중심의 위치값의 차이이다.



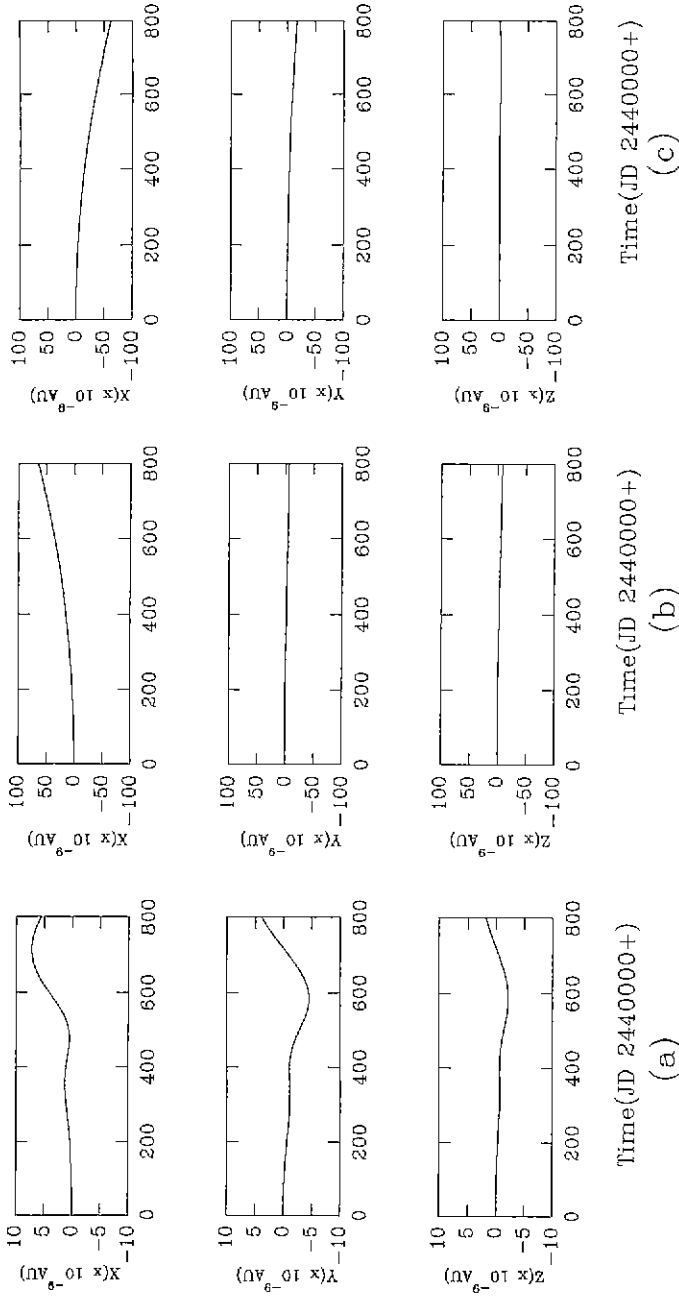


그림 3. 각 행성들의 위치 성분의 차이. 이 위치 성분의 차이값은 DE200 package로 계산한 위치 값에서 우리가 계산한 각 행성들의 위치값을 각 성분별로 뺀 값이다. 각 그림은 각각 (a) 화성 (b) 목성 (c) 토성의 위치 값의 차이이다.

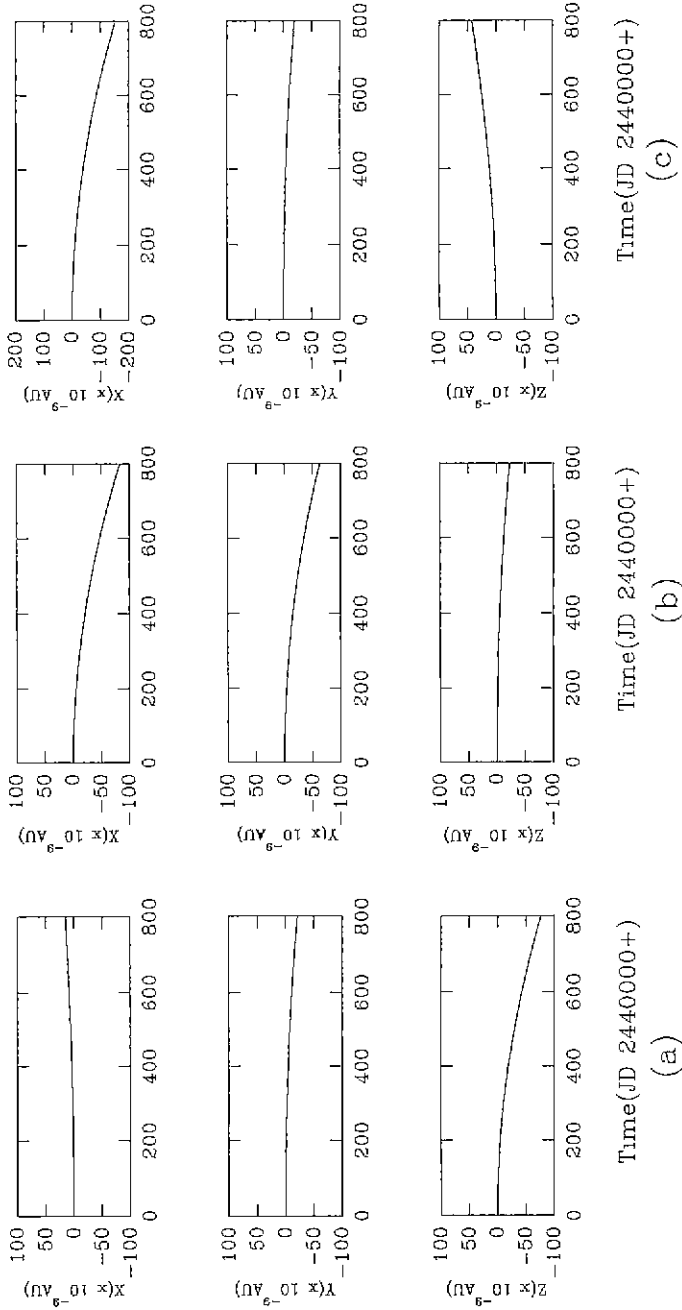


그림 4. 각 행성들의 위치 성분의 차이. 이 위치 성분의 차이값은 DE200 package로 계산한 위치 값에서 우리가 계산한 각 행성들의 위치값을 각 성분별로 뺀 값이다. 각 그림은 각각 (a)천왕성 (b)해왕성 (c)명왕성의 위치값의 차이이다.

의 위치를 1일 간격으로 계산하였다. 우리가 개발한 프로그램으로 계산할 때 행성의 위치와 달의 위치의 초기 자료는 DE200 data로 부터 추출하여 입력시켰고, 소행성의 자료는 Fukushima (1991)로 부터 구해서 이용하였다 (표 2). 이 때 달을 제외한 모든 입력 자료들은 태양중심 좌표값이고, 달은 지구중심 좌표값이다.

그림 2에서 그림 4는 우리가 개발한 프로그램으로 계산한 800일간의 천체들의 위치 계산 결과와 DE200 package를 이용해 구한 위치자료를 비교하여 각 위치 대응값 (X, Y, Z)과의 차이를 구하고, 그 차이가 시간에 따라 어떻게 변하는가 하는 것을 각 행성별로 보여 준 것이다. 이 그림들에서 보는 바와 같이, 800일간의 계산 결과는 수성으로부터 목성까지는 정확도가  $10^{-9}$  AU, 토성으로부터 명왕성까지는 정확도가  $10^{-7} \sim 10^{-8}$  AU 로서 나타났다. 이 정확도는 이 연구에서 개발한 S/W의 계산 정확도를 말하는 것으로 단기간 내의 계산은 상당히 정확한 값이라 할 수 있다. 따라서 이제 향후로는 우리나라도 독립적으로 천체력을 계산할 수 있는 기틀이 마련되었다. 그러나 이 연구는 계산기간이 800일이었으므로 우리 연구팀은 앞으로는 최종 목표로 100년동안 이 정확도를 유지 하도록 S/W를 보완할 계획으로 연구를 계속 추진하고 있다.

### 참 고 문 헌

- 신종섭, 김천휘, 안영숙, 박필호, 박제우, 신영훈 1990, 기본연구 보고서 (B9013), 과학기술처, 15
- Eckhardt, D. H. 1982, in Proc. IAU Coll. 63, High-precision Earth Rotation and Earth-Moon Dynamics. Lunar Distances and Related Observations, ed. O. Calame, (Reidel, Dordrecht), 193
- Fukushima, T. 1989, *Celestial Mechanics*, 45, 73
- Fukushima, T. 1991, private communication
- Gragg, W. B. 1965, *SIAM J. Numer. Anal.*, 2, 383
- Kammeyer, P. 1989, *Celestial Mechanics*, 45, 311
- Lieske, J. H., Lederle, T. & Fricke, W. 1977, *A&A*, 58, 1
- Newhall, X. X., Standish, E. M. & Willams, J. G. 1983, *A&A*, 125, 150
- Standish, E. M. 1982, *A&A*, 114, 297
- Standish, E. M. & Newhall, X. X. 1990, private communication
- Stoer, J. & Bulirsch, R. 1980, *Introduction to Numerical Analysis*, translated by R. Bartels, W. Gautschi & C. Witzgall, (Springer-Verlag, New York)