

〈論 文〉

LQG/LTR 설계방법을 이용한 자동차 현가장치 능동제어

Automotive Active Suspension Design Using LQG/LTR Method

황 재 혁* · 박 봉 철** · 백 승 호***
Hwang Jai-Hyuk, Park Bong-Chul and Back Sueng-Ho
(1993년 8월 16일 접수; 1993년 12월 1일 심사완료)

ABSTRACT

An automotive suspension system generally behaves like a low frequency band-pass filter(0.5~10 Hz). Passengers are very sensitive to this frequency range in terms of ride quality and road holding ability. In this paper, a LQG/LTR controller is suggested to improve the ride quality and road holding ability in the specified frequency range. It has been found by numerical simulations that the ride quality and road holding ability can be improved in the frequency ranges of 0.5~3.0 Hz and 0.3~2.1 Hz respectively. In addition, a new approach using root locus to evaluate the stability robustness of the active suspension system is studied. It is shown that the stability robustness of the LQG/LTR controller designed in this paper is improved, compared to the passive system.

1. 서 론

자동차의 수동식현가장치는 단순히 스프링과 감쇠기로 차체의 진동을 억제하므로 성능향상에 한계가 존재하게 된다. 따라서 이를 극복하기 위해, 자동차 현가장치의 능동제어연구는 국내외적으로 활발히 진행되어 왔다. 수동식현가장치가 강성계수와 감쇠계수를 조절함으로써 차체로 들어오는 진동을 억제하는 반면, 능동식제어는 보통 유압을 이용하여 효율적으로 차체에 들어오는 진동을 억제시키게 된다.

일반적으로 자동차의 능동현가장치 설계시 요구되는 사항은 탑승자의 승차감, 조종성, 현가장치의 공간확보문제, 경제성(제어력), 실제적으로 자동차에 적용할 수 있는 능동제어기법인가 하는 문제이다^(1~6). 자동차 능동식현가장치는 보통 1/4 car 모델(2

자유도계), Full-car 모델(7자유도계) 등으로 모델링하여 능동제어기를 설계한다. 1/4 car 모델의 특징은 해석이 비교적 단순하고 현가장치의 동적거동을 이해하는데 유용하고 실험을 하거나 실제 자동차에 적용하기 쉬운 반면에 Full-car 모델에 비해 제어력의 효율이 떨어진다는 단점이 있다. 그 이유는 1/4 car 모델을 이용한 제어기는 차체의 동역학적 특성을 고려하지 않았기 때문이며, 따라서 4개의 독립현가차축에서 오직 그 현가축방향으로 발생하는 수직방향의 진동만을 제어하게 된다. 이로 인해 동역학적 연성에 기인하는 운동을 극복하는데 많은 제어력이 공급된다는 단점을 갖는다. 이에 비해 Full-car 모델은 주행모드(수직, 롤링, 피칭운동)간의 연성^(7~9)을 고려하여 제어기를 설계할 수 있기 때문에 1/4 car 모델에 비해 제어력의 효율이 높다는 장점이 있는 반면에 모델이 수학적으로 복잡하므로 제어력을 구하는데 계산량이 많고, 실제 자동차에 적용하기에 복잡하다는 단점을 갖고 있다. 따라서 본 논문에서는 쉽게 실험할 수 있고, 실용화할 수 있는 1/4

*한국항공대학교 항공기계공학과

**한국항공대학교 대학원

car 모델에 대하여 능동제어기를 설계하여 실제자동차에 적용할 때 참고가 될 수 있도록 하였다.

자동차는 저주파영역의 밴드통과필터(0.5 Hz~10 Hz) 역할을 하므로 저주파에서의 성능, 특히 탑승자가 민감하게 느끼는 0.5 Hz~10 Hz 부근의 주파수 성능은 승차감, 조종성에 상당히 중요하다. 이에 본 논문에서는 0.5 Hz~1.0 Hz 부근의 승차감, 조종성의 향상에 초점을 두고 차체의 속도를 출력변수로 한 LQG/LTR 제어기를 설계하였다. LQG/LTR 설계기법^(10,11)은 안정도-강인성이 좋은 체계적인 설계기법으로서 전 상태를 측정할 필요가 없으므로 실제 적용시 효과적이다. 또한 본 연구에서는 자동차의 제원의 변화에 대한 고유치의 민감도해석을 수행하였고 수동시스템과 능동시스템의 안정도-강인성(robustness)을 연구하였다. 자동차제원의 변화에 대하여 수동시스템과 능동시스템(LQG/LTR)의 각 모드별로 근궤적을 그려 능동시스템이 수동시스템에 비해 파라미터변화에 대하여 고유치가 더욱 강인함을 확인하였다.

2. 현가장치의 모델링

Fig. 1은 자동차의 1/4부분만을 고려한 모델링으로서 타이어는 선형스프링이고 노면으로 부터 외란이 들어오고 스프링과 댐퍼는 선형구간에서만 작동한다고 가정한다. 1/4 모델에 대한 운동방정식은 다음식 (1), (2)와 같이 표현된다.

$$m_s \dot{z}_s + c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_s (z_s - z_u) = f_a \quad (1)$$

$$m_u \ddot{z}_s - c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) - k_s (z_s - z_u) + k_t (z_u - z_r) + f_a = 0 \quad (2)$$

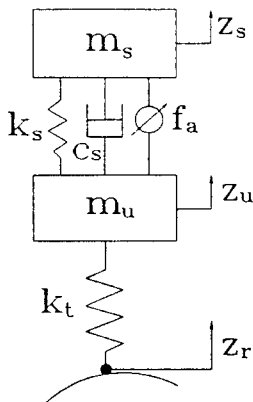


Fig. 1 Suspension system of 1/4 car model

식 (1)은 차체의 수직방향 운동방정식을 나타내고, 식 (2)는 차축의 운동방정식을 뜻한다. 여기서 m_s , c_s , k_s 는 각각 차체의 질량, 현가장치의 감쇠계수 및 스프링계수를 나타내며, m_u 는 차축(타이어/휠 포함)의 질량을 뜻한다. k_t 는 타이어의 강성계수이고 f_a 는 작동기의 힘을 의미한다. z_s , z_u , z_r 는 각각 차체의 변위, 차축의 변위, 노면의 변위이다.

상태공간방정식을 얻기위해, 다음과 같이 상태변수를 선정한다.

$$\begin{aligned} x_1 &= z_s - z_u : \text{현가장치 변위} \\ x_2 &= \dot{z}_s : \text{차체의 속도} \\ x_3 &= z_u - z_r : \text{타이어 변위} \\ x_4 &= \dot{z}_u : \text{차축의 속도} \end{aligned} \quad (3)$$

이때 상태공간방정식은 다음과 같이 된다.

$$\dot{X} = AX + Bu + \Gamma \dot{z}_r \quad (4)$$

여기서 행렬 A , B , Γ 는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_t}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 현가장치의 고유성질

본 절에서는 1/4 car 모델의 현가장치가 갖고 있는 고유성질⁽¹⁾을 간략히 정리한다. 1/4 car 모델의 운동방정식 (1), (2)에는 현가장치 고유의 구속방정식이 존재한다. 즉, 식 (1)과 식 (2)를 더하면

$$m_s \dot{z}_s + m_u \dot{z}_u - k_t (z_r - z_u) = 0 \quad (5)$$

식 (5)로부터 매우 중요한 결과들이 나온다. 우선, 식 (5)의 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$m_s \dot{z}_s + (k_t + m_u s^2) z_u(s) = k_t z_r(s) \quad (6)$$

이제 1/4 car 모델의 현가장치의 고유성질을 해석하기 위해 전달함수 3개를 다음과 같이 정의한다.

$$H_A(s) = \frac{\dot{z}_s(s)}{\dot{z}_r(s)} \quad (7)$$

$$H_{SD}(s) = \frac{z_s(s) - z_u(s)}{\dot{z}_r(s)} \quad (8)$$

$$H_{TD}(s) = \frac{z_u(s) - z_r(s)}{\dot{z}_r(s)} \quad (9)$$

여기서 $H_A(s)$ 는 가속도전달함수이며 승차감을 의미한다. $H_{SD}(s)$ 는 현가장치변위 전달함수이며, $H_{TD}(s)$ 는 타이어변위 전달함수이다. 다음 $s=j\omega$ 으로 놓고, 식 (6)과 위의 관계식을 이용하여 다음과 같은 3개의 전달함수방정식을 얻을 수 있다.

$$m_s H_A(j\omega) + (k_t - m_u \omega^2) H_{TD}(j\omega) = -j m_u \omega \quad (10)$$

$$-m_s \omega^2 H_{SD}(j\omega) + [k_t - (m_s + m_u) \omega^2] H_{TD}(j\omega) = -j(m_s + m_u) \omega \quad (11)$$

$$\omega^2 (k_t - m_u \omega^2) H_{SD}(j\omega) + [k_t - (m_s + m_u) \omega^2] H_A(j\omega) = -j \omega k_t \quad (12)$$

식 (10)에서 가속도전달함수와 타이어변위 전달함수가 서로 연성되어 있는 것을 볼 수 있다. 그러나 식 (10)의 좌변의 두번째 항을 0으로 하는 주파수에서는 가속도전달함수의 크기가 독립적으로 유일하게 결정되는 것을 알 수 있다. 두번째 항을 0으로 하는 주파수 ω_1 은 다음과 같다.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_t}{m_u}} \quad (13)$$

Table 1에서 $k_t=160000$ N/m, $m_u=36$ kg일때 $\omega_1=10.6$ Hz이다. 즉 10.6 Hz에서는 능동제어를 하여도 성능의 변함이 없이 가속도전달함수의 크기가 유일하다. 식 (11)을 보면 현가장치변위 전달함수와 타이어변위 전달함수가 서로 연성되어 있는 것을 볼 수 있다. 그러나 이 식에서도 좌변의 두번째 항을 0으로 하는 주파수에서는 현가장치변위 전달함수의 크기가 유일하게 결정된다. 이 주파수는 ω_2 는 다음과 같이 표현되며, Table 1에서 주어진 값을 이용하면 약 3.83 Hz가 된다.

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_t}{(m_s + m_u)}} \quad (14)$$

타이어변위 전달함수는 식 (10)~(12)에서 알 수 있듯이 독립적으로 유일하게 결정되는 주파수가 없다.

이상에서 수학적으로 살펴본 바와 같이 가속도 전달함수, 현가장치변위 전달함수, 타이어변위 전달함수는 서로 연성관계를 갖는다. 즉 승차감, 현가장치 공간확보문제, 조종성간에는 연성관계가 존재하므로 능동제어를 설계할 때는 이들 연성관계를 고려하여 제어를 설계해야 한다는 것을 알 수 있다. 또한 자동차 현가장치를 능동제어 하는 경우, 현가장

Table 1 Design parameters of 1/4 car model

Model name	Symbol	Unit	Value
Sprung mass	m_s	kg	240
Unsprung mass	m_u	kg	36
Damper rate	c_s	N sec/m	980
Spring rate	k_s	N/m	16000
Tire stiffness	k_t	N/m	160000

치변위가 저주파에서 (0.7 Hz 이하의 주파수영역) 항상 약간 증가하게 된다. 이같은 특성을 전제로 차종에 따른 설계목적을 선정하여 능동제어기를 설계한다. 이같은 특성을 전제로 차종에 따른 설계 목적을 선정하여 능동제어기를 설계한다. 예를 들면 승용차의 경우, 승차감과 조종성을 동시에 향상시키도록 하며 특히 고급승용차의 경우에는 승차감에 더 비중을 두어 설계한다. 그러나, 스포츠카의 경우는 조종성에 더 비중을 두어 설계한다.

4. LQG/LTR 제어기설계

LQG/LTR 제어기를 설계하기 위해 식 (4)로부터 다음과 같이 디자인 플랜트 모델(DPM)을 선정한다.

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \\ Y(t) &= CX(t) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,

$$C \triangleq [0 \ 1 \ 0 \ 0] : \text{차체의 수직속도}$$

식 (15)에서 출력변수는 차체의 수직속도로 선정하였다. LQG/LTR 제어기 설계과정은, 우선 성능 및 강인성 등을 고려하여 원하는 개루프의 형상을 갖도록 목표필터루프를 설계하고 설계된 목표 필터루프의 형상으로 루프전달함수를 회복시키는 루프전달회복단계로 나눌 수 있다^(11~13). LQG/LTR 설계방법을 효과적으로 적용하기 위해서는 플랜트가 안정가능하고 검출가능하여야 하는데 식 (15)의 플랜트는 제어가능하고, 관측가능하다.

LQG/LTR제어기 설계시, 필터계인행렬 H 는 목표필터루프를 설계할 때, 제어계인행렬 G 는 루프 전달회복 절차를 수행할 때 각각 구한다. 목표필터루프 설계에서는 모델링오차 및 성능조건을 만족시키는 필터계인행렬 H 를 선정하는 방법을 활용하였

다. 필터계인행렬을 칼만필터의 결과식으로 표현하면 다음과 같다.

$$H = \frac{1}{\mu} PC^T \quad (16)$$

여기서 행렬 P 는 식 (17)의 필터대수 리카티 방정식(Riccati equation)으로부터 구한다.

$$AP + PA^T + LL^T - \frac{1}{\mu} PC^T CP = 0 \quad (17)$$

여기서 설계파라미터 μ , L 은 칼만필터 주파수역 등가결과식 (18)을 이용하여 선정한다.

$$G_{TFL}(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} C(sI - A)^{-1} L \quad (18a)$$

식 (18a)에서, 원하는 루프형상이 되도록 L 을 선정하고, μ 는 요구되는 대역폭을 만족하도록 선정한다. 본 연구에서 강인한 제어를 설계하기 위해, 플랜트의 모델링 오차 $E_m(j\omega)$ 를 선정하였다. $E_m(j\omega)$ 는 곱셈형 오차로서 m_s, k_s, c_s 의 값을 Table 1에 나타난 값보다 각각 40%, 60%, 40%씩 증가시켰을 때 발생하는 오차로 고려하였다. 이와같이 플랜트의 모델링 오차를 지정한 후, 다음과 같은 안정도-강인성 판별식을 적용하여 L 을 결정하였다.

$$|C(j\omega)| < \left| \frac{1}{E_m(j\omega)} \right| \quad (18b)$$

식 (18b)에서 $C(j\omega)$ 는 $1 + G_{TFL}(s)^{-1}$ 으로 페루프 전달함수이다. 루프형상의 대역폭은 4.0 Hz가 되도록 μ 를 선정하였다.

루프전달회복의 단계는 보상된 플랜트의 루프전달함수 $G(s)K_c(s)$ 를 목표필터루프 $G_{TFL}(s)$ 로 회복시키는 단계이다. 설계행렬 G 는 저가최적제어기법으로 계산할 수 있으며, 다음식과 같이 표현된다.

$$G = \frac{1}{\rho} B^T K \quad (19)$$

식 (19)의 행렬 K 는 제어대수 리카티 방정식의 해이다. 행렬 K 는 출력이중행렬은 $Q = C^T C$ 로 놓고, 제어가중파라미터 ρ 가 0으로 접근할 때, 제어대수 리카티 방정식을 풀어서 구한다.

$$KA + A^T K + C^T C - \frac{1}{\rho} K B B^T K = 0 \quad (20)$$

일반적으로 제어시스템이 최소위상 플랜트일 때는 제어가중파라미터 ρ 가 0으로 접근할 때 플랜트전달함수 $G(s)$ 와 모델기준보상기의 전달함수행렬 $K_c(s)$ 의 곱인 루프전달함수 $G(s)K_c(s)$ 가 식 (21)과 같은

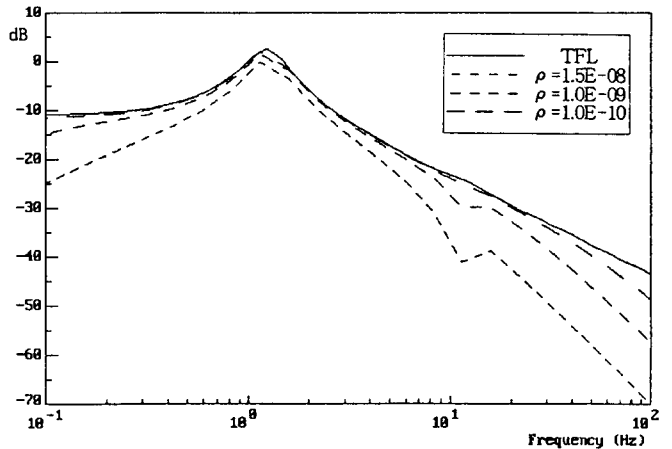


Fig. 2 Target filter loop and loop transfer recovery

극한거동을 하여 목표필터루프로 보상된다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(s)K_c(s) \rightarrow G(s)G^{-1}(s)G_{TFL}(s) = G_{TFL}(s) \quad (21)$$

Fig. 2는 목표필터루프와 루프전달회복을 나타낸다. 플랜트가 최소위상 플랜트이므로 회복이 양호하게 되고 있다. Fig. 2에서 원하는 대역폭대로 회복되면 제어력이 너무 커지기 때문에 본 연구에서는 루프전달회복의 대역폭을 제한하였고, $\rho = 1.5 \text{ E} - 08$ 를 사용하였다. 이때 승차감과 조종성 향상에 있어서 매우 중요한 주파수영역인 0.6 Hz~7 Hz에서는 거의 목표필터루프에 회복이 되었음을 알 수 있고, 고주파에서는 -40 dB로 roll-off하므로 센서잡음 제거성능도 좋게 되었음을 알 수 있다. 외란제거성능은 좋지않을 것으로 예상할 수 있으나, 현가장치가 저주파영역에서 밴드통과필터 역할을 하므로(Fig. 11~13 참조) 큰 문제가 없는 것으로 판단된다.

5. 자동차제원의 변화에 대한 고유치의 민간도와 안정도-강인성 해석

일반적으로 현가장치를 모델링할 때 발생하는 불확실성은 현가장치의 제원의 추정오차(파라메타 오차) 및 unmodelled 동역학(비선형성 및 fast 동역학)으로 구분할 수 있다. 본 연구의 LQG/LTR 제어기 설계를 통해 위에서 언급한 불확실성을 어느정도 허용하는 강인성을 갖는 현가장치를 얻을 수 있다. 이는 제어기의 목표필터루프를 설계할 때 불확실성의 크기를 고려하여 루프형상을 설계할 수 있기 때문이다. 본 연구의 현가장치 모델에서 unmodelled

동역학에 의한 불확실성의 영향은 무시할 수 있다고 가정할 수 있다. 이는 1/4 car 모델은 일반적으로 2 자유도계 선형동역학 시스템으로 적절히 기술될 수 있기 때문이다. 일반적으로 능동현가장치 모델링에서 작동기와 감지기의 동역학은 전체 페루프 동역학에 큰 영향을 주지않는 것으로 알려져 있다⁽¹²⁾. 따라서 본 연구에서는 모델링시 가장 큰 불확실성으로 예상되는 파라미터 오차에 대해 현가장치의 안정도-강인성을 해석하였다.

5.1 고유치의 민감도해석

본 절에서는 1/4 car 모델의 수동시스템과 능동제어시스템의 안정도-강인성을 해석하기 위해, 먼저 시스템 파라미터(자동차 제원)에 대한 시스템의 고유치의 민감도를 해석하고자 한다. 이 해석을 통하여 어떤 파라미터의 변화가 고유치의 변화에 가장 큰 영향을 미치는지를 알 수 있으므로 민감도해석은 현가장치 설계에 상당히 유용하다.

수동시스템의 민감도해석을 하기위하여 식 (4)로부터 다음과 같은 고유치 문제를 고려한다.

$$(\lambda_i I - A)u_i = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (22)$$

이 식에서 A 는 비대칭 실수 행렬이다. λ_i, u_i 는 각각 시스템의 고유치, 우측고유벡터이다. 그리고 좌측고유벡터를 이용한 고유치문제는 식 (23)과 같다.

$$v_i^T(\lambda_i I - A) = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (23)$$

식 (22)와 (23)에서 좌측 고유벡터와 우측 고유벡터는 서로 직교성이 있고 다음 성질을 만족한다.

$$v_j^T u_i = \delta_{ij}, \quad v_j^T A u_i = \lambda_i \delta_{ij} \quad (24)$$

여기서 $i, j=1, 2, \dots, n$ 이다. 식 (22)를 임의의 파라미터 p 에 대하여 편미분하고, 약간의 수학적 계산을 수행하면, 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p} = v_i^T \frac{\partial A}{\partial p} u_i \quad (25)$$

식 (25)는 임의의 파라미터 p 의 변화에 대한 고유치의 변화율을 나타내고 있다.

능동현가장치(LQG/LTR)인 경우는 수동시스템의 시스템행렬 A 대신에 칼만필터에서 발생하는 행렬 $(A-HC)$ 및 루프전달회복에서 발생하는 행렬 $(A-BG)$ 를 대입하면 된다. LQG/LTR의 경우, 칼만필터게인 H 나 제어게인행렬 G 는 항상 일정하므로 쉽게 민감도를 계산할 수 있다. 즉, LQG/LTR의 경우 식 (25)는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p} = v_i^T \left(\frac{\partial A}{\partial p} - H \frac{\partial C}{\partial p} \right) u_i \quad (26)$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p} = v_i^T \left(\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial p} G \right) u_i \quad (27)$$

식 (26)에서 λ_i, u_i, v_i 는 시스템행렬 $(A-HC)$ 의 각각 고유치, 우측 및 좌측고유벡터를 뜻한다. 마찬가지로 식 (27)에서는 시스템행렬 $(A-BG)$ 의 고유치, 우측 및 좌측고유벡터를 의미한다. 만일 제어게인이나 필터게인이 변하는 경우에도 리카티 방정식의 민감도해석과 함께 쉽게 고유치의 민감도를 해석할 수 있다.

5.2 현가장치 시스템의 모드분리

5.1절에서는 파라미터변화에 대한 고유치의 변화율을 연구하였는데 이 민감도해석으로 임의의 공칭 파라미터에서 고유치의 변화량을 파악할 수 있다. 이를 좀더 확장해서 파라미터가 변할 때 고유치의 궤적이 어떤 형상이 되는지 연구하는 것은 매우 흥미있는 일이다. 이는 파라미터의 변화량이 어느 정도가 될 때 시스템이 불안정할지 또는 파라미터변화에 대하여 고유치가 어느정도 강인한지를 파악할 수 있기 때문이다. 이를 연구하기 위해서 우선 현가장치 시스템에 대하여 모드분리를 하기로 한다.

(1) 수동시스템(Passive system)

식 (15)의 시스템행렬 A 로부터 수동시스템의 특성방정식을 다음식으로 구할 수 있다.

$$\text{Det} \|sI - A\| = 0 \quad (28)$$

식 (28)은 다음과 같이 표현된다.

$$s^4 + \left[\frac{C_s m_s + C_s m_u}{m_s m_u} \right] s^3 + \left[\frac{k_s m_s + k_t m_s + k_s m_u}{m_s m_u} \right] s^2 + \left[\frac{C_s k_t}{m_s m_u} \right] s + \frac{k_s k_t}{m_s m_u} = 0 \quad (29)$$

식 (29)는 4차시스템인데 이를 2차시스템 2개로 즉, 현가장치의 1차 모드와 2차 모드로 분리를 시킨다. 이때 모드분리된 형태가 다음과 같다고 가정한다.

$$(s^2 + \alpha s + \beta)(s^2 + \gamma s + \eta) = 0 \quad (30)$$

식 (29)와 식(30)의 계수를 비교하여 정리하면 $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\alpha = c_s \left[\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_u} + \frac{m_s k_t}{m_u (k_s m_u - m_s k_t)} \right], \quad \beta = \frac{k_s}{m_s} \quad (31)$$

$$\gamma = \frac{-m_s C_s k_t}{m_u (k_s m_u - m_s k_t)}, \quad \eta = \frac{k_t}{m_u} \quad (32)$$

식 (30)의 $(s^2 + as + \beta) = 0$ 와 $(s^2 + \gamma s + \eta) = 0$ 는 각각 수동시스템의 1차 및 2차모드르 뜻하며, Table 1의 파라미터를 대입하면 1차모드의 고유진동수는 1.22 Hz이고 감쇠비는 0.22이 되고 2차모드의 고유진동수는 10.6 Hz이고 감쇠비는 0.205가 된다.

(2) 능동시스템 (Active system)

본 논문에서 설계한 LQG/LTR 제어기의 시스템 행렬의 고유치는 제어제인행렬 G 와 필터제인행렬 H 에 의해서 임의로 배치될 수 있다. 따라서 제어제인행렬 G 와 필터제인행렬 H 를 고려하여 모드분리를 수행한다면 각 모드의 성능에 영향을 주는 요소가 무엇인지 쉽게 알 수 있다. LQG/LTR의 경우, 페루프의 고유치가 $(A - BG)$ 와 $(A - HC)$ 에 의해 결정되며 특성방정식은 다음식으로 얻을 수 있다.

$$\text{Det} \begin{bmatrix} sI - A + BG & -BG \\ 0 & sI - A + HC \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

식 (33)은 separation principle에 따라 다음과 같이 표현된다.

$$\text{Det} \|sI - A + BG\| \cdot \text{Det} \|sI - A + HC\| = 0 \quad (34)$$

그러므로 식 (34)는 다음 식 (35), (36)과 같이 각각 $(A - BG)$, $(A - HC)$ 에 대하여 표현할 수 있다.

$$\text{Det} \|sI - A + BG\| = 0 \quad (35)$$

$$\text{Det} \|sI - A + HC\| = 0 \quad (36)$$

여기서,

$$G = [g_{11} g_{12} g_{13} g_{14}], \quad H = [h_{11} h_{21} h_{31} h_{41}]^T$$

(가) 시스템행렬이 $(A - BG)$ 인 경우

식 (35)의 특성방정식을 구하면 다음과 같다.

$$s^4 + \left[\frac{C_s m_s + C_s m_u - g_{14} m_s + g_{12} m_u}{m_s m_u} \right] s^3 + \left[\frac{k_s m_s + k_t m_s + k_s m_u + g_{11} m_s - g_{11} m_u - g_{13} m_s}{m_s m_u} \right] s^2 + \left[\frac{C_s k_t + g_{12} k_t}{m_s m_u} \right] s + \left[\frac{k_s k_t + g_{11} k_t}{m_s m_u} \right] = 0 \quad (37)$$

식 (37)을 수동시스템과 마찬가지로 2차시스템 2개로 분리시킬 때 모드분리된 형태가 다음과 같다고 가정한다.

$$(s^2 + \alpha_1 s + \beta_1) (s^2 + \gamma_1 s + \eta_1) = 0 \quad (38)$$

이 경우, 식 (37)과 식 (38)로부터 파라메타 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \eta_1$ 는 다음과 같이 계산되어 진다.

$$\alpha_1 = \left[\frac{C_s + g_{12}}{m_s} + \frac{C_s - g_{14}}{m_u} \right]$$

$$+ \frac{m_s C_s k_t - g_{14} m_s k_t}{m_u (k_s m_u - m_s k_t + g_{11} m_u)} \Big],$$

$$\beta_1 = \frac{k_s + g_{11}}{m_s},$$

$$\gamma_1 = \frac{g_{14} m_s k_t - m_s C_s k_t}{m_u (k_s m_u - m_s k_t + g_{11} m_u)}, \quad \eta_1 = \frac{k_t}{m_u} \quad (39)$$

(나) 시스템행렬이 $(A - HC)$ 인 경우

식 (36)의 특성방정식을 구하면 다음 식과 같이 된다.

$$s^4 + \left[\frac{C_s m_s + C_s m_u + h_{21} m_s m_u}{m_s m_u} \right] s^3 + \left[\frac{k_s m_s + k_t m_s + k_s m_u - h_{11} m_u k_s - h_{21} m_s C_s - h_{41} m_u C_s}{m_s m_u} \right] s^2 + \left[\frac{C_s k_t + g_{12} k_t}{m_s m_u} \right] s + \left[\frac{k_s k_t + g_{11} k_t}{m_s m_u} \right] = 0 \quad (40)$$

이 식을 동일한 방법으로 모드분리를 하면 다음과 같다.

$$(s^2 + \alpha_2 s + \beta_2) (s^2 + \gamma_2 s + \eta_2) = 0 \quad (41)$$

여기서,

$$\alpha_2 = \left[h_{21} - \frac{h_{21} m_s m_u k_s - h_{41} m_u^2 k_s - h_{31} m_u C_s k_t - m_s C_s k_t}{m_u (k_s m_u - m_s k_t + h_{11} m_u k_s - h_{31} m_u k_s)} + \frac{C_s}{m_s} + \frac{C_s}{m_u} \right], \quad \beta_2 = \frac{k_s + h_{11} k_s - h_{31} k_s}{m_s},$$

$$\gamma_2 = \frac{h_{21} m_s m_u k_s + h_{41} m_u^2 k_s - h_{31} m_u C_s k_t - m_s C_s k_t}{m_u (k_s m_u - m_s k_t - h_{11} m_u k_s - h_{31} m_u k_s)},$$

$$\eta_2 = \frac{k_t}{m_u} \quad (42)$$

Table 2는 수동시스템과 제4절에서 설계하였던 LQG/LTR 제어기에 대하여 1차 및 2차모드로 분리하였을 때의 고유치이다. 그리고 Table 3은 절 5.1의 식 (25), (26), (27)에 대하여 민감도해석을 수행하여 Table 2의 고유치 순서로 정리한 것이다. 여기서 아래첨자 p 는 수동시스템 (passive system)을 나타내고 a 는 능동시스템 (active system)을 뜻한다.

Table 2 Eigenvalues of passive and active systems

	1st mode	2nd mode
PASSIVE	$\lambda_{p1} = -1.7117 + j7.67$ $\lambda_{p2} = -1.7117 - j7.67$	$\lambda_{p3} = -13.9411 + j67.85$ $\lambda_{p4} = -13.9411 - j67.85$
ACTIVE (LQG/ LTR)	$\lambda_{a1} = -2.0849$ $\lambda_{a2} = -4.8694 + j8.32$ $\lambda_{a3} = -4.8694 - j8.32$ $\lambda_{a4} = -30.4263$	$\lambda_{a5} = -12.6285 + j67.17$ $\lambda_{a6} = -12.6285 - j67.17$ $\lambda_{a7} = -14.0839 + j67.95$ $\lambda_{a8} = -14.0839 - j67.95$

Table 3 Sensitivity of eigenvalues of passive and active systems

PASSIVE					
A \ B	m_s	m_u	c_s	k_s	k_t
λ_{p1}	0.0072-0.0155i	1.4604E-04-3.6225E-05i	-0.0018-0.0002i	2.0898E-05+2.3153E-04i	-1.8911E-06+1.5365E-06i
λ_{p2}	0.0072+0.0155i	1.4604E-04+3.6225E-05i	-0.0018+0.0002i	2.0898E-05-2.3153E-04i	-1.8911E-06-1.5365E-06i
λ_{p3}	0.0013+0.0032i	0.3779 -0.9039i	-0.0142-0.0044i	-2.0898E+05+2.1299E-04i	1.8911E-06+2.0418E-04i
λ_{p4}	0.0013-0.0032i	0.3779 +0.9039i	-0.0142+0.0044i	-2.0898E-05-2.1299E-04i	1.8911E-06-2.0418E-04i
ACTIVE(LQG/LTR)					
λ_{a1}	-7.5284E-04	8.9699E-07	2.9695E-04	-1.4242E-04	2.0633E-07
λ_{a2}	0.0066-0.0198i	1.1041E-04-3.7747E-04i	-0.0017-0.0008i	2.5976E-05+3.2938E-04i	-2.0580E-06+1.6356E-06i
λ_{a3}	0.0066+0.0198i	1.1041E-04+3.7747E-04i	-0.0017+0.0008i	2.5976E-05-3.2938E-04i	-2.0580E-06-1.6356E-06i
λ_{a4}	0.1609	-0.0109	-0.0107	3.5146E-04	-1.1798E-05
λ_{a5}	-0.0081+0.0249i	0.3282-0.9166i	-0.0108-0.0093i	-1.0452E-04+1.8006E-04i	5.7957E-06+2.0836E-04i
λ_{a6}	-0.0081-0.0249i	0.3282+0.9166i	-0.0108+0.0093i	-1.0452E-04-1.8006E-04i	5.7957E-06-2.0836E-04i
λ_{a7}	0.0019+0.0028i	0.3780-0.9033i	-0.0143-0.0043i	-2.5976E-05+2.1568E-04i	2.0580E-06+2.0389E-04i
λ_{a8}	0.0019-0.0028i	0.3780+0.9033i	-0.0143+0.0043i	-2.5976E-05-2.1568E-04i	2.0580E-06-2.0389E-04i

※ A : 자동차 제원, B : 고유치

5.3 자동차제원의 변화에 대한 근궤적

전 절에서 파라미터변화에 대한 민감도해석과 수동형과 능동형 현가장치에 대하여 1차 운동모드, 2차 운동모드를 분리하였다. 이제 Table 3의 민감도표와 분리된 모드를 이용하여 자동차제원(m_s, m_u, c_s, k_s, k_t)의 변화에 대하여 각 모드의 고유치가 어떻게 거동하는지 파악하고자 한다. 실제로 자동차가 운행시에 이들 파라미터는 일정하지 않고 시간에 따라 변할 수 있다. 예를 들어 타이어의 압력변화에 따른 k_t 의 변화, 승객의 증가에 따른 m_s 의 증가 등 여러 경우가 있을 수 있다. 만일 이들 제원이 변하는 경우, 파라미터의 변화가 자동차의 안정성에 어느 정도 영향을 미치는지 고찰하는 것은 매우 중요하다. 또한 이러한 근궤적은 공칭파라미터 선정에 매우 유용하리라 생각된다.

자동차제원의 범위는 각각 다음과 같이 무차원화시켰다. 여기서 아래첨자 n 은 Table 1의 공칭값(nominal value)을 의미한다.

$$0.1 \leq \frac{m_s}{[m_s]_n} \leq 4 \rightarrow \text{sprung mass의 범위}$$

$$0.3 \leq \frac{m_u}{[m_u]_n} \leq 27 \rightarrow \text{unsprung mass의 범위}$$

$$0.01 \leq \frac{c_s}{[c_s]_n} \leq 4 \rightarrow \text{감쇠계수의 범위}$$

$$0.1 \leq \frac{k_s}{[k_s]_n} \leq 8.7 \rightarrow \text{스프링 강성계수의 범위}$$

$$0.12 \leq \frac{k_t}{[k_t]_n} \leq 4 \rightarrow \text{타이어 강성계수의 범위}$$

Fig. 3~8는 수동형 현가장치와 능동형(LQG/LTR) 현가장치에 대하여 자동차제원을 변화시킬 때의 고유치의 궤적을 나타내고 있다. 1/4 car의 모든

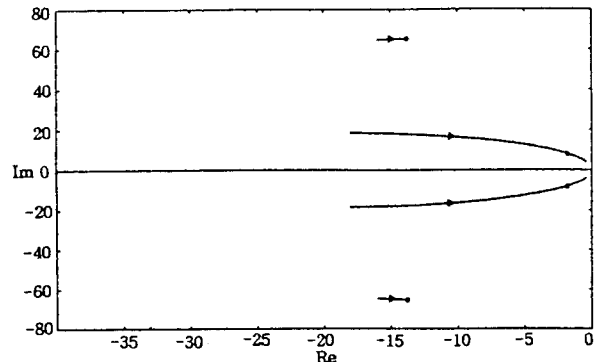


Fig. 3 Root Loci against the sprung mass variation of passive system

자동차 제원에 대해 거의 유사한 경향을 보이고 있으며, 본 논문에서는 그 중 대표적인 것을 나타내었다. 그림에서 0 표시는 공칭파라미터에서 즉, Table 2에 나타난 고유치이다. 그리고 화살표방향은 파라미터가 증가하는 방향을 나타낸다. 여기서 방향성은 Table 3의 민감도 해석을 수행한 결과와 동일하다.

Fig. 3과 4는 차체질량의 변화에 대한 수동형과 능동형의 근궤적선도이다. 수동형, 능동형 모두에 대해 1차모드의 고유치는 상당히 민감하게 변하고, 2차모드 고유치의 변화는 미소함을 알 수 있다. 이는 차체질량이 1차모드를 지배하는 파라미터이기 때문에 나타나는 결과이다. 1차모드 고유치의 궤적의 특징을 살펴보면, 수동시스템은 m_s 가 증가함에 따라 고유치가 허수축부근으로 이동하고 있으나 능동시스템의 고유치는 매우 강인함을 알 수 있다. 특히 능동시스템의 고유치 -2.0849 는 안정성이 증가하는 방향으로 이동하고 있다. 그러나 차축 질량은 2차

모드를 지배하는 파라미터이므로 2차 모드의 고유치 변화에 많은 영향을 미친다. 이는 Table 3의 민감도 해석표에서도 쉽게 확인할 수 있다.

현가장치의 감쇠계수 c_s 의 변화에 대한 수동형과 능동형의 근궤적선도는 Fig. 5와 6에서 나타내었다. 우선 1차 모드를 보면 능동형이 수동형에 비해서 파라미터변화에 대해 더욱 강인함을 볼 수 있는데 수동형의 경우 감쇠계수가 90% 정도 감소하면 안정성의 임계점으로 고유치가 이동함을 알 수 있다. 2차 모드의 경우는 수동형, 능동형의 근궤적이 거의 비슷하게 나타나며 감쇠계수의 변화에 많은 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7과 8은 타이어강성계수 k_t 의 변화율에 대한 수동, 능동형의 근궤적선도이다. 1차모드를 비교해 보면 매우 특이할만한 사항이 있는데 그것은 수동형의 경우 타이어강성계수가 작아지면 (예를 들어 타이어의 압력이 작아지면, 차체의 운동모드는 불안정

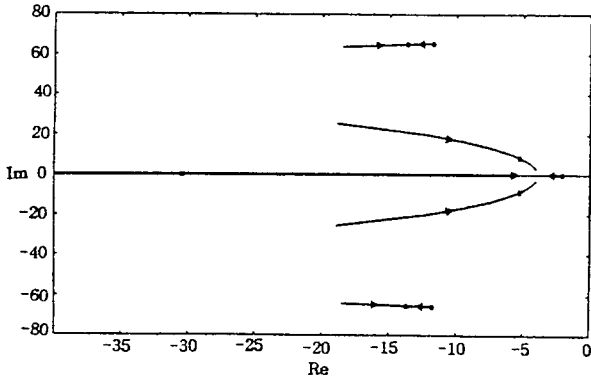


Fig. 4 Root Loci against the sprung mass variation of active system

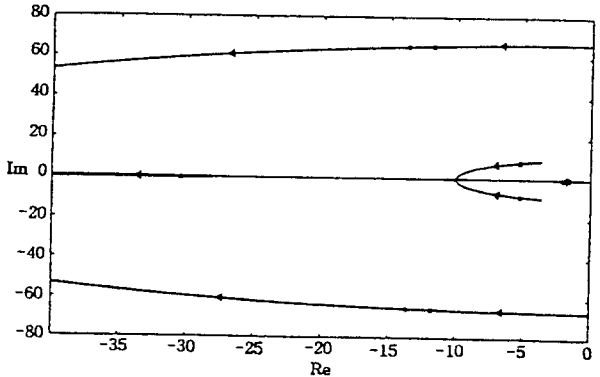


Fig. 6 Root Loci against the damper rate variation of active system

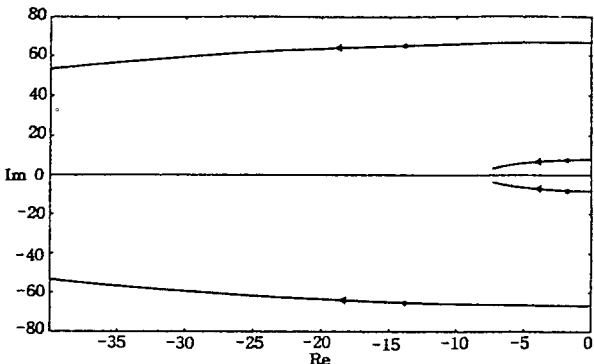


Fig. 5 Root Loci against the damper rate variation of passive system

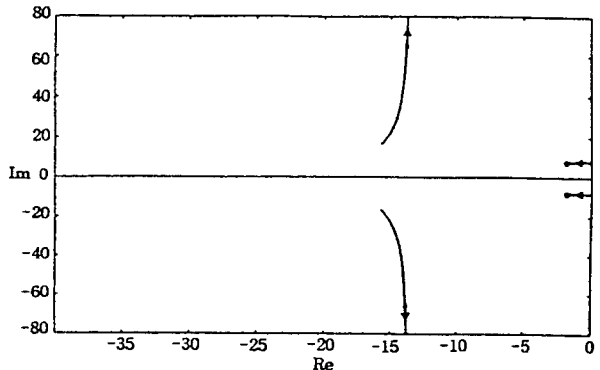


Fig. 7 Root Loci against the tire stiffness variation of passive system

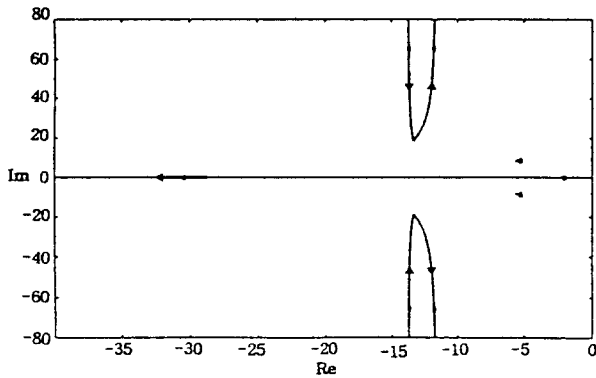


Fig. 8 Root Loci against the tire stiffness variation of active system

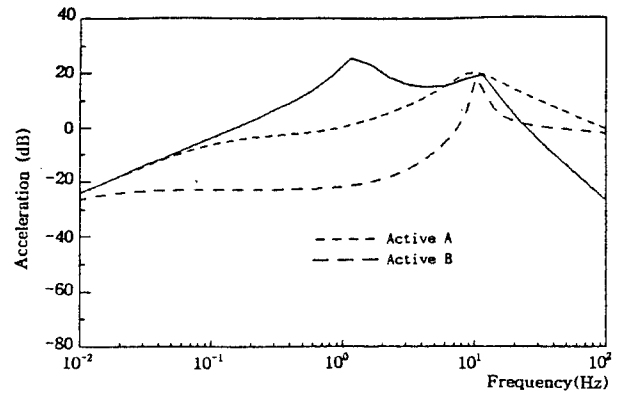
해지는 반면 능동형의 경우는 거의 변화가 없음을 볼 수 있다. 이는 타이어의 강성이 90% 정도 감소해도 능동형에서는 차체의 안정성이 보장된다는 것을 의미한다. 2차모드의 경우는 거의 유사한 변화를 보여주고 있다. 이와같이 자동차제원의 변화에 대한 수동시스템과 능동시스템(LQG/LTR)의 근궤적을 이용하여 능동시스템이 수동시스템에 비해 파라미터 변화에 대하여 고유치가 더욱 강인함을 확인하였다.

6. 시뮬레이션 결과와 토의

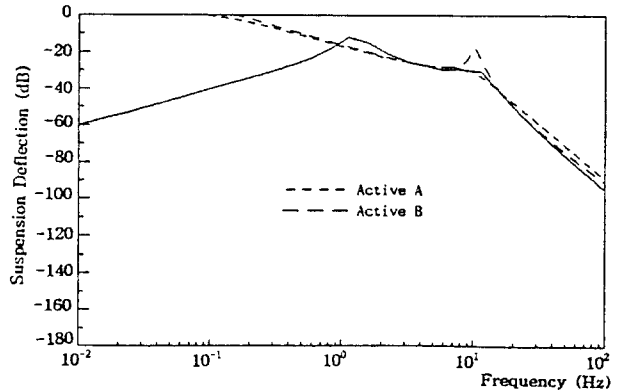
6.1 현가장치 고유특성 시뮬레이션

제3절에서 설명했듯이 승차감, 현가장치 공간확보 문제, 조종성간에는 연성관계가 존재하므로 차종에 따른 설계목적을 선정하여 자동차의 특성에 맞도록 제어기를 설계하여야 한다. 이제 승차감(고급승용차의 경우)에 비중을 두어 설계할 때의 이들의 연성관계를 주파수선도를 통하여 살펴보기로 한다. Fig. 9는 승차감에 비중을 두어 설계하였을 때의 가속도, 현가장치변위, 타이어변위 주파수선도이다. Fig. 9에서 가속도선도의 10 Hz 부근의 주파수특성은 변함이 없고, 가속도특성 즉 승차감이 향상됨(수동시스템에서 능동시스템 A 및 B로 주파수특성을 변화시킬 때)에 따라 현가장치변위 특성은 대략 0.9 Hz~5 Hz 부근의 주파수특성은 변함이 없고 0.9 Hz 이하의 주파수특성이 나빠짐을 볼 수 있다. 또한 타이어변위 특성, 즉 조종특성은 약 0.8 Hz~3 Hz 영역에서는 좋아지나 0.01 Hz 이하의 주파수영역과 10 Hz 부근에서는 나빠짐을 알 수 있다.

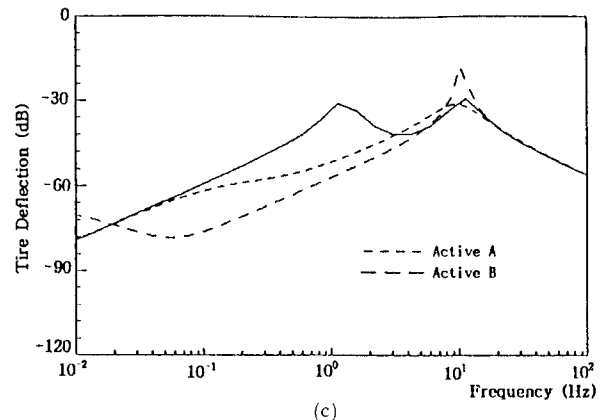
조종성에 비중을 두어 설계할 때도 정성적으로 동일한 결과를 얻게 된다. 1 Hz 부근과 10 Hz 부근의



(a)



(b)



(c)

Fig. 9 Design of $H_A(s)$, $H_{SB}(s)$, $H_{TB}(s)$ when weighting ride quality

조종특성을 향상시키기에 따라 가속도선도에서 1 Hz 부근의 승차감은 향상되나 10 Hz 이상의 고주파에서는 승차감이 나빠지게 된다. 또한 현가장치변위 주파수선도에서는 1 Hz와 10 Hz 부근의 특성은 좋아지나 저주파와 고주파영역에서 주파수특성이 나빠지게 된다.

6.2 LQG/LTR 제어기의 성능 시뮬레이션

LQG/LTR 능동제어기의 성능을 확인하기 위해, 수동현가장치와 제4절에서 설계한 LQG/LTR 능동현가장치의 성능을 주파수영역과 시간영역에서 평가하였다. Figs. 10~16에서 실선으로 표시한 것은 수동현가장치이고 쇄선으로 표시한 것은 LQG/LTR 방법으로 설계한 능동현가장치이다.

Fig. 10의 가속도 주파수특성을 보면 0.5 Hz~3.0 Hz 부근의 승차감이 많이 향상되었음을 알 수 있고, Fig. 11의 현가장치변위 특성은 0.5~2.5 Hz 부근은 향상되었으나 0.4 Hz 이하의 주파수영역의 특성은 나빠졌다. Fig. 12의 조종특성은 0.3 Hz~2.1 Hz에서 많이 향상되었으나, 조종안정성의 중요한 영역인 차축질량의 고유진동수 부근에서는 큰 변화가 없다. 현가장치변위의 주파수특성이 나빠진 것은 6.1절의 시뮬레이션 결과에서 보듯이 승차감과 조종성이 향상되면 현가장치변위 특성이 나빠지는 현가장치의 고유특성에 기인하는 결과라고 생각된다. 따라서, 승차감과 조종성을 향상시키기 위해서 능동제

어를 하는 경우 현가장치의 공간이 충분하지 주의해야 할 것이다. 또한, 제3절에서도 언급한 바와 같이, 10.6 Hz에서 가속도 주파수특성이 변함이 없는 것과 3.83 Hz에서 현가장치 변위특성이 변하지 않는 것을 각각 Fig. 10과 11에서 확인할 수 있다.

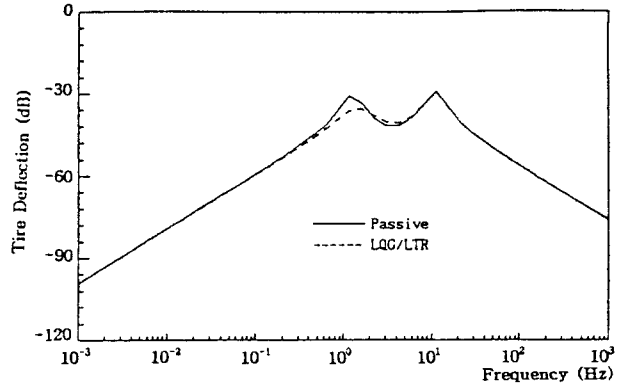


Fig. 12 Tire deflection transfer functions

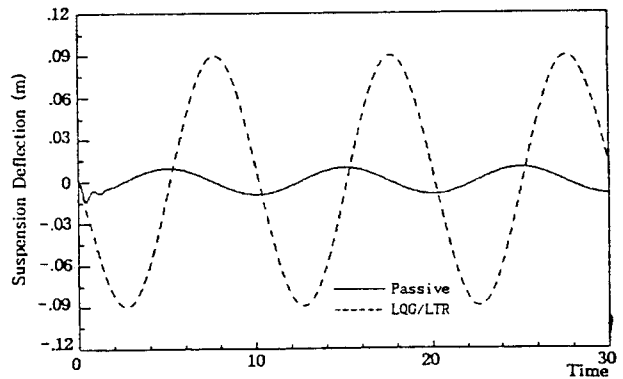


Fig. 13 Suspension deflection responses for the sinusoidal input of 0.1 Hz

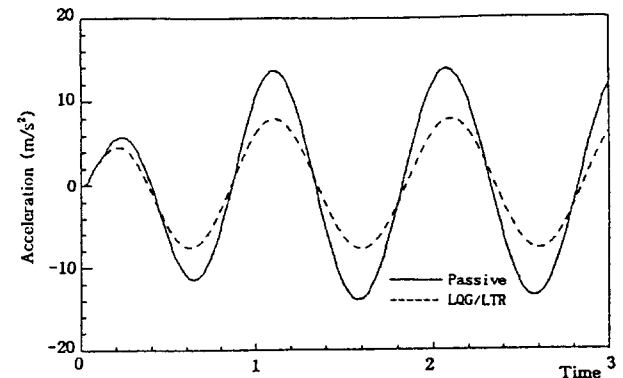


Fig. 14 Acceleration of sprung mass for the sinusoidal input of 1 Hz

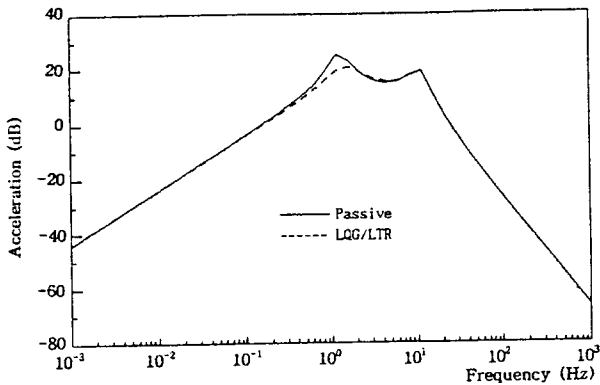


Fig. 10 Acceleration transfer functions

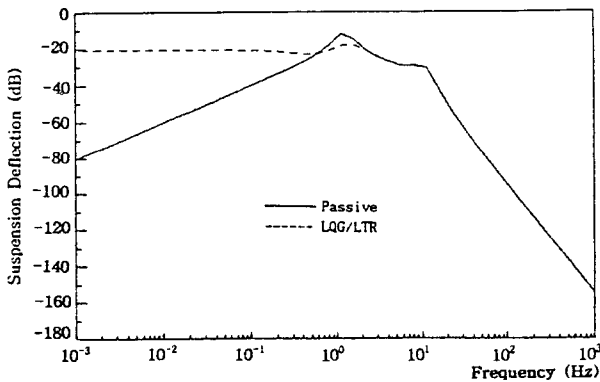


Fig. 11 Suspension deflection transfer functions

0.1 Hz의 주파수 성분을 갖는 정현파를 외란입력으로 주었을 때의 현가장치변위의 시간선도는 Fig. 13에 나타내었으며, 수동현가장치에 비해 능동현가장치의 변위가 컸음을 알 수 있다. 이는 위에서

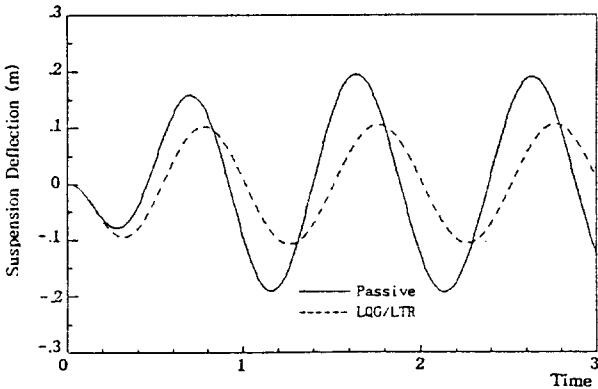


Fig. 15 Suspension deflection responses for the sinusoidal input of 1 Hz

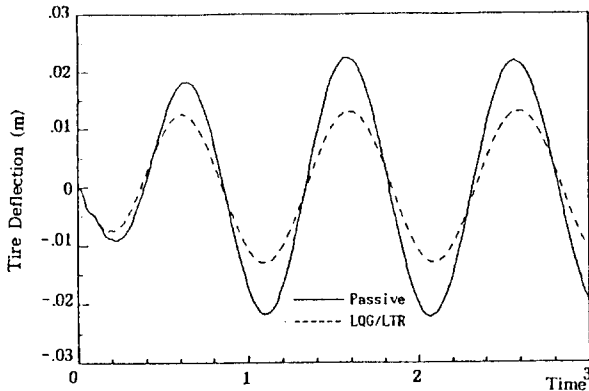


Fig. 16 Tire deflection responses for the sinusoidal input of 1 Hz

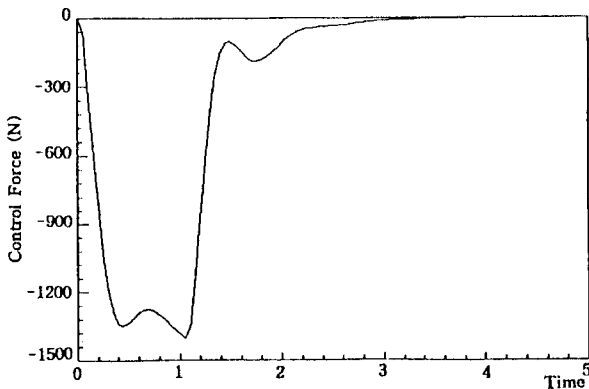


Fig. 17 Control Input against unit step bump input

언급한 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Figs. 14~16는 각각 1 Hz의 주파수성분을 갖는 정현파를 외란입력으로 주었을 때의 가속도, 현가장치변위, 타이어변위 시간선도이다. 이 결과에서는 능동제어 시스템의 성능이 수동식에 비해 월등히 좋아짐을 알 수 있다.

Fig. 17는 1초간 1 m/s의 외란이 들어온다고 가정을 하였을 때의 필요한 제어입력이다. 이는 자동차가 시속 30 km/h로 주행할 때 길이 83 cm 높이 10 cm이 계단을 1초만에 통과할 때의 제어입력이라고 할 수 있다. 이 제어입력은 약 1400 N 정도이며, 일반적인 유압댐퍼가 발생시킬 수 있는 최대현가력(약 3500 N)에 비해 작은 값이다. 실제 주행시에는 이 정도의 제어력으로 승차감, 조종성을 향상시킬 수 있을 것이라고 생각된다.

7. 결 론

본 연구에서는 1/4 car 모델을 사용하여 LQG/LTR 능동제어기를 설계하고 그 안정도-강인성을 해석적으로 살펴보았다. 일반적으로 현가장치는 약 0.5~10 Hz 저주파영역의 밴드통과필터 역할을 한다. 특히 이 부분은 탑승자가 민감하게 느끼는 주파수영역이므로 승차감 및 조종성에 매우 중요하다. 본 논문에서는 0.5~10 Hz 부근의 승차감 및 조종성 향상에 초점을 두고 차체의 속도를 출력변수로 한 LQG/LTR 제어기를 설계하였다. 본 연구에서 얻어진 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 현가장치 고유의 성질로 인하여 승차감, 조종성 및 현가장치변위는 서로 연성되어 있다. 그러므로 자동차의 특성에 맞게 설계사양을 선정하는 것이 필요하다.

(2) 차체의 속도를 출력변수로 하는 LQG/LTR 능동제어기를 설계하였다.

(3) LQG/LTR 방법을 현가장치의 능동제어에 활용함으로써 0.5 Hz~3 Hz 영역의 승차감의 향상과 0.3 Hz~2.1 Hz 부근이 조종성을 일부 향상시킬 수 있었다.

(4) 수동, 능동시스템(LQG/LTR)에 대하여 민감도해석을 수행하여 공칭파라미터에서의 고유치변화를 파악하였다. 또한 이를 1차, 2차 모드로 정리하여 어느 모드가 파라미터 변화에 민감한지 해석하였다.

(5) 자동차체원의 변화에 대하여 수동시스템과 능동시스템(LQG/LTR)의 각 모드별로 근계적을 그려

능동시스템이 수동시스템에 비해 파라미터변화에 대하여 고유치가 더욱 강인함을 확인하였다.

참 고 문 헌

- (1) Hedrick, J. K., Butsuen, T., 1988, "Invariant Properties of Automotive Suspensions," *Proceedings of IMechE*, pp. 35~41.
- (2) Karnopp, D., 1992, "Power Requirements for Vehicle Suspension Systems," *Vehicle System Dynamics*, Vol. 21, pp. 65~71.
- (3) Yue, C., Butsuen, T., Hedrick, J. K., 1989, "Alternative Control Laws for Automotive Active Suspensions," *J. Dynamic System, Measurement and Control*, Vol. 111, pp. 286~291.
- (4) Butsuen, T. Hedrick, J. K., 1989, "Optimal Semi-Active Suspensions for Automotvie Vehicles ; The 1/4 car model," *ASME winter Annual Meeting*, San Francisco, Calif.
- (5) Sharp, R. S., Crolla, D. A., 1987, "Road Vehicle Suspension System Design-a Review," *Vehicle System Dynamics*, Vol. 16, pp. 167~192.
- (6) Claar, P. W., Vogel, J. M., 1989, "A review of Active Suspension Control for On and Off-highway Vehicles," *Society of Automotive Engineers Paper no. 892482*.
- (7) 광영학, 박영진, 1992, "능동형 현가시스템을 위한 모드 sky-hook 감쇠제어기," *대한기계학회 동역학 및 제어부분 학술강연회논문집*, pp. 53~59.
- (8) 오재응, 이정윤, 1992, "모드 연성효과를 고려한 반능동형 현가장치의 진동제어," *대한기계학회 논문집*, 제16권 3호, pp. 430~442.
- (9) 송척기, 박호, 오재응, 염성하, 1990, "민간도 해석에 의한 자동차 현가장치의 성능개선에 관한 연구," *대한기계학회논문집*, 제14권 6호, pp. 1464~1473.
- (10) Kwakernak and Sivan, 1972, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience and Control, pp. 286~291.
- (11) 김종식, 1989, "선형제어 시스템 공학," 청문각.
- (12) Ray, L. R., 1992, "Robust Linear-Optimal Control Laws for Active Suspension Systmes," *J. Dynamic System, Measurement, and Control*, Vol. 114, pp. 592~598.
- (13) 박봉철, 황재혁, 1993 "LQG/LTR 설계방법을 이용한 자동차 현가장치 능동제어," *한국소음진동 공학회 춘계학술대회 논문집*, pp. 86~92.