

〈論 文〉

# 순간 진동수 추정 방법론의 비교와 외팔보, 엔진 블록 및 자동차 문 진동에의 적용예

## Comparisons of Estimation Methods of Instantaneous Frequency and Examples of its Application to Beam, Engine Block, and Car Door Vibration

박 연 규\* · 김 양 한\*\*

Park Y. K. and Kim Y. H

(1993년 9월 1일 접수 ; 1993년 11월 9일 심사완료)

### ABSTRACT

Although a frequency analysis by FFT algorithm has been widely used in the vibration community, this approach has somewhat limited features when an analyst want to see the details of frequency trends because FFT shows only energy contents along frequencies. So the concept of instantaneous frequency that represents the dominant frequency component at each time needs to be introduced. In this paper, to get the instantaneous frequency, two methods are used. Methods using Hilbert transform and evolutionary spectrum are those. One of the problems of estimating instantaneous frequency using Hilbert transform is that it is normally very sensitive to signal to noise ratio(SNR) because of the differentiation. Moving window is applied on the estimation of instantaneous frequency, and instantaneous frequency histogram are used to handle this problem and proved to be very effective. Computer simulations for various signals have been done to understand the characteristics of instantaneous frequency. The usefulness of signal analysis using instantaneous frequency was tested by three simple experiments, which were engine experiment, beam experiment, and car door experiment. The instantaneous frequency analysis is found to be a useful technique to analyze the signals that have time varying frequencies.

### 1. 서 론

자연계의 특성을 해석하기 위하여 혹은 보다 보편적으로는 공학적인 관심 사항을 규명하기 위한 방법으로서는 많은 실험이 행하여 지며, 실험을 통하여 측정된 신호로부터 유용한 정보의 추출가능 여부는 실험의 유용성에 직접 연관되는 만큼 이와 관련된 많은 신호처리 방법이 연구되어 왔다. 그 중 많이 사용되며 대표적인 신호처리 방법을 크게 나누어보면

시간영역에서의 해석과 FFT(fast Fourier transform)를 이용한 주파수 영역에서의 해석을 생각할 수 있다.

이중 FFT방법은 연산의 고속성등으로 많은 기계신호처리 방법에 응용되고 있고 또한 주파수 영역에서의 직접적이고 물리적 이해의 편이성등으로 인하여 광범위하게 사용되고 있으나, 일부 특수한 경우 즉 비정상 상태신호(nonstationary signal)의 경우에는 FFT 방법과 병행하여 신호의 분석에 도움이 되는 다른 유용한 방법에 대한 연구가 필요하다 하겠다. FFT는 주파수에 따른 에너지의 함량만을 정상상태 신호(stationary signal)의 가정하에 나타내기 때문에 비정상 상태 신호, 특히 시간에 따라 주파수가

\*한국과학기술원 기계공학과

\*\*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

변하는 신호의 해석에는 그 적용성에 엄밀한 의미에서 제한이 있다. 따라서 전술한 보완적 의미에서, 즉 비정상 상태 신호중 시간에 따라 변화하는 주파수 성분이 있는 신호의 경우 임의의 시간에 발생하는 신호의 대표적인 주파수 성분을 나타낼 수 있는 순간 진동수(instantaneous frequency)의 물리적 개념정립과 그 응용 가능성에 대한 연구가 필요하다고 하겠다.

순간 진동수를 구하는 방법은 크게 두 가지가 있는 것으로 알려져 있다. 이볼루션스펙트럼(evolutionary spectrum)과 같은 순간 스펙트럼(instantaneous spectrum)을 이용하여 방법<sup>(1,2)</sup>과 힐버트 변환(Hilbert transform)을 이용하는 방법<sup>(3,4)</sup>이 그것이다. 본 논문에서는 전산기 모의실험(computer simulation)을 통하여 전술한 방법들의 특성비교 검토를 시도하였다. 이 중 힐버트 변환을 이용하는 경우 잡음의 존재로 인한 순간 진동수에의 영향을 고찰하여 이에 대한 해결 방법으로 무빙 윈도우(moving window)이 적용과 순간진동수 히스토그램(instantaneous frequency histogram)의 도입을 시도하였다.

최종적으로 3가지 간단한 실험을 수행하여 실제 신호에의 순간진동수를 통한 해석의 적용 가능성을 살펴보았다. 가동중인 엔진의 가속도 신호, 보(beam)의 진동에 의한 가속도 신호, 그리고 자동차문의 닫힘에 의한 충돌로 인해 발생하는 차체의 가속도 신호에 대하여 순간 진동수를 이용한 해석을 시도하였다.

## 2. 기본 이론

힐버트 변환은 다음과 같이 정의되는 복소해석함수(complex analytic function)의 실수부분과 허수부분 사이의 관계를 나타내는 변환이다<sup>(5)</sup>.

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad (1)$$

여기서  $h(t)$ 와  $\bar{h}(t)$ 는 힐버트 변환쌍이라 불리우며, 각각 복소신호의 실수부분과 허수부분이 된다. 따라서 힐버트 변환을 통하여 주어진 실수신호(real signal)로부터 엔빌로프(envelope)와 위상(phase)등 유용한 정보를 포함하고 있는 복소신호(complex signal)를 구성할 수 있게 된다.

복소 신호는 크기와 위상으로 표현될 수 있는데, 각 진동수는 위상의 시간에 대한 미분이므로 역 탄

젠트 함수의 직접 미분을 통하여 다음과 같이 힐버트 변환 짝으로 순간 진동수를 표현할 수 있다.

$$f(t) = \frac{\dot{\bar{h}}(t)h(t) - \dot{h}(t)\bar{h}(t)}{2\pi|h^2(t) + \bar{h}^2(t)} \quad (2)$$

여기에서  $\dot{\bar{h}}(t)$ 와  $\dot{h}(t)$ 는 각각  $h(t)$ 와  $\bar{h}(t)$ 의 시간에 대한 미분을 나타낸다.

식 (1)로 주어진 힐버트 변환의 정의를 살펴볼 때 이는 컨볼루션의 형태를 가짐을 알 수 있고, 따라서 식 (1)의 주파수 영역에서의 다른 표현은

$$\bar{H}(\omega) = H(\omega) \cdot [-j \operatorname{sgn}(\omega)] \quad (3)$$

과 같다. 여기서  $\bar{H}(\omega)$ 와  $H(\omega)$ 는 각각  $\bar{h}(t)$ 와  $h(t)$ 의 푸리에 변환을,  $\operatorname{sgn}(\omega)$ 는 부호 함수(sign function)로  $\left[\frac{1}{\pi t}\right]$ 의 푸리에 변환을 나타낸다. 식 (3)으로부터 힐버트 변환 짝은 주파수 영역에서 시계방향으로의 90°의 위상변화로서 얻어진다는 것을 알 수 있다.

식 (2)를 이용하여 순간 진동수를 구함에 있어 미분의 과정이 수행되는데, 시간영역에서의 미분은 주파수 영역에서  $j\omega$ 를 곱하는 것을 의미하므로, 미분에 의하여 고주파 영역에서 잡음의 영향이 증폭되어 나타날 것임을 예측할 수 있다. 이와 같은 문제를 해결하기 위한 하나의 방법으로 순간 진동수의 계산 시 무빙 윈도우의 적용을 생각할 수 있다. 무빙 윈도우란 시간축을 따라 이동하는 작은 윈도우를 통하여 신호의 평균을 취하여 그 시간의 값으로 사용하는 것으로서, 순간 진동수의 계산에 있어서 잡음의 영향을 감소시킬 수 있을 것이다.

순간 진동수 측정에 있어서 무빙 윈도우의 역할을 관찰하기 위하여  $T_w$ 의 크기를 갖는 사각 윈도우 함수  $w(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_w} & -\frac{T_w}{2} \leq t \leq \frac{T_w}{2} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

이제 임의의 신호  $x(t)$ 에 크기  $T_w$ 로 무빙 윈도우를 적용한 신호  $x_w(t)$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_w(t) &= \frac{1}{T_w} \int_{t-\frac{T_w}{2}}^{t+\frac{T_w}{2}} x(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(t-\tau) d\tau = x(t) * w(t) \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)는 컨볼루션의 형태로 나타나며, 따라서 식 (5)의 양변에 푸리에 변환을 취하면,

$$X_w(f) = X(f) \cdot W(f) \quad (6)$$

와 같이 된다. 여기서  $X_w(f)$ ,  $X(f)$ 는 각각  $x_w(t)$ ,  $x(t)$ 의 푸리에 변환을,  $W(f)$ 는  $w(t)$ 의 푸리에 변환을 나타낸다. 식 (6)을 볼 때 무빙 윈도우의 적용이 원래 신호  $x(t)$ 의 주파수 성분에 미치는 영향은  $W(f)$ 의 형상에 의해 결정됨을 알 수 있다.  $W(f)$ 는 sinc 함수로 표현되며, 따라서 무빙 윈도우의 적용은 일종의 저대역 필터를 통과함을 의미하므로 고주파 영역에서 문제가 되는 잡음과 분산의 영향을 줄이는 역할을 할 수 있다. 본 논문에서는 구해진 순간 진동수에 무빙 윈도우의 적용을 시도하였다. 크기  $T_w$ 로 무빙 윈도우를 적용한 순간 진동수  $f_w(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$f_w(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T_w} \int_{t-T_w/2}^{t+T_w/2} \frac{h(\tau)\dot{\bar{h}}(\tau) - \dot{h}(\tau)\bar{h}(\tau)}{h^2(\tau) + \dot{h}^2(\tau)} dt \quad (7)$$

전술한 사각 윈도우의 적용외에 해닝 윈도우(Hanning window)의 적용을 생각할 수 있다. 사각 윈도우의 적용에 비하여 윈도우 함수의 중앙에서 가장 큰 가중치를 주는 해닝 윈도우의 적용은 임의의 시간에 원래의 순간 진동수 값을 보다 충실하게 표현할 수 있으므로 순간이라는 의미에 보다 더 부합된다고 말할 수 있다. 또한 해닝 윈도우의 적용은 윈도우의 양 끝에서의 값에 낮은 가중치를 주므로 윈도우의 이동에 따라 새로이 윈도우 안으로 유입되는 값들과 윈도우로부터 유출되는 값들의 차이가 사각 윈도우의 적용에 비하여 상대적으로 작을 것이다. 따라서 해닝 윈도우를 적용한 순간 진동수는 사각 윈도우를 적용한 순간 진동수에 비하여 더 작은 분산을 가지게 될 것이므로, 잡음의 영향으로 인한 분산을 줄이기 위해 도입한 무빙 윈도우의 목적에 보다 더 부합된다고 말할 수 있다.

만약 잡음의 크기가 신호의 크기에 비하여 어느정도 크다면 무빙 윈도우를 적용한 순간 진동수라도 신호의 정확한 주파수 성분을 나타내는데 한계를 가지게 된다. 따라서 전체시간 구간에 대하여 각 주파수 성분의 발생 횟수를 나타낸 도표, 즉 주파수 축에 대하여 그 주파수 성분의 발생 횟수를 나타낸 순간 진동수 히스토그램을 도입하고자 한다. 순간 진동수 히스토그램을 통하여 전체시간에 걸친 신호의 주된 주파수 성분을 알 수 있으므로, 잡음의 영향등으로 순간 진동수를 통한 해석이 제 역할을 못하는 상황에서 유용하게 쓰일 수 있을 것으로 생각된다.

순간 진동수를 구하는 또다른 방법으로 이블루서너리 스펙트럼을 이용하는 방법을 생각할 수 있다. Short-time periodogram으로 기술될 수 있는 이블루서너리 스펙트럼에 대하여 임의의 순간에 구해진 스펙트럼으로부터 주파수의 중심값을 구함으로써 순간 진동수를 계산할 할 수 있다.

비정상 상태신호의 해석에 있어서 의사 정상상태(quasi-stationary)의 가정하에 다음과 같이 시간에 종속적인 푸리에 변환을 생각하자.

$$X(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)w(u)e^{-j\lambda(t-u)} du \quad (8)$$

여기서  $x(t)$ 는 신호,  $w(t)$ 는 신호를 짧은 구간(segment)으로 잘라주는 윈도우를 나타내고  $t$ 와  $\lambda$ 는 각각 시간과 주파수를 나타낸다.  $X(t, \lambda)$ 로부터 이블루서너리 스펙트럼을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S(t, \lambda) = |X(t, \lambda)|^2 \quad (9)$$

이블루서너리 스펙트럼에 대하여 임의의 고정된 시간에 주파수 축을 따라 1차 모멘텀을 취한 값은 그 시간에서의 순간 진동수를 나타낸다. 즉,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \lambda S(t, \lambda) d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty} S(t, \lambda) d\lambda} \quad (10)$$

와 같이 순간 진동수를 표현할 수 있다.

### 3. 전산기 모의 실험

전산기 모의 실험을 통하여 순간 진동수가 가지는 의미를 파악하고, 순간 진동수를 구하는 두가지 방법들, 즉 힐버트 변환을 이용하는 방법과 이블루서너리 스펙트럼을 이용하는 방법의 특성을 파악하고 비교를 하고자 한다.

Fig. 1은 서로 다른 진폭과 주파수를 가지는 두 주기 함수가 결합된 신호에 대하여 힐버트 변환을 이용하여 구한 순간 진동수를 나타낸다. 먼저 이와 같은 신호의 수학적 해석을 위하여 다음과 같은 함수를 고려하자.

$$h(t) = A\sin\omega_1 t + B\sin\omega_2 t \quad (11)$$

식 (11)의 힐버트 변환 짝을 구하면 다음과 같다.

$$\bar{h}(t) = -A\cos\omega_1 t - B\cos\omega_2 t \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12), 그리고 그것들의 시간에 대한

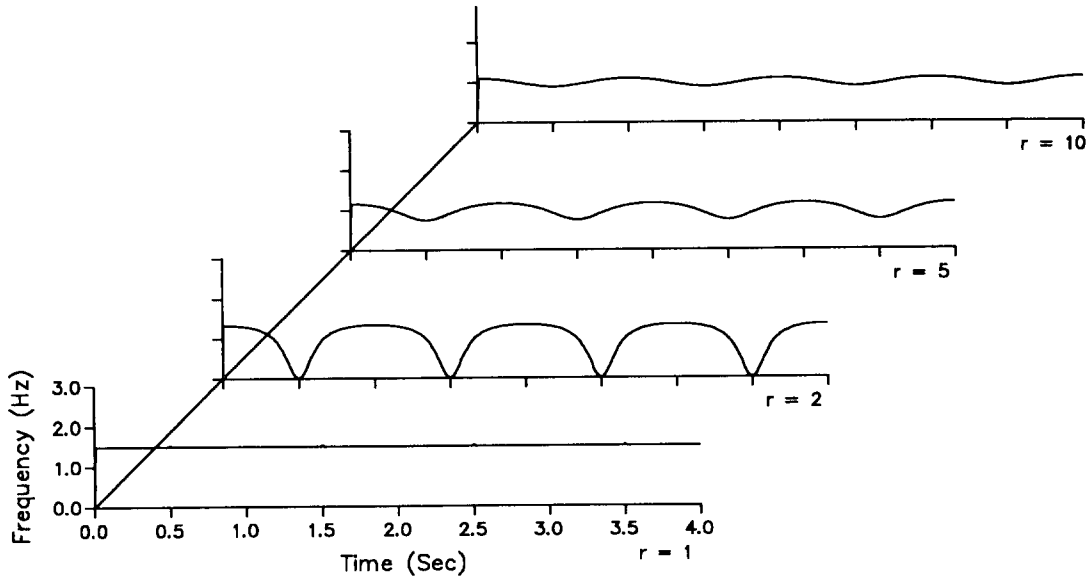


Fig. 1 Instantaneous frequency of two sine signals with different frequencies and amplitudes(using Hilbert transform)

미분을 식 (2)에 대입하여 순간 진동수를 다음과 같이 구한다.

$$f(t) = \frac{r^2\omega_1 + \omega_2 + r(\omega_1 + \omega_2)\cos(\omega_1 - \omega_2)t}{2\pi[r^2 + 1 + 2rcos(\omega_1 - \omega_2)t]} \quad (13)$$

여기서,  $r=A/B$ 이다. 식 (13)으로부터 순간 진동수는 결합된 두 신호의 차이에 해당하는 주파수로 변함을 알 수 있고, 또한 결합된 주기 함수의 진폭 중 어느 한쪽이 상대적으로 커지면 순간 진동수는 진폭이 큰 함수의 주파수를 따라감을 알 수 있다. Fig. 1에서 사용된 주기 함수의 주파수는 1Hz와 2 Hz이다. Fig. 1로부터 두 주기 함수의 진폭이 같을 경우 순간 진동수는 두 주파수의 평균값을 나타내며, 어느 한 쪽의 진폭이 커질 경우 순간 진동수는 진폭이 큰 함수의 주파수를 따라감을 알 수 있다. Fig. 2는 Fig. 1에서 사용된 신호와 유사한 신호에 대하여 이볼루션너리 스펙트럼을 이용하여 구한 순간 진동수를 나타낸다. 결합된 신호의 주파수는 각각 40Hz와 80Hz이다. 이와같은 신호에 대하여 이볼루션너리 스펙트럼을 이용하여 구한 순간 진동수는 힐버트 변환을 이용한 결과와는 달리, 결합된 두 주파수의 가중된 중간값을 일정하게 나타내고 있다. 신호가

$$x(t) = A\sin(80\pi t) + B\sin(160\pi t) \quad (14)$$

와 같이 주어졌을 때, 이볼루션너리 스펙트럼을 이용하여 구한 순간 진동수는  $x(t)$ 의 파워 스펙트럼의 1차 모우멘텀을 취한 값으로 다음과 같이 주어진다.

$$f(t) = \frac{40A^2 + 80B^2}{A^2 + B^2} = \frac{40r^2 + 80}{r^2 + 1} \quad (15)$$

여기서,  $r=A/B$ 를 나타낸다. Fig. 3의 A와 B는 주기 함수들이 결합된 신호에 대하여 각각 힐버트 변환과 이볼루션너리 스펙트럼을 이용하여 구한 순간 진동수의 전체구간에 대한 평균값을 진폭의 비인  $r$ 에 대하여 그려낸 그림이다. 힐버트 변환을 이용한 결과인 Fig. 3의 A를 볼 때 두 함수의 진폭중 어느 한 함수의 진폭이 다른 함수의 진폭에 비해 조금만 커져도 순간 진동수의 평균값은 진폭이 큰 함수의 주파수를 나타냄을 알 수 있다. 반면에 이볼루션너리 스펙트럼을 이용한 결과인 Fig. 3의 B를 볼 때 순간 진동수의 평균값을 결합된 주기 함수들의 주파수들의 가중된 중간값을 나타낸다. 그러나, 두 주기 함수중 어느 한쪽의 진폭이 커질 경우 진폭이 큰 함수의 주파수를 따라가는 점은 두 경우가 같은 경향을 나타내고 있다.

Fig. 4는 지수 함수적으로 감소하는 신호에 대하여

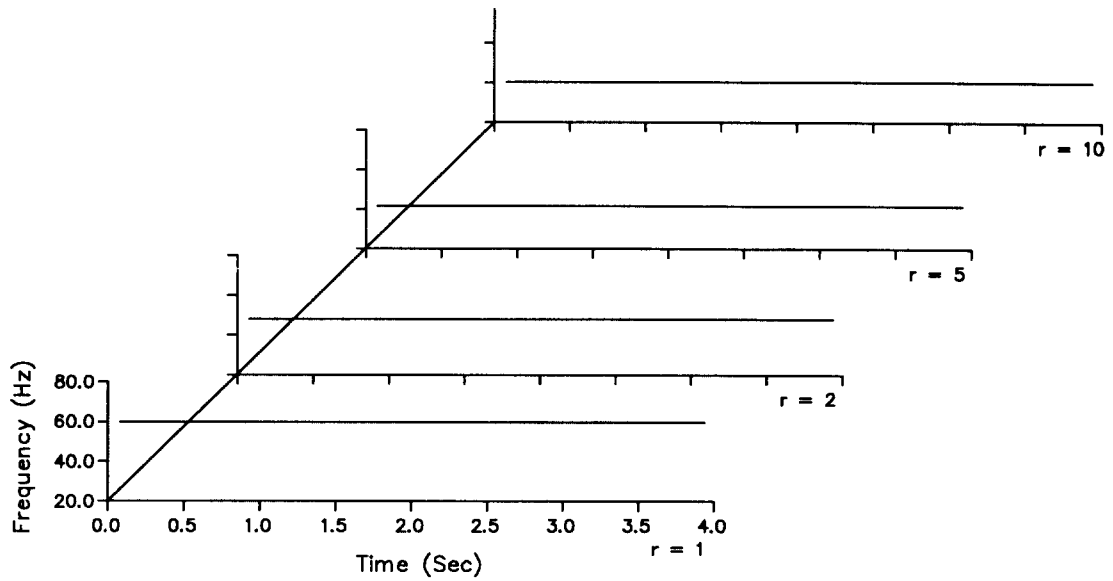


Fig. 2 Instantaneous frequency of two sine signals with different frequencies and amplitudes(using evolutionary spectrum)

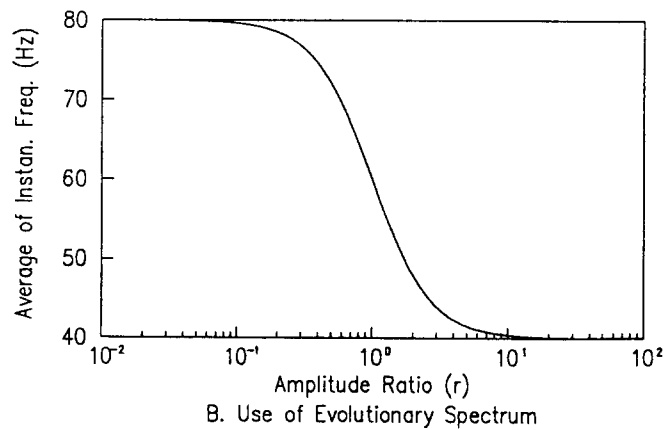
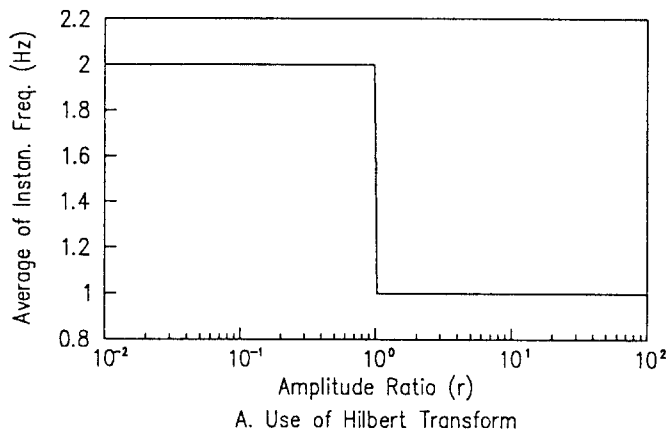


Fig. 3 Average value of instantaneous frequency of two sine signals with different frequencies and amplitudes

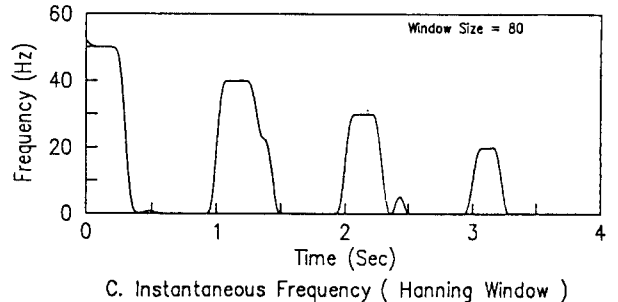
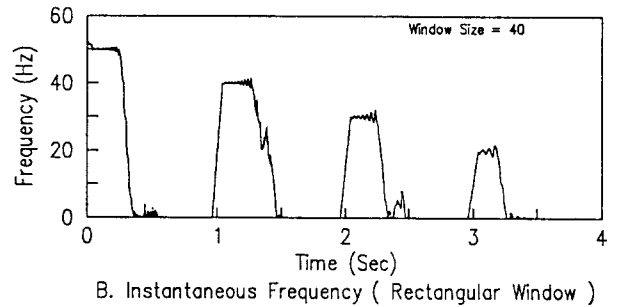
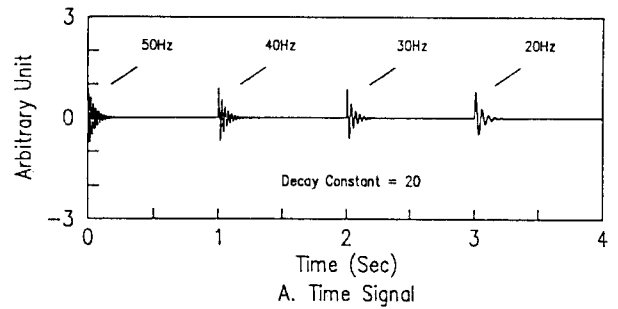


Fig. 4 Instantaneous frequency of exponentially decaying sine signals(using Hilbert transform)

힐버트 변환을 이용하여 구한 순간 진동수를 나타내고 있는데, Fig. 4의 A는 원래 신호를, B는 무빙 윈도우로 사각 윈도우를 적용한 순간 진동수를, 그리고 C는 해닝 윈도우를 적용한 순간 진동수를 나타낸다. 모든 경우에 있어 순간 진동수는 원래 신호의 주파수 성분을 잘 나타내고 있음을 알 수 있는데, 해닝 윈도우를 적용한 순간 진동수가 사각 윈도우를 적용한 순간 진동수에 비하여 더 작은 분산 오차를 보여 주고 있고, 따라서 전술한 바와 같이 해닝 윈도우의 적용이 사각 윈도우의 적용에 비하여 더 효과적이라는 결론을 얻을 수 있다. Fig. 5는 지수 함수적으로 감소하는 신호에 대하여 이블루셔너리 스펙트럼을 이용하여 구한 순간 진동수를 나타낸다. Fig. 5의 A는 원래 신호를, B와 C는 각각 구간을 나누는 윈도우로 사각 윈도우와 해닝 윈도우를 적용하여 구한 순간 진동수를 나타낸다. 이 경우에 있어

서도 순간 진동수는 원래 신호의 주파수 성분을 잘 나타내고 있는데, 힐버트 변환을 이용한 결과(Fig. 4)와는 달리 신호의 크기가 작을 때에도 신호의 정확한 주파수 성분을 표시하고 있다. 사각 윈도우를 적용한 결과인 B는 윈도우 함수로 인한 누수현상으로 발생한 떨림을 보여주고 있는데, 이는 해닝 윈도우의 적용(C)으로 해결할 수 있다.

Fig. 6은 진폭이 지수함수적으로 감소하는 주기 함수와 일정하게 유지되는 주기 함수가 중첩되어 있는 신호에 대한 힐버트 변환을 이용한 모의 실험 결과이다. 먼저 이러한 신호에 대한 힐버트 변환을 이용한 순간 진동수의 기본 이해를 위하여 수학적으로 해석 가능한 신호를 다음과 같이 가정한다.

$$h(t) = A \sin \omega_0 t + B e^{-\epsilon t} \sin \omega_1 t \quad (16)$$

여기에서  $A, B$ 는 진폭을  $\omega_0, \omega_1$ 는 주파수를, 그리고

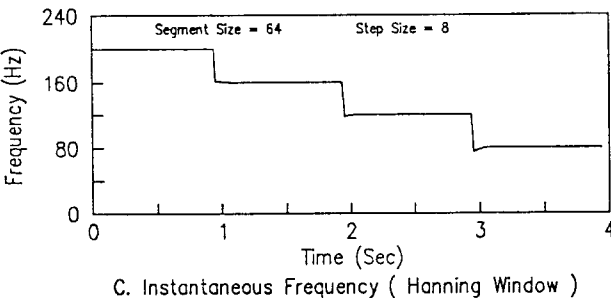
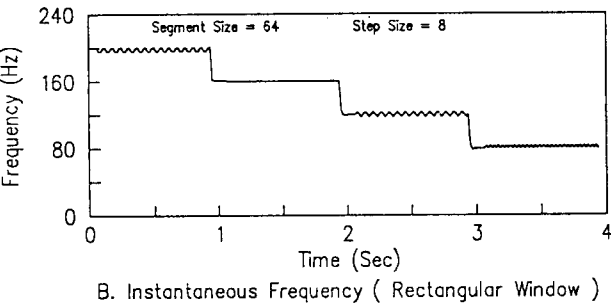
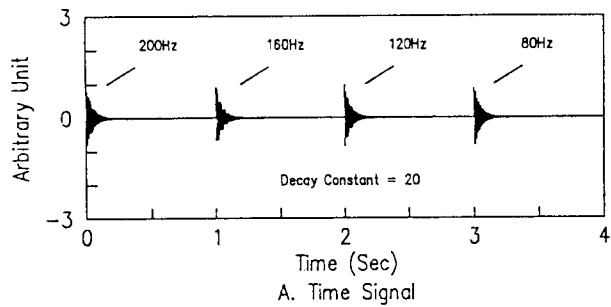


Fig. 5 Instantaneous frequency of exponentially decaying sine signals(using evolutionary spectrum)

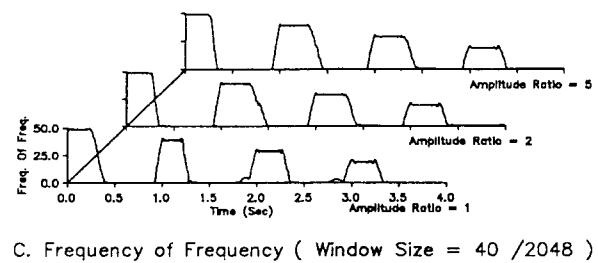
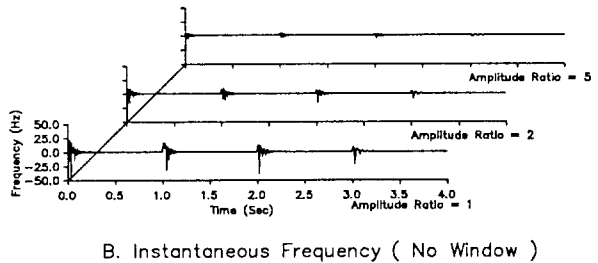
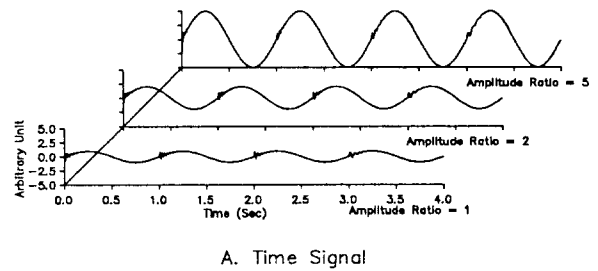


Fig. 6 Instantaneous frequency of exponentially decaying sine signals added on a sine signal with constant amplitude(using Hilbert transform)

$\xi$ 는 감쇄계수를 나타낸다. 식 (16)에서 만일  $\xi$ 가  $\omega_1$ 에 비하여 작다면, 다음과 같이  $h(t)$ 의 힐버트 변환 짝  $\bar{h}(t)$ 를 구할 수 있다.

$$\bar{h}(t) = -A \cos \omega_0 t - B e^{-\xi t} \cos \omega_1 t \quad (17)$$

식 (16)과 식 (17) 그리고 그것들의 시간에 대한 미분을 식 (2)에 대입하여 다음과 같이 순간 진동수를 구할 수 있다.

$$f(t) = \frac{r^2 \omega_0 + \omega_1 e^{-2\xi t} + r e^{-\xi t} \sqrt{(\omega_0 + \omega_1)^2 + \xi^2} \cos[(\omega_0 - \omega_1)t - \phi]}{2\pi[r^2 + e^{-2\xi t} + 2r e^{-\xi t} \cos(\omega_0 - \omega_1)t]} \quad (18)$$

여기서  $r = A/B$ 이고  $\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\xi}{\omega_0 + \omega_1}\right]$ 이다. 식 (18)에서 알 수 있듯이  $t$ 가 증가하면  $f(t) = \frac{\omega_0}{2\pi}$ 를 나타내고, 이것은  $t$ 가 증가하면 진폭이 지수함수적으로 감소하는 주기함수의 영향은 사라지고 진폭이 유지되는 주기 함수의 영향만 나타난다는 것을 의미한다. 그러나  $t$ 가 작을 때는 두 함수의 영향이 같이 나타나는데, 이 때의 순간 진동수는  $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 를 중심으로 하여 변화하는 형태로 나타난다. 이 때 변화하는 크기는  $r$ 과  $t$ 에 반비례하고, 주파수는  $\omega_0$ 와  $\omega_1$ 의 차이에 해당하게 된다. 그러나  $r$ 이 작을 때에 순간 진동수는  $\omega_1$ , 즉 지수함수적으로 감소하는 주기 함수의 주파수를 가르킨다 반면에 이와 같은 신호에 대하여 이블루서너리 스펙트럼을 이용하여 구한 순간 진동수는 결합된 두 신호의 주파수의 가중된 중간값을 나타낸다.

Fig. 6의 A는 원래 신호를, B는 순간 진동수를, 그리고 C는 순간 진동수의 순간 진동수를 나타낸다. 예측한 바와 같이 B는 떨림을 나타내고 있고, C는 그 떨림의 주파수가 결합된 두 신호의 주파수의 차이를 나타내고 있다.

Fig. 7은 힐버트 변환을 이용하여 구한 순간 진동수에 나타나는 잡음의 영향을 나타내고 있는데, Fig. 7의 A는 원래 신호를, B는 순간 진동수를, 그리고 C는 순간 진동수 히스토그램을 나타낸다. 이 모의 실험에서 NSR(noise to signal ratio)은 잡음의 RMS값과 신호의 초기값(=1.0)의 비로서 정의 되었다. NSR이 클 경우, 즉 잡음의 크기가 클 경우 순간 진동수는 신호의 주파수를 제대로 나타내지 못하고 있다. 그러나 순간 진동수 히스토그램을 통하여는 신호의 주된 주파수 성분들을 확인할 수 있었고, 따라서 잡음의 영향이 클 경우 순간 진동수 히스토

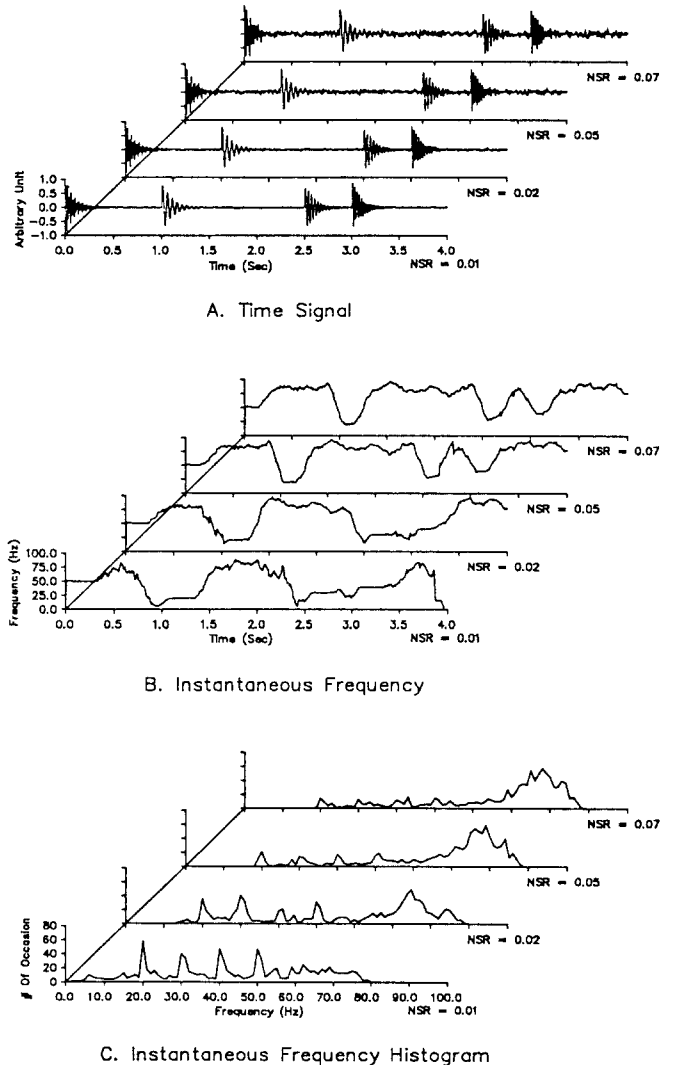


Fig. 7 Effect of noise on the estimation of instantaneous frequency(using Hilbert transform)

그램이 신호의 해석에 유용하게 쓰일 수 있으리라는 예측을 할 수 있다.

#### 4. 실험 결과

수학적 해석이나 컴퓨터 모의 실험에서 알려진 순간 진동수의 여러 성질을 확인하고 실제 신호에 그 적용 가능성을 타진해 보기 위하여 3가지 간단한 실험을 수행하고 그로부터 측정된 신호에 대하여 순간 진동수를 통한 해석을 시도하고자 한다.

##### 4.1 엔진 몸체로부터 측정된 진동 신호에의 적용

4행정 엔진의 경우 한 주기 안에 압축, 폭발, 배

기, 흡기의 4가지 과정을 거치게 된다. 각 과정을 거치는 동안 폭발, 밸브의 개폐, 그리고 피스톤 슬랩(piston slab) 현상등이 발생하게 되며, 이것들은 엔진의 진동에 중요한 원인들이 되고 있다고 알려져 있다.

이러한 현상들로 인해 발생하는 진동신호는 서로 다른 주파수 성분을 가지게 되며, 만일 각 현상들의 발생시간이 서로 분리되어 있다면 이러한 진동신호의 순간 진동수는 각 현상의 발생 시간에 각 현상의 주파수를 나타낼 것으로 가상할 수 있다. 따라서 역으로 각각의 현상으로 인해 발생하는 신호의 주된 주파수 성분을 안다면 순간 진동수를 통해 각 현상의 발생시간을 알 수 있을 것이고, 따라서 순간 진동수는 발생시간의 이상등 엔진의 이상진단에 이용될 수 있을 것이라 추측할 수 있다. 이와 같은 비교적 지나치게 단순화된 가상이 실제로 엔진 몸체에서 측정된 진동 신호에의 적용시 구체적으로 어떠한 제한성과 비논리성이 있는가를 살펴 보기로 한다.

실험시 상식적인 선에서 이상이 없는 정상상태의 엔진을 사용하였으며, 엔진의 회전 속도는 750RPM 이었다. 가속도계로부터 나온 신호를  $f_c=12.5\text{kHz}$ 의 저대역 필터를 통과 시킨 후, 20 kHz의 샘플링 주파수로 샘플링하였다.

측정된 가속도 신호에 대한 해석 결과가 Fig. 8에 나타나 있다. 스펙트럼상의 강한 피크(peak)가 발생하고 있는 4.5 kHz는 엔진 몸체의 공명 주파수이며, 또다른 피크가 발생하는 3kHz는 밸브계의 공명 주파수임이 알려져 있다<sup>(6)</sup>.

가속도 신호를 볼 때 압력 신호의 피크가 발생하는 시간에 가속도 신호에서도 역시 피크가 발생함을 보여주고 있는데, 이것은 폭발을 의미하며 이때의 순간 진동수는 4.5kHz를 나타내고 있다. 이것은 스펙트럼에서 보여주는 주된 주파수 성분이기도 하다. 따라서, 폭발에 의해 발생하는 주된 주파수 성분이 4.5kHz라는 것을 순간 진동수로부터도 알 수 있다.

가속도 신호에서 폭발에 의한 피크에 앞서 나타나는 피크는 배기 밸브의 닫힘에 의해 나타나는 현상이다<sup>(6)</sup>. 순간 진동수를 볼 때 이 시간의 순간 진동수는 밸브계의 공명 주파수인 3kHz가 아닌 엔진 몸체의 공명 주파수인 4.5kHz를 나타내고 있다. 이것은 엔진 몸체에서 측정된 가속도 신호는 어떠한 충격 가진에서도 엔진 몸체의 공명 주파수인 4.5kHz에서 가장 큰 파워를 가지기 때문이다. 순간 진동수에서 나타나는 이러한 현상은 4.5kHz에서만 강한 피크를 보여주고 있는 순간 진동수 히스토그램에서도 확인

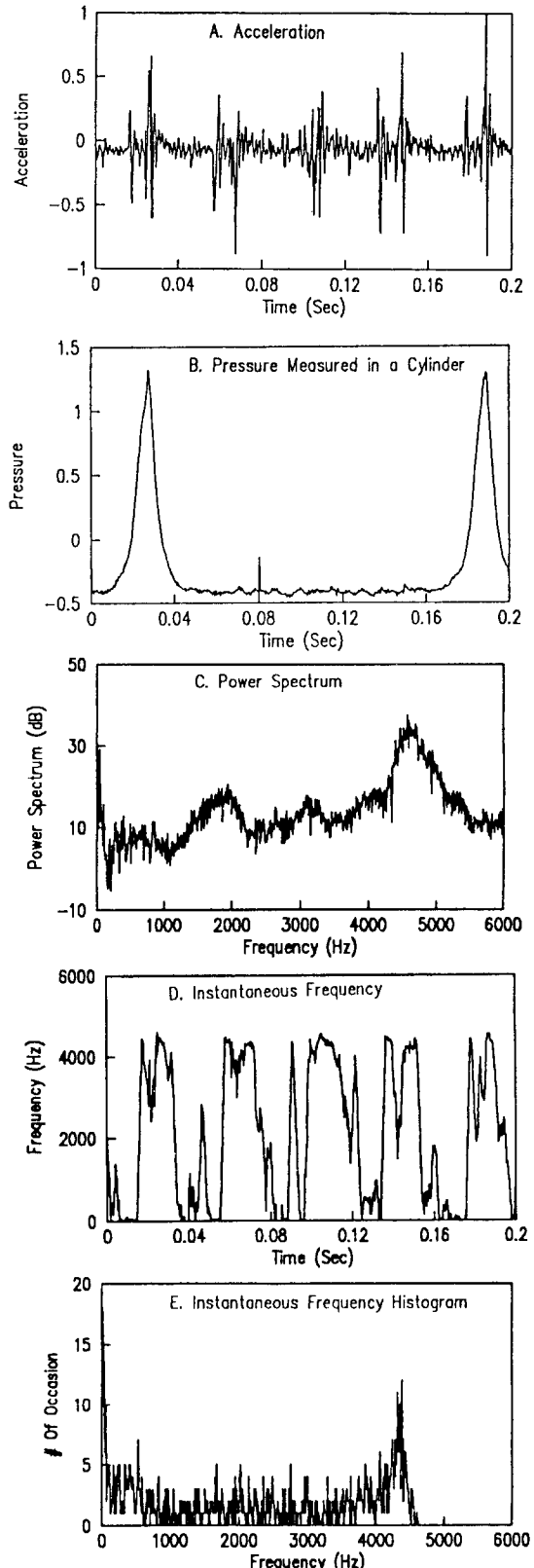


Fig. 8 Application of instantaneous frequency on the acceleration signal of engine block



된다.

이상에서 알 수 있듯이 순간 진동수에 의한 엔진 몸체의 가속도 신호의 해석은 기대와는 달리 각 행정들의 발생시간에 대한 정확한 정보를 주지는 않는다. 각 행정이 일어날 때 발생하는 신호의 주된 주파수 성분의 변화가 없이 항상 엔진 몸체의 공명 주파수가 신호의 주된 주파수 성분이 되기 때문이다. 따라서 순간 진동수에 의한 엔진의 이상 진단은 적용에 있어서 제한성이 있다 하겠다.

#### 4.2 보(Beam)의 진동 신호에의 적용

앞에서도 언급했듯이 진폭이 유지되는 주기 함수와 지수 함수적으로 감소하는 주기 함수가 결합된 신호는 많은 진동계에서 관찰할 수 있고, 따라서 이러한 신호의 해석은 진동계의 이해에 도움을 줄 것이라 생각된다. 이러한 신호의 순간 진동수는 진폭이 유지되는 주기 함수의 주파수를 중심으로 두 주기 함수의 주파수의 차에 해당하는 주파수로 떨리는 형태로 나타난다는 것을 보았는데, 단순히 수학적 공식이나 모의 실험뿐만 아니라 실제의 진동계에서 측정된 신호에 대하여 순간 진동수의 적용성을 타진해 보기 위하여 간단한 보를 이용한 실험을 수행하였다.

실험 장치는 Fig. 9에 나타나 있다. 외팔보라는 진동계에 가진기에 의한 주기함수의 입력과 추의 충돌에 의한 충격의 입력이 더해져 들어온다면, 측정된 응답은 진폭이 유지되는 주기 함수와 지수 함수적으

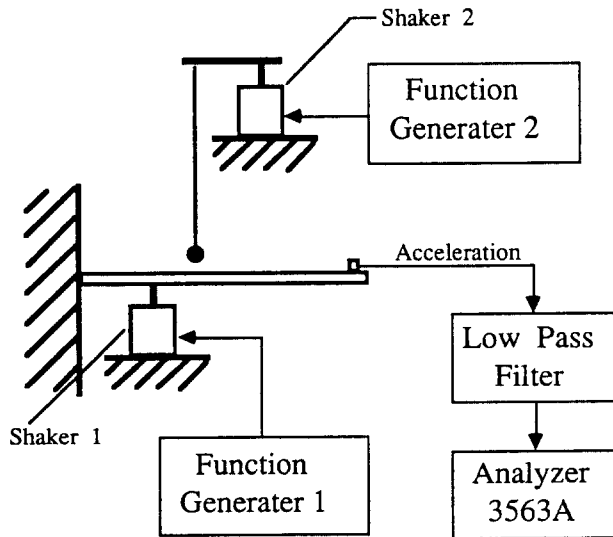


Fig. 9 Experimental set-up of beam system

로 감소하는 주기 함수가 결합된 형태가 될 것이다.

Fig. 10은 보와 가속도계 그리고 가진기로 이루어져 있는 전체계의 주파수 응답 함수를 나타낸 것이다. 주파수 응답 함수로부터 계의 공명 주파수는 97.5Hz, 885.425Hz, 3675.0Hz임을 알 수 있고 따라서 추의 충돌에 의하여 이러한 주파수 성분을 가지는 지수 함수적으로 감소하는 신호가 발생하게 될 것이다. 물론 계의 고차모드로 인한 고주파 성분 역시 발생할 것이지만, 관심 영역을 3번째 모드까지 제한하여 신호의 샘플링전  $f_s=4.5\text{kHz}$ 의 저대역 필터를 통과하였다.

Fig. 11은 가진기의 가진 주파수를 50Hz로 하였을 때의 실험결과이다. Fig. 11의 A는 신호를, B는 순간 진동수를, 그리고 C는 순간 진동수의 순간 진동수를 나타낸다. 순간 진동수를 볼 때 가진 주파수인 50Hz를 중심으로 oscillation하는 형태로 나타나며, 이것은 이론적인 예측과도 일치하는 것이다. Oscillation의 주파수를 살펴보기 위하여 순간 진동수의 순간 진동수를 다시 구하였다. 이론은 가진되

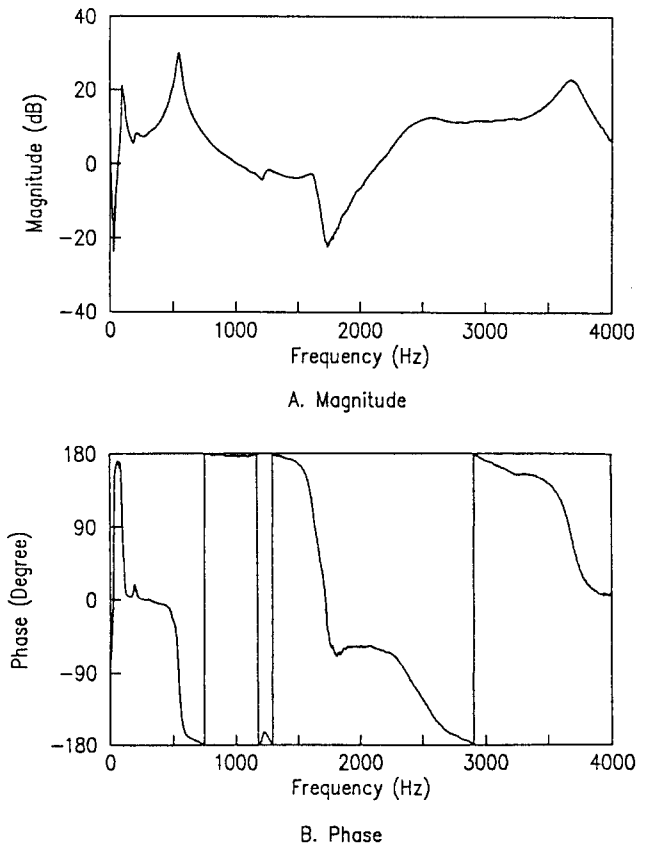


Fig. 10 Frequency response function of a beam system

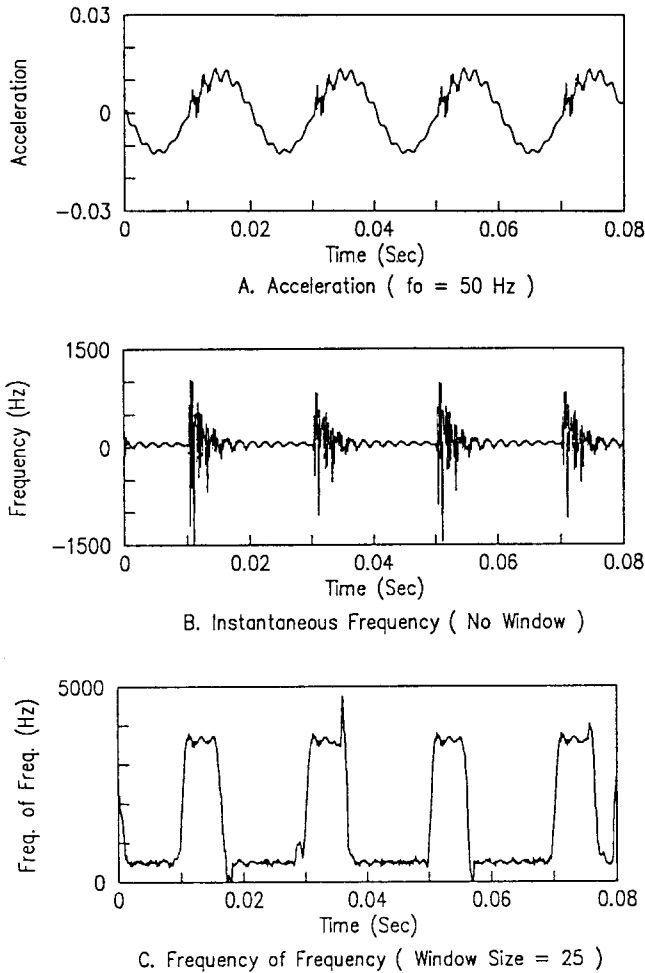


Fig. 11 Acceleration signal of beam system and its instantaneous frequency

는 주파수인 50Hz와 계의 공명 주파수인 542.5Hz, 3675.0Hz의 차이인 492.5Hz, 3625.0Hz의 주파수로 Oscillation함을 예측하며, 결과는 이론과 잘 부합된다고 할 수 있다. 그러나 계의 첫번째 공명 주파수인 95Hz에 의한 영향은 나타나지 않고 있는데 이것은 95Hz 성분에 존재하는 파워가 작기 때문이라 생각된다.

힐버트 변환을 이용한 순간 진동수의 계산시 나타나는 한 특이한 성질을 확인하기 위한 이 실험을 통하여 다음과 같은 응용 가능성을 추측할 수 있다.

(1) 주기 함수로 가진되는 계에 충격이 가해질 때, 비록 충격의 크기가 작아 신호에는 충격의 영향이 잘 나타나지 않을 경우에도 순간 진동수에는 그 영향이 확대되어 나타난다. 따라서 이러한 경우에 순간 진동수를 통해 정확한 충격 발생시간을 알 수

있다.

(2) 충격에 의해 발생하는 신호의 주파수는 계의 공명 주파수가 되므로, 만일 주기 신호의 가진 주파수를 알 경우 순간 진동수의 순간 진동수를 통해 계의 공명 주파수를 추측할 수 있다.

그러나, 위에 언급한 현상들은 충격에 의한 신호의 크기가 주기 신호의 크기에 비해 작을 경우에만 일어날 수 있다. 따라서 충격의 영향이 상당히 큰, 예를 들어 엔진의 폭발에 의한 가속도 신호등에는 그 적용성에 제한을 받는다.

### 4.3 자동차 문의 충돌 실험

자동차 문이 닫힐 때 발생하는 충돌에 의해 야기되는 진동 신호는 비정상 상태 신호로서 시간에 따른 주파수의 변이를 가지게 될 것이라 생각된다. 따라서 순간 진동수를 이용한 해석을 통해 진동신호의 주파수 변이를 살펴보고자 본 실험을 수행하였다.

Fig. 12는 실험 결과를 나타낸다. Fig. 12의 A에 표시한 가속도 신호를 볼 때 두번의 대표적인 충돌이 발생하였다는 것을 알 수 있고, C에 나타난 순간 진동수는 각 충돌에 의해 발생한 신호의 주파수 성분이 다르다는 것을 말해준다. 첫번째 충돌이 발생한 후의 순간 진동수는 500Hz보다 조금 낮게 나타나고, 두번째 충돌이 발생한 후의 순간 진동수는 200~300Hz임을 알 수 있는데, 이런 주파수 성분들은 C의 스펙트럼에서도 확인이 된다. 문에 의한 충돌을 고려해 볼 때 첫번째 충돌은 문의 고리가 부딪히는 것으로 금속성의 물질의 충돌로 인해 고주파 성분을 유발할 것이며, 두번째 충돌은 문 전체가 부딪히는 것으로 고무패킹 등의 영향으로 상대적으로 저주파 성분을 유발할 것이라는 것을 유추할 수 있다.

이 경우 순간 진동수는 가속도 신호의 시간에 따른 주파수 변화에 대한 정보를 제공해 준다. 실험결과에서 보면 대략 4번의 주파수 변이가 발생함을 알 수 있는데, 고주파 성분은 상대적으로 빨리 감소되어 사라지고 시간이 경과할수록 저주파 성분이 강하게 나타남을 확인할 수 있다. 이는 역시 순간 진동수 히스토그램으로부터도 확인되는데, 물론 신호의 다른 주된 주파수 성분들에서도 피크를 나타내고 있지만, 저주파 성분인 120Hz에서 강한 피크를 나타냄을 알 수 있다.

이상의 고찰에서 알 수 있듯이 어떤 특정한 시간의 주파수를 알기 위해 짧은 구간을 잘라 스펙트럼을 구하는 작업에 비해 순간 진동수에 의한 해석은

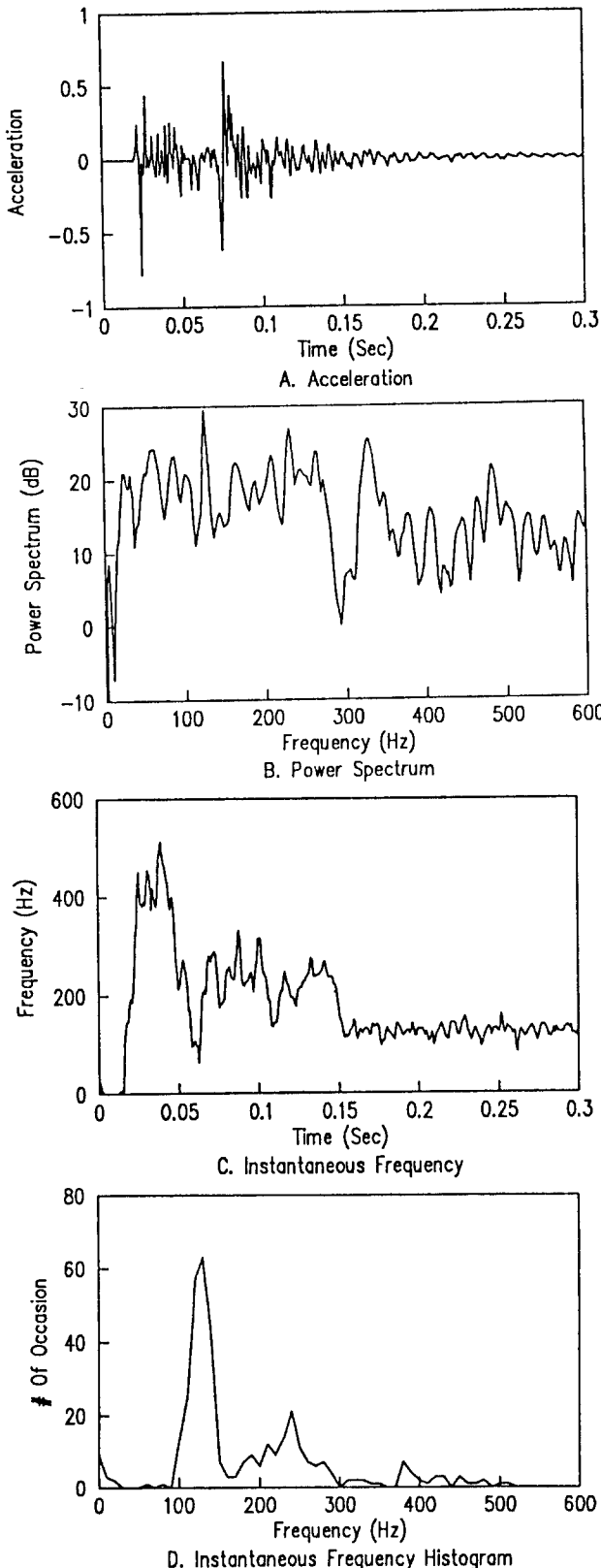


Fig. 12 Application of instantaneous frequency on the acceleration signal of car door

한번의 계산으로 전 시간대에 걸쳐 각 시간의 주된 주파수 성분을 구할 수 있으므로 보다 효율적인 방법이라 할 수 있다. 또한 보편적으로 사용되는 진동/소음 신호 처리 방법과 병행하여 사용할 경우 보완적인 그리고 또다른 관점의 신호 표현을 관찰할 수 있는 면에서 큰 의미가 있다 하겠다.

### 5. 결론 및 토의

힐버트 변환과 이볼루션러리 스펙트럼을 이용하여 순간 진동수를 구하는 방법에 대한 해석을 하였고, 여러가지 신호에 대하여 컴퓨터 모의 실험을 수행하여 순간 진동수가 가지는 특성을 파악하고 순간 진동수의 계산시 나타나는 문제점을 해결하기 위한 방법을 제시하였다. 최종적으로 실험을 통하여 순간 진동수를 통한 해석의 적용 가능성을 검토하였다.

힐버트 변환을 이용하여 순간 진동수를 구하는 경우 미분으로 인하여 고주파영역에서 잡음의 영향이 증폭되어 나타나는 등, 매우 민감하게 반응한다는 문제점이 있는데, 이의 해결을 위하여 무빙 윈도우를 적용하였다. 무빙 윈도우는 잡음의 영향 감소와 계산상의 오차로 인해 발생하는 분산의 감소에 효과적인 역할을 할 수 있었다. 또한 순간 진동수 히스토그램은 순간 진동수를 통한 해석을 보완하여, 신호의 전체적인 특성을 이해하는데 큰 도움을 주었다.

진폭이 유지되는 주기 함수와 지수 함수적으로 감소하는 주기 함수가 결합되어 있는 신호의 순간 진동수는 추정 방법 자체의 특성으로 인한 신호 떨림 현상을 보여 주는데, 보에 대한 실험에서도 알 수 있듯이 이러한 현상은 충돌 발생 시간과 충돌에 의해 발생하는 신호의 주파수 성분, 즉 계의 공명 주파수에 대한 유용한 정보를 제공해 준다.

순간 진동수의 응용이 가장 효과적인 경우는 시간에 따라 주파수의 변화가 있는 신호에 대한 해석이 될 것이다. 이러한 신호에 대하여 원하는 시간에 신호의 주된 주파수 성분을 알아야할 때 순간 진동수를 통한 해석은 매우 유용하게 쓰일 수 있다.

### 후 기

본 연구의 근본적인 동기를 제공하였던 한국표준과학연구원의 김정태 박사와 자동차 실험을 제안하여준 영남대학교 임병덕 박사에게 깊은 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Jong-Sic Lee, 1989, "Time-varying Filter Modelling and Time-Frequency Characterisation of Non-Stationary Sound Fields due to a Moving Source," Ph. D. Thesis, ISVR, Southampton Univ.
- (2) L. J. Griffiths, 1975, "Rapid Measurement of Digital Instantaneous Frequency," IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. Assp-23, No. 2.
- (3) Yang-Hann Kim, Jeung T. Kim, and Hyun Lee, 1990, "The Use of Instantaneous Frequency for the Vibration Signal Analysis," Inter Noise '90, pp. 993~996, Gothenbrg, Sweden.
- (4) 임병덕, 김정태, 1992, "순간 주파수 분석 기법의 응용에 관한 연구," 한국소음진동공학회 '92 춘계학술대회논문집.
- (5) J. S. Bendat and A. G. Piersol, 1986, "Random Data: Analysis and Measurement Procedure," John Wiley & Sons Inc., pp. 484~519.
- (6) 석정호, 1992, "엔진 블럭의 진동신호를 이용한 밸브 간극 진단," 한국과학기술원 석사학위논문.