한국소음진동공학회지 제 3 권 제 4 호, pp. 353~359, 1993.

〈論 文〉

동적 해석을 위한 효과적 고차 Taylor-Galerkin법에 관한 연구

A Study on an Effective Higher-Order Taylor-Galerkin Method for the Analysis of Structural Dynamics

윤 성 기*·박 상 훈**
Youn Sung-Kie and Park Sang-Hoon

(1993년 8월 9일 접수 ; 1993년 12월 1일 심사완료)

ABSTRACT

In this study, the Taylor-Galerkin method is modified to take into consideration the third order term in the Taylor series of the fundamental variable. In the Taylor-Galerkin mothod, after expressing the governing equation of motion in conservation form, the temporal discretization is done first and then spatial discretization follows in contrast to the conventional approaches. A predictor-corrector type algorithm has been developed previously by the same author. A new computationally efficient direct algorithm is proposed in this study. A study on convergency and accuracy of the soluton is carried out. Numerical examples show that this new algorithm exhibits the same order of accuracy with less computational effort.

기 호 설 명

U : 보존식 형태의 변위
E : 보존식 형태의 응력
H : 보존식 형태의 하중
u : 변위
σ : 응력
f_x : 하중
ρ : 밀도
t : 시간
Δt : 시간간격
$[M]$: 질량행렬
$[K]$: 강성행렬
$\{H\}$: 하중벡터
α : Taylor급수의 3차항 고려 인자
γ : 변위 갱신 조변수
V^n : 보존식 형태의 변위의 이산값
u^n : 변위의 이산값
v^n : 속도의 이산값
$[A]$: 증폭행렬
$\tau(t_n)$: 국소절단오차
ω : 고유진동수
$\bar{\omega}$: 이산화된 문제의 수치적 진동수
ξ : 물리적 감폭
$\bar{\xi}$: 이산화된 문제의 수치적 감폭
T : 주기
$\bar{T}$: 이산화된 문제의 수치적 주기
$u(t_n)$: 변위의 참값
$v(t_n)$: 속도의 참값
k : 수렴차수

*정회원, 한국과학기술원 기계공학과
**한국과학기술원 기계공학과

1. 서 론

동적 문제에서는 시간과 공간을 동시에 고려하여야 한다. 즉, 동적 문제의 수학적 모델은 공간좌표와 시간좌표를 독립변수로 하는 편미분방정식이 된다. 따라서, 동적 문제를 수치적 방법을 이용하여

풀려면 시간과 공간에 대하여 각각 이산화 하여야 한다. 기존의 방법들은 주로 공간에 대하여 이산화 된 식을 시간에 대하여 단계적으로 적분해 나간다. 그러나, 시간에 대하여 먼저 이산화한 후, 이를 다시 공간에 대하여 이산화할 수도 있다.

Taylor-Galerkn법에서는 보존식 형태로 나타내어진 지배방정식을 Taylor 급수를 사용하여 먼저 시간에 대해 이산화한 후, 이를 다시 Galerkin유한요소법을 이용하여 공간에 대해 이산화 한다. 여기서 Taylor급수의 고차항까지 고려하면 시간에 대한 이산화 정도를 높일 수 있게 된다. Tamma-Namburu[1~3]가 Taylor급수의 2차항까지 고려하여 동적 해석을 수행한 결과, 기존의 방법에 비해서 정확한 해를 얻을 수 있었다.

기존의 방법들은 시간에 대해서는 공간에 비해서 상대적으로 낮은 해상도를 제공한다. 본 논문에서는, Tamma-Namburu의 Taylor-Galerkin법을 확장하여, Taylor급수로 표현한 기초변수의 3차 미분항까지를 효과적으로 고려하므로써 시간에 대한 해상도를 높이는 알고리즘을 개발하고자 한다. 윤성기-한상구[4]는 예측-수정자법을 사용한 고차 Taylor-Galerkin법을 개발하여 성공적으로 그 정확성을 입증하였는데, 본 논문에서는 같은 정확도를 가지면서 계산시간을 현저히 줄일 수 있는 직접적인 알고리즘을 제시하고자 한다. 그리고 제안된 알고리즘의 스펙트럼 분석을 수행하여 알고리즘에 사용되는 최적의 매개변수를 찾아내고, 이를 이용하여 몇가지 예제에 적용한 후, Tamma-Namburu의 Taylor-Galerkin법, 그리고 기존의 방법으로서 Newmark-β 법과 그 결과를 비교해 보고자 한다.

2. 외연 고차 Taylor-Galerkin법

1차원의 물리적 감폭이 없는 동적 문제의 지배방정식의 보존식 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}=H \tag{1}$$

여기에는 U는 변위성분, E는 응력성분, H는 하중성분으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U&=\rho\dot{u}\\ E&=-\sigma_x\\ H&=\rho f_x \end{aligned} \tag{2}$$

여기에서 u는 변위, σ는 응력, ρ는 밀도, f_x는 체적력이다.

U에 해당하는 이산화된 값을 V^n으로 놓고 V^{n+1}에 대하여 Taylor급수를 2차항까지 전개하면 다음과 같다.

$$V^{n+1}=V^n+\Delta t\dot{V}^n+\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{V}^n+O(\Delta t^3) \tag{3}$$

이제 공간에 대한 이산화를 위해서 Galerkin 유한요소법을 사용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[M]\{v\}^{n+1}=[M]\{v\}^n+\Delta t(\{H\}^n-[K]\{u\}^n)\\ +\frac{\Delta t^2}{2}(\{\dot{H}\}^n-[K]\{v\}^n)\end{aligned} \tag{4}$$

n단계에서의 변위성분, 속도성분과 위에서 구한 $n+1$단계에서의 속도 성분을 가지고 다음 식을 이용하여 $n+1$단계에서의 변위성분을 구할 수 있다.

$$\{u\}^{n+1}=\{u\}^n+\Delta t[(1-\gamma)\{v\}^n+\gamma\{v\}^{n+1}] \tag{5}$$

여기에서 γ는 수치적 감폭, 즉, 알고리즘의 안정성과 관련되는 인수이다. 이제 식 (4)와 식 (5)를 이용하면 단계적 시간적분이 가능하다. 식을 통해서 보듯이, 가속도항을 매 단계마다 계산할 필요가 없으며 자체연산출발이 가능하다.

일반적으로 이때까지의 Tamma-Namburu등의 연구결과를 보면[1~3], 2차항까지만을 고려하였다. 여기서 Taylor급수를 3차항까지 고려하면 다음과 같다.

$$V^{n+1}=V^n+\Delta t\dot{V}^n+\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{V}^n+\frac{\Delta t^3}{6}\dddot{V}^n+O(\Delta t^4) \tag{6}$$

여기에 3차항의 포함정도를 나타내는 인수 α를 도입하고, 3차 미분항을 2차 미분항을 가지고 표현하면,

$$\begin{aligned}V^{n+1}=V^n+\Delta t\dot{V}^n+\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{V}^n\\ +\alpha\frac{\Delta t^3}{6}\left(\frac{\ddot{V}^{n+1}-\ddot{V}^n}{\Delta t}\right)+O(\Delta t^4)\end{aligned} \tag{7}$$

이 된다. 이를 Galerkin 유한요소법을 이용하여 공간에 대하여 이산화하면,

$$\begin{aligned}[M]\{v\}^{n+1}=[M]\{v\}^n+\Delta t(\{H\}^n-[K]\{u\}^n)\\ +\frac{\Delta t^2}{2}(\{\dot{H}\}^n-[K]\{v\}^n)\\ +\alpha\frac{\Delta t^2}{6}[(\{\dot{H}\}^{n+1}\\ -\{\dot{H}\}^n)-[K](\{v\}^{n+1}-\{v\}^n)]\end{aligned} \tag{8}$$

이 된다.

암시적 형태로 되어 있는 식 (8)은 외연법 형태로 나타내기 위해서 우변의 $\{v\}^{n+1}$을 좌변으로 넘겨서 식 (9)와 같이 외연법의 형태로 바꾸어 줄 수 있다.

$$\left([M]+\alpha\frac{\Delta t^2}{6}[K]\right)\{v\}^{n+1}$$
$$=[M]\{v\}^n+\Delta t(\{H\}^n-[K]\{u\}^n)+\frac{\Delta t^2}{2}(\{\dot{H}\}^n$$
$$-[K]\{v\}^n)+\alpha\frac{\Delta t^2}{6}[(\{\dot{H}\}^{n+1}$$
$$-\{\dot{H}\}^n)+[K]\{v\}^n] \quad (9)$$

이제 식 (9)와 식 (5)를 이용하면 단계적 시간적분이 가능하다. 이 알고리즘 역시 매 단계마다 가속도항을 계산할 필요가 없으며, 자체연산출발이 가능하다.

참고로 식 (8)은 식 (9)와 같이 외연법 형태로 나타내지 않고 식 (10)과 같이 예측-수정자법을 이용하여 나타낼 수도 있다[4].

$$[M]\{v\}_p^{n+1}=[M]\{v\}^n+\Delta t(\{H\}^n-[K]\{u\}^n)$$
$$+\frac{\Delta t^2}{2}(\{\dot{H}\}^n-[K]\{v\}^n) \quad (10a)$$

$$[M]\{v\}^{n+1}=[M]\{v\}_p^{n+1}+\alpha\frac{\Delta t^2}{6}[(\{\dot{H}\}^{n+1}-\{\dot{H}\}^n)$$
$$-[K](\{v\}_p^{n+1}-\{v\}^n)] \quad (10b)$$

3. 해석적 분석

제시된 알고리즘을 적용하기 위해서는 α값과 γ값에 따른 알고리즘의 특성을 알아보아야 한다. 이를 위해서 스펙트럼 해석을 수행하였다.

식 (9)와 식 (5)를 1자유도 문제로 축소하여 표현한 뒤에, $\omega^2=(K/M)$, $D=1+(\alpha/6)\Delta t^2\omega^2$으로 놓고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}u^{n+1}\\v^{n+1}\end{Bmatrix}=[A]\begin{Bmatrix}u^n\\v^n\end{Bmatrix}+[L^n] \quad (11)$$

$$[A]=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}D-\gamma\Delta t^2\omega^2 & D\Delta t-\frac{\gamma}{2}\Delta t^3\omega^2\\ -\Delta t\omega^2 & D-\frac{1}{2}\Delta t^2\omega^2\end{bmatrix} \quad (12)$$

여기에서 $[A]$는 증폭행렬이 되며, $\{L^n\}$은 하중성분이다. 다시 $\Omega=\omega\Delta t$로 놓고 증폭행렬과 관련하여 다음을 정의한다.

$$A_1=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}A=1-\frac{1}{2D}\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\Omega^2 \quad (13a)$$

$$A_2=\det A=1-\frac{1}{D}\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\Omega^2 \quad (13b)$$

3.1 안정성 및 정밀도

Hughes[5]에 의하면, 안정성을 만족하고 정밀도와 관련하여 일관성이 있으면 수렴이 보장된다.

안정성과 관련해서는 다음의 조건을 만족하면 된다[5].

$$-\left(\frac{A_2+1}{2}\right)\le A_1\le\left(\frac{A_2+1}{2}\right),\ -1\le A_2<1 \quad (14a)$$

$$-1<A_1<1,\ A_2=1 \quad (14b)$$

$\alpha>0$인 경우에 식 (13)을 식 (14)에 대입하여 정리하면 식 (15)와 같은 안정성 조건을 얻는다.

$$\gamma\ge\frac{1}{2},\ \Omega^2<\frac{2}{\gamma-\alpha/3}\ \text{or}$$
$$\Delta t<\frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\gamma-\alpha/3}}\ \text{if}\ \alpha<3\gamma \quad (15)$$

여기에서 $\alpha\ge3\gamma$이면 무조건 안정하나, 3.2절에서 알 수 있듯이 위상편차량등, 정확도가 크게 떨어져서 실용적이지 못하다.

식 (10)을 이용한 알고리즘의 안정성 조건은 다음과 같다[4].

$$\gamma\ge\frac{1}{2},\ \alpha\ge\frac{3}{4}\gamma,\ \Omega^2<\frac{6}{\alpha}\ \text{or}\ \Delta t<\frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{6}{\alpha}} \quad (16)$$

정밀도를 살펴보기 위해서 다음과 같이 국소절단오차, $\{\tau(t_n)\}$를 정의한다.

$$\begin{Bmatrix}u(t_{n+1})\\v(t_{n+1})\end{Bmatrix}-[A]\begin{Bmatrix}u(t_n)\\v(t_n)\end{Bmatrix}-\{L^n\}=\{\tau(t_n)\} \quad (17)$$

이때, 모든 시간영역에 대해서 $\{\tau(t_n)\}=O(\Delta t^{k+1})$, $k>0$이면, 알고리즘은 정밀도와 관련하여 일관성이 있다고 한다[5]. 여기서 k는 수렴차수라고 부르며, 식 (17)을 정리하면, $\gamma=1/2$일때 $k=2$, 다른 경우에는 $k=1$임을 알 수 있다. 따라서 $\gamma=1/2$인 경우에는 수렴차수 2로 수렴이 보장되며, 그 이외의 경우에는 수렴차수 1로 수렴이 보장된다. 식 (10)을 이용한 알고리즘도 같은 결과를 나타낸다[4].

3.2 수치적 감폭 및 위상편차

Hughes[5]에 의하면, 물리적 감폭이 없는 1자유도 문제에서 이산화된 알고리즘에 의한 수치적 진동수, $\bar{\omega}$ 및 수치적 감폭, $\bar{\xi}$는 식 (13)에서 정의된 A_1, A_2와 관련하여 식 (18)과 같이 표현된다.

$$\bar{\Omega}=\tan^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1^2}-1\right)^{1/2} \quad (18a)$$

$$\bar{\xi}=\frac{-1}{2\Omega}\ln A_2 \quad (18b)$$

여기에서 $\bar{\Omega}=\bar{\omega}\Delta t$로 정의된다. 식 (18b)로부터 $\gamma=1/2$이면 수치적 감폭은 없음을 알 수 있다. 이것은 식 (10)을 이용한 알고리즘에서도 같다[4]. $\gamma=1/2$일때의 A_1, A_2값을 식 (18a)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\cos\bar{\Omega}=1-\frac{\Omega^2}{2D}=1-\frac{1}{2}\Omega^2+\frac{\alpha}{12}\Omega^4 -\frac{\alpha^2}{72}\Omega^6+O(\Omega^8) \tag{19}$$

식 (19)로부터 $\alpha=1/2$일 때 $\cos\bar{\Omega}$의 오차는 $O(\Omega^6)$임을 알 수 있다. 이는 식 (10)을 이용한 알고리즘에서도 같다. 식 (19)를 이용하여 $\gamma=1/2$일때 α값에 따른 주기오차를 식 (20)과 같이 알 수 있다.

$$\frac{\bar{T}-T}{T}=\frac{2\pi\Delta t/T}{\cos^{-1}\left[1-\dfrac{(2\pi\Delta t/T)^2}{2+\dfrac{\alpha}{3}(2\pi\Delta t/T)^2}\right]}-1 \tag{20}$$

식 (10)을 이용한 알고리즘에서는 $\gamma=1/2$일때의 주기오차가 다음과 같이 주어진다[4].

$$\frac{\bar{T}-T}{T}=\frac{2\pi\Delta t/T}{\cos^{-1}\left[1-\dfrac{1}{2}(2\pi\Delta t/T)^2+\dfrac{\alpha}{12}(2\pi\Delta tT)^4\right]}-1 \tag{21}$$

Fig. 1과 Fig. 2는 각각 식 (20)과 식 (21)을 이용하여 α값에 따른 외연법 알고리즘과 예측-수정자법 알고리즘의 주기오차를 시간간격 Δt의 함수로 나타낸 것이다.

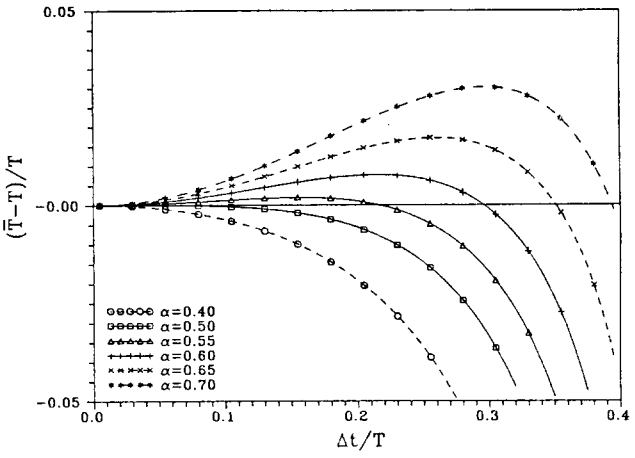

Fig. 1 Phase differences in the explicit higher-order Taylor-Galerkin method ($\gamma=1/2$)

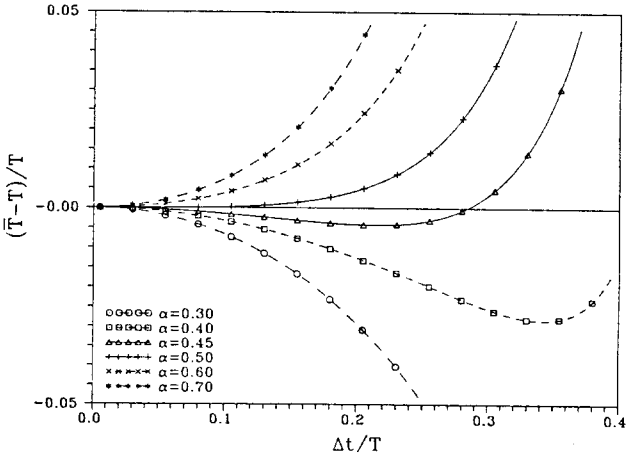

Fig. 2 Phase differences in the predictor−corrector higher-order Taylor-Galerkin method ($\gamma=1/2$)

스펙트럼 해석 결과를 보면, 두 알고리즘은 모두 $\gamma=1/2$일때 가장 좋은 특성을 나타내며 $\gamma=1/2$인 경우의 수렴차수는 2이며 수치적 감폭은 없다. 그러나, α값에 따른 두 알고리즘의 특성 변화는 정반대의 경향을 나타내고 있다. 예측-수정자법 알고리즘은 안정성과 관련하여 α값에 제한이 있으며, α값이 작을수록 안정하다. 반면에 외연법 알고리즘은 안정성과 관련하여 α값에는 제한이 없으며, α값이 클수록 안정하다. Fig. 1과 Fig. 2를 비교해보면, $\gamma=1/2$ 경우에, 예측-수정자법 알고리즘에서는 α값이 1/2이하여야 하며, 외연법 알고리즘에서는 α값이 1/2이상이어야 함을 알 수 있다. 또한 시간간격에 따른 주기오차의 부호도 두 알고리즘이 반대의 경향을 나타내고 있다. 두 알고리즘이 이와 같은 상반된 경향을 나타내지만, 오차의 크기에는 큰 차이가 없으며, 문제의 사용하는 시간간격에 따라서 α값을 잘 선택하면 두 알고리즘 모두 매우 정확한 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 식 (15)와 식 (16)을 비교해 보면, 예측-수정자법 알고리즘이 외연법 알고리즘에 비해서 안정성이 보장되는 시간간격이 크다. 그러나, 외연법 알고리즘이 불안정한 시간간격은 매우 큰 것으로서, 같은 시간간격을 가지고 예측-수정자법이 수렴한다고 해도 오차가 너무 커져서 실용성이 없게 된다. 또한 큰 시간간격으로 인한 불안정성은 α값을 조정하여 해결할 수도 있다. 따라서, 스펙트럼 해석 결과를 놓고 볼때, 제시한 외연법 알고리즘은 예측-수정자법에 비해서 수렴성 및 정확성면에서는 같은 수준이며, 안정성면에서도 거의 뒤지지 않는다. 반면에, 식 (9)와 식 (10)을 비교하면, 제시

된 방법이 계산상의 노력이 훨씬 적음을 알 수 있다.

4. 수치해석

Tamma-Namburu의 방법과 Newmark-β법, 그리고 식 (10)을 이용한 기존의 방법과 비교하여 제시된 알고리즘을 평가해 보기로 한다. Tamma-Namburu의 방법에서는 $\gamma=1/2$로, Newmark-β법에서는 무조건 수렴이 보장[6]되는 $\gamma=1/2$, $\beta=1/4$로 놓고서 풀었다. 그리고, 고차 Taylor-Galerkin법에서는 $\gamma=1/2$로, α는 각 경우에 따라서 적당한 값을 선택하였다. α값의 선택을 적절하게 하여주면 고차 Taylor-Galerkin법의 두가지 알고리즘은 같은 수준의 정확성을 보였다. 따라서 예측-수정자법은 첫번째 예제에서만 비교해 보았다.

4.1 1자유도 문제

우선 간단한 문제로서 Tamma-Namburu가 그의 논문[1]에서 사용한 다음의 식을 택하였다.

$$\ddot{u}+5u=-10\sqrt{\frac{2}{3}},\quad u(0)=\dot{u}(0)=0 \tag{22}$$

이 문제의 정해는 다음과 같다.

$$u=2\sqrt{\frac{2}{3}}(-1+\cos\sqrt{5}t) \tag{23}$$

이 문제의 주기는 $T=2.81$이다. Fig. 3은 시간간격 $\Delta t=0.5$에 대한 각 알고리즘의 해를 보여주고 있다. 고차 Taylor-Galerkin법의 두 알고리즘은 다른 알고리즘에 비해서 월등히 뛰어난 해를 제공하고 있다. Fig. 4는 $\Delta t=0.8$일때 몇가지 α값에 대한 제시된 방법의 해를 나타낸다. 적당한 α값에 대해서는 $\Delta t=0.5$에 뒤지지 않는 해를 보여주고 있다.

이 예제에서 고차 Taylor-Galerkin법의 두 알고리즘은 α값을 잘 선택하면 매우 큰 시간간격을 사용할 때도 정확한 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 이것은 두 알고리즘이 정확성에 관해서는 같은 수준이라는 것을 나타낸다.

4.2 2자유도 문제

다음으로는 역시 정해가 잘 알려져 있지만, 1자유도 문제보다 해의 복잡성이 증가된 문제를 택하였다. 이 문제 역시 Tamma-Namburu[1]가 사용한 문제이다.

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}6&-2\\-2&4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix},$$
$$\{u(0)\}=\{\dot{u}(0)\}=\{0\} \tag{24}$$

이 문제의 정해는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\sqrt{\frac{2}{3}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{5}{\sqrt{3}}(1-\cos\sqrt{2}t)\\2\sqrt{\frac{2}{3}}(-1+\cos\sqrt{5}t)\end{Bmatrix} \tag{25}$$

이 문제의 주기는 2.81과 4.44이다. 시간간격 0.5에 대해서 변위 u_1을 살펴보았다. 제안된 방법에서의 α값은 식 (20)으로부터 $\alpha=0.533$으로 구하였다. 이와 함께 $\alpha=1/2$에 대해서도 문제를 풀어 비교해 보았다. Fig. 5는 상당히 시간이 흐른 후의 각 알고리즘의 해를 나타내고 있다. 제안된 알고리즘은 문

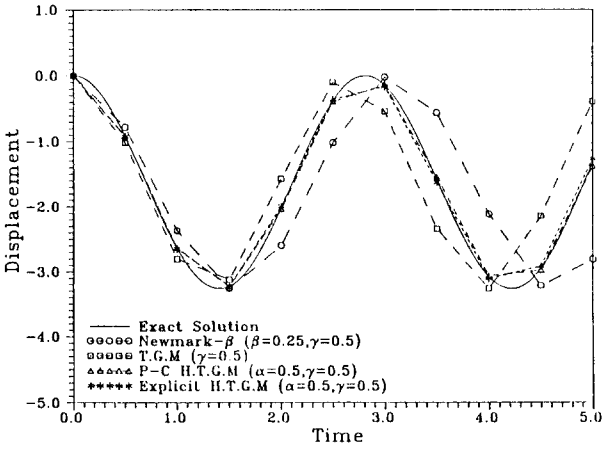

Fig. 3 Solution of 1-DOF problem ($\Delta t=0.5$)

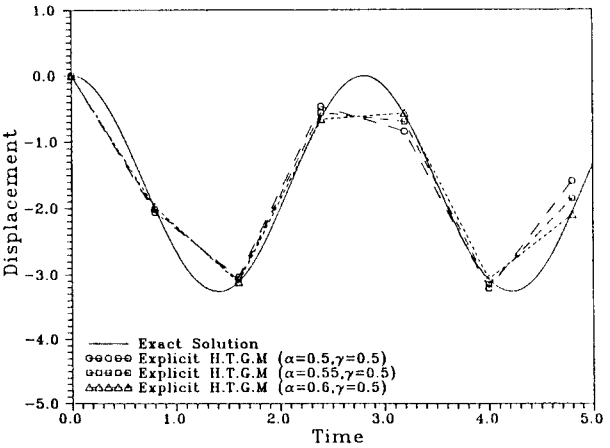

Fig. 4 Solution of 1-DOF problem ($\Delta t=0.8$)

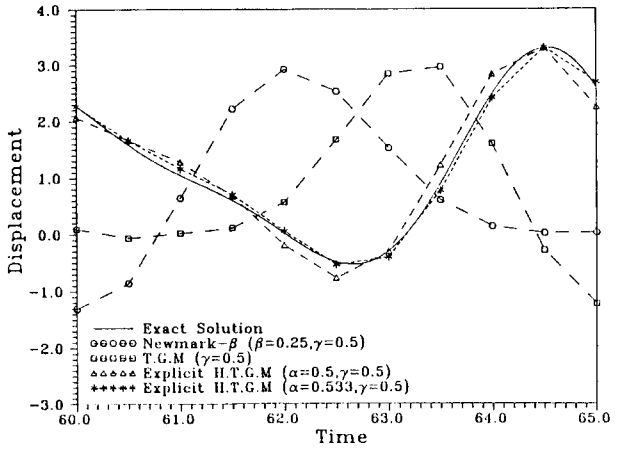

Fig. 5 Solution of 2-DOF problem ($\Delta t=0.5$; after t=60.0)

제의 시간간격에 따라 α값을 잘 선택하면 아주 좋은 해를 얻을 수 있음을 보여주고 있다. 실제로 백여회의 시간 적분후에도 거의 정해와 일치하고 있다.

4.3 하중이 변하는 문제

하중이 시간에 따라서 변하면 그 해는 변화가 심할 수 있다. 특히 시스템의 고유진동수와 하중의 진동수의 차이가 작게 되면 맥놀이가 생겨서 수치해가 정해를 잘 따라가지 못할 수도 있다. 이러한 경우에 대해 제시된 알고리즘의 특성을 알아보기 위해서 다음의 문제를 택하였다.

$$\ddot{u}+5u=10\cos 2t,\quad u(0)=\dot{u}(0)=0 \tag{26}$$

이 문제의 정해는 다음과 같다.

$$u(t)=10(\cos 2t-\cos\sqrt{5}t) \tag{27}$$

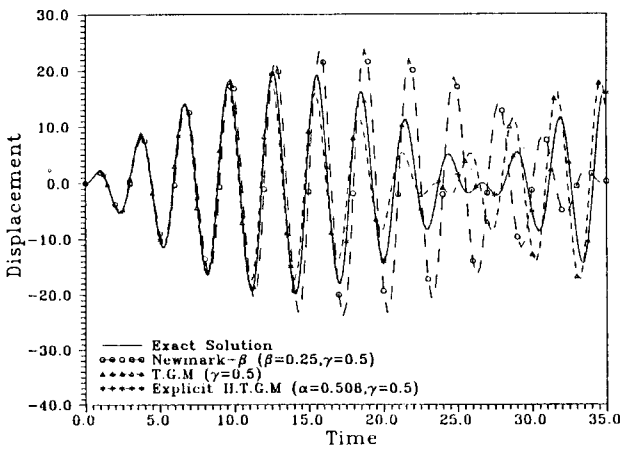

Fig. 6 Solution of the time-varying problem ($\Delta t=0.25$)

이 문제는 주기의 2.81이고 하중의 주기는 3.14이다. 시간간격을 0.25로하여 풀었다. 제시된 방법에서의 α값은 식 (20)을 사용하여 $\alpha=0.508$로 구해진 값을 사용하였다. Fig. 6을 보면, Tamma-Namburu의 Taylor-Galerkin법(T.G.M)에서는 주기가 상당히 줄어들었으며, Newmark-β법에서는 주기가 크게 늘어났다. 이에 따라 전체적인 진폭도 크게 변하였다. 반면에 제안된 방법은 정해를 정확하게 따라가고 있다. 여기서 α값을 알고 있는 주기로부터 구하지 않고 $\alpha=1/2$로만 놓고 풀어도 거의 같은 결과를 나타낸다. 이것은 요동이 심한 문제에 있어서도 제시된 방법이 Tamma-Namburu의 방법과 Newmark-β법보다 훨씬 효율적임을 의미한다.

4.4 트러스 구조물

트러스 구조물은 병진 운동만으로 이루어져 있어서 고유진동수의 최대값과 최소값의 차이가 다른 구조물에 비해서 작다. 수치적 방법으로 해를 구할 때에는 시간간격을 작은 주기를 기준으로 결정하는데, 일반적으로 구조물의 진폭은 큰 주기의 성분에 의해서 지배된다. 따라서 트러스 구조물은 알고리즘의 효율을 비교하는 데에는 다른 구조물보다 적합하다. Fig. 7은 평면 트러스 구조물과 하중상태를 보인다. 이 구조물의 동적해석 결과를 시간간격을 충분히 작게 하여 구한 수렴해와 비교해 보았다.

질량행렬은 일관질량행렬(consistent mass matrix)을 사용하였고, 시간간격을 2.0×10^{-4} sec로 택하였다. 제시된 방법에서의 α값은 트러스를 이루고 있는 봉요소중에서 고유진동수가 큰 1 m되는 봉요소의 고유진동수로부터 대략적으로 산출한 $\alpha=$

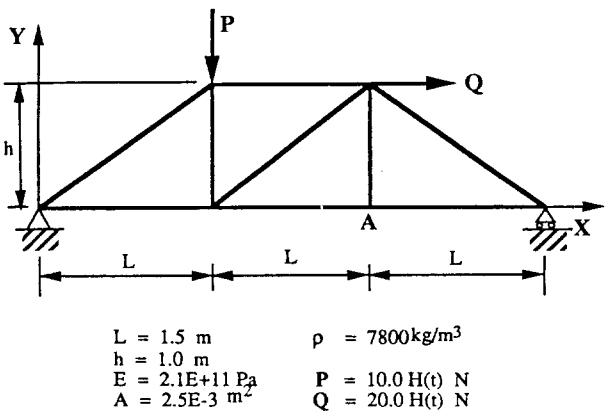

Fig. 7 Plane-truss problem

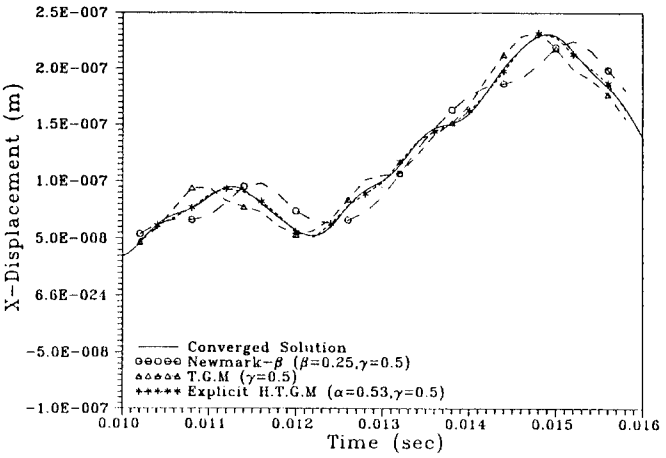

Fig. 8 X-Displacement at A in the Truss(Δt=2.0E−4sec ; after t=0.01sec)

0.53을 사용하였다. Fig. 8은 Fig. 7의 구조물의 A점에 있어서의 X방향 변위에 대한 각 알고리즘의 해를 나타낸다. 반응 초기에서의 해는 서로 큰 차이를 보이지 않기 때문에 시간이 상당히 흐른 후의 해들을 비교하였다. 제시된 방법은 수십회의 시간 적분 후에도 정해와 거의 일치하고 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 효율적인 고차 Taylor-Galerkin법 알고리즘을 제시하였다. 예측-수정자법 알고리즘과 제시된 외연법 알고리즘 모두 Newmark-β법이나 Tamma-Namburu의 방법에 비해서 뛰어난 정확성을 보였다. 두 알고리즘 모두 γ=1/2일때에 수렴차수가 2이었으며, 수치적 감폭이 전혀 없었다. 제안된 알고리즘에서는 예측-수정자법과 반대로 α값이 증가함에 따라서 안정성이 향상되고, 시간간격이 커짐에 따라서 (수치적)주기가 감소하는 경향을 보였다. 또한 예측-수정자법에서는 α값을 1/2, 또는 시간간격의 크기에 따라서 1/2이하를 쓰는 것이 효과적이나, 제안된 방법에서는 1/2, 또는 그보다 큰 값을 쓰는 것이 효과적이다. 수치예제에서 보듯이 α값을 잘 선택하면 매우 뛰어난 해를 얻을 수 있었다. 따라서, 이에 대한 연구가 더 필요할 것이다.

외연법 알고리즘은 예측-수정자법에 비해서 안정성이 약간 떨어지나 실제 알고리즘의 효율에는 별 관계가 없는 정도이며, 수렴성과 정확성면에서는 같은 수준이다. 그러나, 계산량이 훨씬 적기 때문에 예측-수정자법에 비해서 더욱 효율적인 알고리즘으로 볼 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Tamma, K. K. and Namburu, R. R., 1988, "A New Finite-Element-Based Lax-Wendroff/Taylor-Galerkin Methodology for Computational Dynamics", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, pp. 137~150.

(2) Tamma, K. K. and Namburu, R. R., 1988, "An Explicit Velocity-Based Lax-Wendroff/Taylor-Galerkin Methodology of Computation for the Dynamics of Structures", Computers & Structures, Vol. 30, No. 5, pp. 1017~1024.

(3) Tamma, K. K. and Namburu, R. R., 1990, "A Robost Self-Starting Explicit Computational Methodology for Structural Dynamic Applications: Architecture and Representations", Internatonal Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, pp. 1441~1454.

(4) Youn, Sung-Kie and Han, Sang-Gu, "An Accurate Higher-Order Taylor-Galerkin Method for Structural Dynamics", to be appeared in Computers & Structures.

(5) Belytschko, T. and Hughes, T. J. R., eds., 1983, Computational Methods for Transient Analysis, North-Holland, Amsterdam, Vol. 1, Chap. 2.

(6) Bathe, K. J., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, Chap. 9.