한국소음진동공학회지 제 3 권 제 2 호, pp. 169~178, 1993.

〈論 文〉

유한요소법을 이용한 도관 내부 및 외부 음장해석

An Analysis of Internal & External Duct Acoustic Fields by Using a Finite Element Method

이 재 규* · 이 덕 주**
Jae-Gue Lee and Duck-Joo Lee

ABSTRACT

Internal & Exteranal duct acoustic fields are calculated by using a finite element method. The geometry is assumed as an axisymmetric duct. External acoustic field ; outside the duct, and combined internal & external acoustic fields are solved. For both cases a far field's nonreflecting boundary condition is enforced by using a wave envelope element, which is a kind of finite element. First, a pulsating sphere and an oscillating sphere problem are calculated to verify the external problems, and the results are compared with exact solutions. When the wave envelope element is applied at the far boundary, the calculated finite element solutions show good agreements with the exact solutions. Secondly, the combined internal & external duct acoustic fields are calculated and visualized when monopole sources are distributed inside the duct. It is observed that the directivity of sound intensity outside the duct is beaming toward the axis for high frequency sources.

기 호 설 명

$\overset{N}{\underset{e=1}{A}}$: 요소 어셈블기호
C_o : 음속
f : 주파수, $f=\frac{\omega}{2\pi}$
f_i^e : 내부 음장의 힘 벡터
$\tilde{f}_i^e$: 파동인벨롭요소의 힘 벡터
f_i^G : 글로발(Global) 힘 벡터
I : 음향강도(단위 부피당 에너지 플럭스), $I=<P\cdot\vec{V}^*>$
ka : 무차원 파동수
k : 파동수, $k=\frac{\omega}{C_o}=\frac{2\pi}{\lambda}$
K_{ij}^e : 내부 음향장의 요소강성행렬
$\tilde{K}_{ij}^e$: 파동인벨롭요소의 요소강성행렬
K_{ij}^G : 글로발강성행렬
M : 마하수
m : θ방향의 모드
$N(R,\theta)$ or $\Psi_i(r,z)$: 형상함수
P : 음압
$S.P.L$: 음압 레벨(S.P.L.)$=20\log(P/P_{ref})$
P_{ref} : 기준압력 $P_{ref}=2\times10^{-5}(\mathrm{N/m^2})$
$\vec{U}$: 외부의 평균유속
w_i : 가중함수
ρ_o : 기준밀도
ϕ : 속도 포텐셜
ω : 각속도 (rad/sec)
$\underset{\sim}{\Psi}(R,\theta)$: 파동인벨롭 요소의 형상함수

*한국과학기술원 항공우주공학과(현 삼성항공)
**정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

1. 서 론

소음의 발생 원인을 살펴보면 크게 공기역학적 측면과 구조역학적 측면으로 나누어 진다. 공기역학적 측면인 경우 비정상 유동장에서 파생되는 미소변동량들이 음원(monopole, dipole, quadrupole)을 형성하여 구조물에 영향을 줌으로써 구조물 내부에 소음의 원인을 제공할 수 있으며, 구조적 측면을 고려해 보면 구조물 자체의 진동에 의한 음원 형성에 의해서 생성된 파동이 외부 유동장에 영향을 미칠 수 있다. 실제로는 유동장에서 발생되는 음원과 구조물에서 발생되는 진동과의 상호 간섭에 의해 보다 복잡한 형태의 소음발생 원인이 된다. 따라서 음장 문제를 크게 두가지의 범주로 구분해 보면 다음과 같다.

첫째는 회전체와 같은 음원이 존재하는 경우에 음의 전파를 관측하는 방사문제(radiation)가 있고 둘째는 음원과 구조물과의 상호교란에 의한 산란문제(scattering)가 있다.

실제로 산업용 터어빈이나 비행기 엔진 흡입구에서 발생되는 소음, 또는 자동차의 배기구를 통해 발생되는 소음 그리고 엔진의 진동에 의한 구조적 소음, 기타 가전제품의 회전체(fan & motor)에 의한 소음은 방사 및 산란의 복합적 중요 과제이다[1~6].

지금까지 수행되어온 연구내용을 보면 주로 간단한 형상에 대한 내부 음향장 해석과 FEM을 이용한 duct내부의 음원의 전파 또는 외부 음향장의 far-field방사 문제가 수행되었다[7~9]. 그러나 본 연구에 방향은 음향의 내부, 외부 그리고 내부음원에 의한 구조산란에 의한 외부방사의 동시 해석을 목적으로 한다.

수치적 기법으로 근래에 많이 사용하는 방법으로 BEM(경계요소법), FEM(유한요소법), FDM(유한차분법)이 있는데 본 논문에서는 유한요소법을 이용하기로 한다. 지금까지는 주로 BEM을 통해서 far-field의 음향장을 해석하였는데 보편적인 방법으로써 좋은 결과를 얻었지만 복잡한 형상을 갖는 구조물의 내부 음향장 변화나 구조물 내부에 음원이 존재하는 경우 매질의 성질이 복잡한 경우 가장 잘 대응해 나갈 수 있는 수치적 기법은 유한요소법이라고 여겨진다.

수치 계산 과정에서 BEM의 문제점인 해의 비유일성(Non-Uniqueness)문제와 수치적으로 singular한 커널이 특이점에서 무한대의 값을 갖는 특이성 문제는 FEM의 적분방정식 구성시 나타나지 않으며 또한 외부의 아음속($M<1$)평균흐름이 존재하는 경우 외부와 내부 음장해석이 모두 가능하다는 잇점이 있다. 즉 near field의 해석은 닫혀진 공간(자동차, 비행기의 실내) 이나 관측자가 음원에 근접해 있는 경우의 음향장 예측을 통해 소음제어를 위한 방법을 제공하는데 필수적이며 far-field의 해석은 임의의 거리에 떨어진 곳에서의 음의 방향성 및 세기를 알아내는데 필요하다.

FEM(유한요소법)의 보편적인 단점으로 기억용량을 크게 차지한다는 일면이 있지만 점차 컴퓨터의 용량이 증가함에 따라 극복가능하며 또한 far-field해석시 무한 경계면에서 문제시되는 경계조건의 한계성이 존재하지만 극복하기 위한 방안으로써 무한요소를 도입한다[10~12]. 일반적으로 구조문제나 또는 음향장 문제에서 발생될수 있는 반무한평면의 경계면에서의 경계조건 즉 음향장에서의 Sommerfeld condition을 수학적 타당성에 맞추어 기존의 유한요소와 접목함으로써 무한경계에서 갖는 오차를 상쇄시킬 수 있다.

본 논문에서는 먼저 기본적인 유한요소를 이용한 Robin경계조건을 사용하여 계산한 후에 무한요소를 사용한 경우의 결과와 비교해 보기로 한다.

본 논문에서는 기하학적으로 축대칭인 3차원 duct 내부에 fan이나 propeller와 같은 회전체에 의한 음원전파에 따른 near-field와 far-field에서 음의 방향성(directivity)을 계산하기 위한 기초단계로 구의 표면에 점음원이 존재하는 경우와 쌍극음원이 존재하는 경우, 엄밀해와 무한 요소를 이용하여 계산된 수치해와의 비교를 통해 유한요소법을 이용한 외부 음향장 해석의 타당성을 검증하고, 내부 및 외부 음향장의 전체 해석을 위한 문제로써 duct내부에 점음원이 존재하는 경우, ka변화에 따른 near-field와 far-field에서의 음향장 변화를 예측하기로 한다. 계산되는 결과로는 음향장 내의 압력, 속도장의 계산 및 원하는 부위에서의 음압(SPL)계산이 가능하며 위치변화에 따른 음의 방향성과 음의 세기에 대한 정보를 얻는다.

2. 이론적 배경

2.1 지배방정식의 기본적 이론과 가정

외부의 아음속 평균 흐름(subsonic mean flow)을 갖는 파동방정식의 기본가정은 다음과 같다. 파동방

정식은 압축성 흐름과 비점성, 비정상 유동이라는 전제하에 유도된 full potential방정식에서 출발하여 외부흐름이나 음원의 가진에 의한 미소변화량의 발생에 따른 음향학적 물리량을 파생시킨다. 여기서 파생된 물리량들은 속도 포텐셜 ϕ와 속도 $\vec{V}$, 압력 P가 되며 유동의 지배방정식인 연속방정식과 운동량방정식, 그리고 에너지방정식에 대입하여 상대적으로 크기가 작은 미소량들을 제외하면 다음과 같은 선형 파동방정식과 속도 $\vec{V}$, 압력 P를 얻는다.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+2\vec{U}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\vec{U}\cdot\nabla(\nabla\phi\vec{U})=C_o^2\nabla^2\phi \tag{1}$$

$$\underset{\sim}{\vec{V}}=\nabla\tilde{\phi} \tag{2}$$

$$p=-\rho_o\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{V}_o\cdot\nabla\phi\right) \tag{3}$$

지배방정식 (1)에서 보듯이 우선 고려해야 할 첫 번째 사항은 비정상 유동을 야기하는 시간에 관한 항의 처리이다.

Fourier정리에 의해 모든 선형계는 주기함수들의 합으로 표현을 할 수 있으므로 시간에 관한 항도 마찬가지로 표현하기로 한다.

$$\phi(\vec{x},\ t)=\varphi(\vec{x})\cdot e^{-i\omega t}$$

둘째로, 본 논문에서 고려하는 좌표계는 원통좌표계 $(r,\ \theta,\ z)$를 사용하였다.

이유는 기하학적으로 3차원 형상이 축대칭(axisymmetric)인 경우의 문제와 2차원 평면인 경우의 문제를 적용하는데 있어서 θ방향으로는 물리량들을 주기함수의 합으로서 나타낼 수 있기 때문에 실제로는 2차원의 좌표계 $(r,\ z)$로서 계산 영역을 표현하게 된다.

$$\phi(r,\ \theta,\ z,\ t)=\phi'(r,\ z)\cdot e^{-i(\omega t-m\theta)} \tag{4}$$

두가지의 조건을 고려해보면 속도 포텐셜 ϕ와 압력, 속도는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\nabla^2\phi-M^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+2i\omega M\frac{\partial\phi}{\partial z}+\left(\omega^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\phi=0 \tag{5}$$

$$p=i\omega\phi-M\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{6}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{p}{Z_n}=\frac{i\omega\phi}{Z_n}-\frac{M}{Z_n}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{7}$$

$$Z_n=\frac{p}{\vec{v}\cdot\vec{n}} \qquad Z_n:\text{ Acoustic Impedance}$$

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$$

$(r,\ \theta,\ z)$ 좌표계의 Laplacian (8)

2차원 평면문제를 해석하는 경우 θ에 대한 고려를 무시하며 이 경우 m을 0으로 고정할 수 있고 축대칭인 문제를 해석하는 경우에는 m의 조건에 따라 여러가지 현상을 예측할 수 있는데 만약 m이 0보다 크면 θ방향의 물리적 성질 뿐만 아니라 r, z방향 성분 모두가 나타나는 고차 mode가 되며 이경우 보통 spinning mode또는 angular mode라고 한다. 이 밖에 음원(source)이나 body force에 해당하는 항들도 모두 조화함수(harmonic)로 나타냄으로서 문제를 단순화 시키도록 한다.

이와 같은 조건에 의해 각 mode에 따라 구해진 ϕ를 합하게 되면 음향장내의 실제 현상을 구현할 수 있게 된다. 즉 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi(r,\ \theta,\ z,\ t)=\sum_{m=0}^{\infty}\phi'(r,\ z)\cdot e^{-i(\omega t-m\theta)} \tag{9}$$

2.2 무차원 지배방정식

지배방정식 (5), (6), (7)을 무차원화 시키기 위한 매개변수들을 정의하면 다음과 같다.

$$\tilde{x}=\frac{x}{D}\quad \tilde{r}=\frac{r}{D}\quad \tilde{\phi}=\frac{\phi'}{C_oD}$$

$$M=\frac{U}{C_o}\quad \tilde{\omega}=\frac{\omega}{\left(\frac{C_o}{D}\right)}\quad \tilde{Z}_n=\frac{Z_n}{\rho_oC_o}$$

$$\nabla^2\tilde{\phi}-M^2\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial\tilde{z}^2}+2i\tilde{\omega}M\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{z}}+\left(\tilde{\omega}^2-\frac{m^2}{\tilde{r}^2}\right)\tilde{\phi}=0$$

$$\tilde{P}=i\tilde{\omega}\tilde{\phi}-M\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{x}}\qquad \underset{\sim}{\tilde{V}}=\nabla\tilde{\phi}$$

여기서

D=Reference Length(radius of height)

C_o=Speed of Sound(const)

ρ_o=Reference density

3. 유한요소법을 이용한 내부 음향장 수식 이산화 과정

구조 및 유체 해석에서 가장 보편적으로 사용되는 유한요소방법으로 Galerkin방법이 있는데 본 논문에서도 이 방식을 이용하여 수식의 이산화를 수행하고자 한다.

3.1 적분방정식의 형성

Galerkin방법에 가장 큰 특징은 형상함수와 가중함수를 같은 형태의 Legendre-polynomial을 사용함

에 있다.

먼저 residual을 구해 보면 다음과 같다.

$$R=\nabla^2\phi-M^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+2i\omega M\frac{\partial\phi}{\partial z}+\left(\omega^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\phi$$
$$w=\Psi_i(r,\ z) \qquad (10)$$

수학적으로 residual자체의 적분은 0이 되지만 요소를 유한하게 나누는 과정에서 실제로는 0이 되지 않을 수 있기 때문에 가중함수 W_i를 곱하여 적분을 취함으로서 강제적으로 0이 되게 한다.

$$\int_v R\cdot W_i dV=0$$
$$\int_v\left[\nabla^2\phi-M^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+2i\omega M\frac{\partial\phi}{\partial z}+\left(\omega^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\phi\right]\Psi_i dV=0$$

여기서 $\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ (11)

3.2 Weak Formulation과정

Green-Gauss theorem을 적용하여 공간에 대해 두번 미분된 적분항들을 weak-formulation시키면 한번 미분가능하고 square integrable한 항들을 얻게 된다.

정리하여 나타내면 다음과 같다.

$$\Psi_i^e\nabla^2\phi^e=\nabla\cdot(\Psi_i^e\nabla\phi^e)-\nabla\Psi_i^e\cdot\nabla\phi^e \qquad (12)$$

3.3 Element Matrix 구성

포텐셜 ϕ를 형상함수의 interpolation의 선형조합으로 나타내어 적분방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$\phi^e=\sum_{j=1}^{N}\phi_j\cdot\Psi_j^e(r,\ z) \qquad (13)$$

보다 간단한 형태로 나타내기 위하여 요소강성행렬 K_{ij}^e와 힘 벡터 f_i^e를 구성하면 다음과 같다.

$$K_{ij}^e=-2\pi\int_v^e\left[(1-M^2)\frac{\partial\Psi_i^e}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Psi_j^e}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_i^e}{\partial r}\cdot\frac{\partial\Psi_j^e}{\partial r}-2i\omega M\Psi_i^e\cdot\frac{\partial\Psi_j^e}{\partial z}-\left(\omega^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\cdot\Psi_i^e\cdot\Psi_j^e\right]rdrd\theta \qquad (14.\ a)$$

$$f_i^e=-2\pi\int_s(1-M^2)\,\overline{\Psi}_i^e\cdot\frac{\partial\phi^e}{\partial z}\cdot\cos(n,\ z)\,rdr-2\pi\int_s\overline{\Psi}_i^e\cdot\frac{\partial\phi^e}{\partial r}\cdot\cos(n,\ r)\,rdz \qquad (14.\ b)$$

3.4 경계조건

음향학 문제에서 경계조건은 essential $B.\ C$나 Neumann $B.\ C$의 형태로 ϕ나 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$을 직접 사용할수도 있지만 실제 내부와 외부음장의 해석시 구조물의 성질에 따른 투과율의 변화나 far-field경계에서의 non-reflecting조건을 고려할 때는 일반적으로 Robin $B.\ C$가 적용된다.

즉 impedance를 매개로 속도와 압력의 관계식을 이용하면 식(7)이 되며 경계면에서 적용하게되면 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$와 ϕ의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{i\frac{\omega}{Z_n}\phi}{1-\frac{M}{Z_n}}$$

Z_n : 경계에 수직인 Impedance성분 (15)

구조물이 강체라면 $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$이 되며 투과의 성질을 갖는 매질인 경우 Z_n을 조절해 주면 경계면에서 ϕ와 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$을 구할 수 있게 된다.

외부 음장의 해석시에는 far-field조건으로 평면파의 조건인 $Z_n=\rho_oC_o$를 이용하였지만 거리에 따라 오차의 크기가 증가함을 알 수 있다.

4. 무한요소(Infinite Element)의 도입

무한요소에 의한 해의 정확도 향상 방안은 다음과 같다. FEM의 일반적인 문제점중의 하나인 무한경계면을 갖는 경계조건 문제해석시 발생될 수 있는 해의 정확도 상실에 있어서 만약 일반적으로 물리량의 행동특성을 무한 경계면에서 점근적(asymptotic)인 방법으로 알 수 있다면 유한경계면의 node점과 가상의 무한경계면의 node점과의 관계를 이용하여 새로운 형태의 형상함수를 구성할 수 있으며 이러한 무한요소는 기존의 유한요소에서 사용하는 standard Legendre-polynomial type의 형상함수를 확장하는 형태를 취한다[10,11].

본 논문에서는 무한요소의 새로운 모델로써 wave envelope element를 도입하기로 한다[12]. 특징은 초기에 사용된 무한요소의 수치적분시 무한경계의 적분계산에 이용되던 Gauss-Laguare방법이 아닌 일반적으로 FEM에서 사용되는 Gauss-Legendre방법을 이용함으로써 수치적분시 소요되는 계산시간을 효율적으로 줄여 쓸 수 있는 장점을 갖는다.

Far-field의 음향장 문제해석시에 2차원 파동의 전파는 거리 r에 따라 amplitude가 $1/r^{0.5}$로, 3차원 구

면파인 경우는 $1/r$의 크기로 감소하며 주기함수의 형태를 취한다. 실제 무한경계면에서의 해는 Sommerfeld condition에 의해 단지 입사파만 존재하며 반사파는 존재치 않으므로 wave envelope element를 사용하게 되면 무한경계에서의 물리량을 0으로 만들수 있다. Wave envelope element의 형상함수는 다음과 같다.

$2D$인 경우 $\underset{\sim}{\Psi}(R,\theta)=N(R,\theta)\cdot\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot e^{-i\omega R}$ (16a)

$3D$인 경우 $\underset{\sim}{\Psi}(R,\theta)=N(R,\theta)\cdot\frac{1}{R}\cdot e^{-i\omega R}$ (16b)

여기서,

$N(R,\theta)$: standard FEM형상함수를 가리킨다.

$\underset{\sim}{\Psi}(R,\theta)$: wave envelope element형상함수를 가리킨다.

4.1 무한요소를 이용한 외부음향장 수식 이산화 과정

Jean-Pierre가 제안한 wave envelope element의 형상함수와 가중함수는 다음과 같이 정의한다.

형상함수 : $\underset{\sim j}{\Psi}=N_j(R,\theta)\cdot\frac{1}{R}\cdot e^{-i\omega(R-R_j)}$ (17a)

가중함수 : $w_i=N_i(R,\theta)\cdot\frac{1}{R}\cdot e^{i\omega(R-R_i)}$ (17b)

외부음향장의 특성상 좌표축은 기존의 원통 좌표계에서 구 좌표계로 변환하여 계산하는 것이 편리하므로 (r,θ,z)와 (R,θ,φ)와의 변환관계가 필요하며 형상함수와 가중함수는 (R,θ,φ)의 좌표계를 기준으로 구성하였다. 외부음장 영역의 요소강성행렬과 힘 벡터는 내부음장에서 해석된 절차와 같이 3.1, 3.2, 3.3에 의해서 구해진다.

4.2 내부 및 외부음향장의 결합과정

내부 음향장의 요소강성행렬과 힘 벡터는 다음과 같다.

$$K_{ij}^e=-2\pi\int_v^e\left[(1-M^2)\frac{\partial\Psi_i^e}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Psi_j^e}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_i^e}{\partial r}\cdot\frac{\partial\Psi_j^e}{\partial r}-2i\omega M\Psi_i^e\cdot\frac{\partial\Psi_j^e}{\partial z}-\left(\omega^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\cdot\Psi_i^e\cdot\Psi_j^e\right]rdrd\theta \quad (18.\ a)$$

$$f_i^e=-2\pi\int_s(1-M^2)\,\bar{\Psi}_i^e\cdot\frac{\partial\phi^e}{\partial z}\cdot\cos(n,z)\,rdr-2\pi\int_s\bar{\Psi}_i^e\cdot\frac{\partial\phi^e}{\partial r}\cdot\cos(n,r)\,rdz \quad (18.\ b)$$

외부음향장의 요소강성행렬과 힘 벡터는 다음과 같다.

$$\tilde{K}_{ij}^e=-2\pi\int_{v'}\left[(1-M^2)\frac{\partial w_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Psi^e}{\underset{\sim j}{\partial z}}+\frac{\partial w_i^e}{\partial r}\cdot\frac{\partial\Psi^e}{\underset{\sim j}{\partial r}}-2i\omega Mw_i\cdot\frac{\partial\Psi^e}{\underset{\sim j}{\partial z}}-\left(\omega^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\right]rdrd\theta \quad (19.\ a)$$

$$\tilde{f}_i^e=-2\pi\int_s w_i\cdot\frac{\partial\phi}{\partial R}Rds$$

여기서, s' : C_∞에서의 경계면 (19. b)

내부 및 외부 음향장에서 구성된 요소행렬을 전체영역에서 어셈블하면 다음과 같은 글로발 강성행렬과 글로발 힘 벡터를 구할 수 있다.

$$K_{ij}^G=\overset{N}{\underset{e=1}{A}}[\tilde{K}_{ij}^e+\tilde{K}_{ij}]\quad f_i^G=\overset{N}{\underset{e=1}{A}}[f_i^e+\tilde{f}_i^e]$$

$\overset{N}{\underset{e=1}{A}}$: 요소의 어셈블기호

5. 결과 및 고찰

5.1 전체적으로 맥동하는 구(Monopole Source)의 외부음향장 해석

구전체가 맥동하는 경우의 수치해를 구해 봄으로써 외부음향장 해석에 있어서 기존의 Robin경계조건에 의해 계산된 standard FEM방식과 무한요소의 일종인 wave envelope element를 도입하여 계산한 결과를 실제 엄밀해와 비교하여 wave envelope element도입의 타당성 및 효용성을 검증하기로 한다. 경계조건과 엄밀해는 다음과 같다.

경계조건 : $R_i=1.0$ $0\le\varphi\le\pi$인 경우

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=U_oe^{i\omega t} \quad (21)$$

$$P=\frac{-ika\left(\frac{a}{r}\right)}{(1+ika)}\cdot e^{-ik(r-a)}$$

a : Sphere Radius

$ka=2$인 경우 Fig. 1에서와 같이 Robin B. C가 주어진 standard FEM과 wave envelope element를 이용했을때 일정한 거리($R=4.95$)에서 계산된 절대 압력을 엄밀해와 비교해 보면 wave envelope element가 더 좋은 결과를 얻음을 알 수 있다. 이것은 거리 $R=5$까지의 standard FEM에 의한 계산영역에서 파생되는 reflection wave의 파급영향이 nonreflecting 조건을 만족시키지 못하지만 wave envelope element를 도입함으로써 wave envelope영역의 계산결

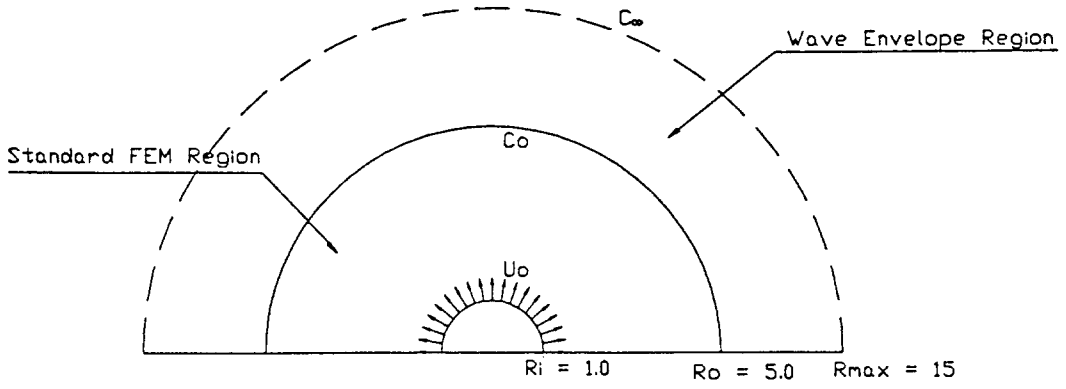

Fig. 1 Total pulsating sphere의 경계조건

과에 의해 오차가 소멸되어 보다 엄밀해에 근접한 결과를 나타냄을 알 수 있다. 참고로 Fig. 2에서 ka =2인 경우에 경계요소법(BEM)과 비교한 결과를 보면 경계 요소법의 결과에 보다 근접한 결과를 가져옴을 확인 할 수 있다.

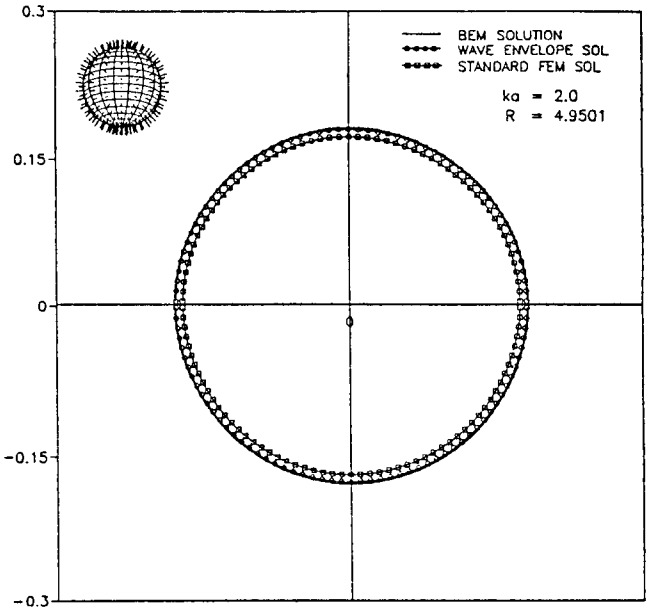

Fig. 2 맥동하는 구의 수채해와 엄밀해의 결과 비교

이와 같이 본 수치실험의 결과를 통해서 wave envelope element를 도입하여 계산된 결과치들이 엄밀해와 비교해 보았을 때 타당한 결과를 얻음을 알 수 있다.

5.2 Oscillating Sphere(Dipole Source)에 대한 외부 음향장 해석

Dipole source의 대표적인 문제로 Fig. 3과 같은 oscillating sphere의 엄밀해와 유한요소법에 의해 계산된 해를 비교해 봄으로써 도입된 wave envelope element의 수치검증을 수행해 보기로 한다. 먼저 구 표면의 경계조건과 엄밀해를 구해 보면 다음과 같다.

$$\text{경계조건} : U_r = U_o \cdot \cos\theta \cdot e^{i\omega t} \quad \text{on } r = r_s$$

$$\text{엄밀해 } p' = -\rho_o \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho_o \frac{\mu \cos\theta}{4\pi} \cdot i\omega \cdot \left[\frac{1}{r^2} + i \cdot \frac{\omega}{a_o r}\right] \cdot e^{i\omega(t-\frac{r}{a_o})} \qquad (22)$$

여기서, $\mu = \dfrac{4\pi U_o r_s^3 \cdot e^{ikr_s}}{2(1+ikr_s)-(kr_s)^2}$

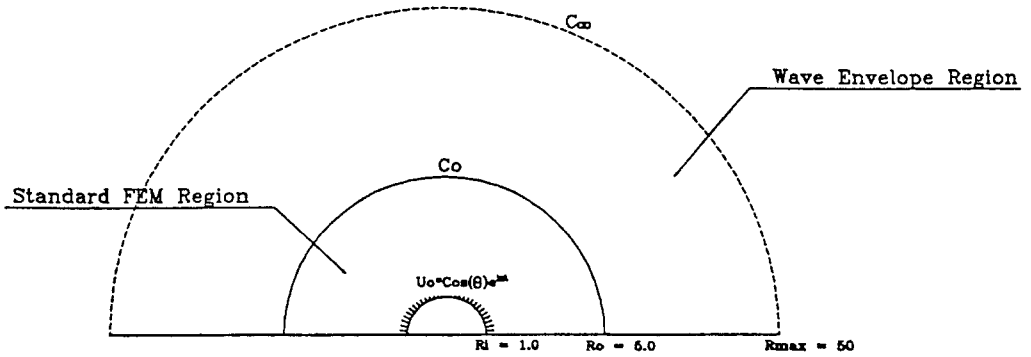

Fig. 3 Oscillating sphere의 경계조건

$ka=2$이고 거리가 $R=4.9315$인 지점에서 방향에 대한 절대압력을 계산해 보면 Fig. 4에서와 같이 엄밀해와 잘 일치함을 알 수 있다.

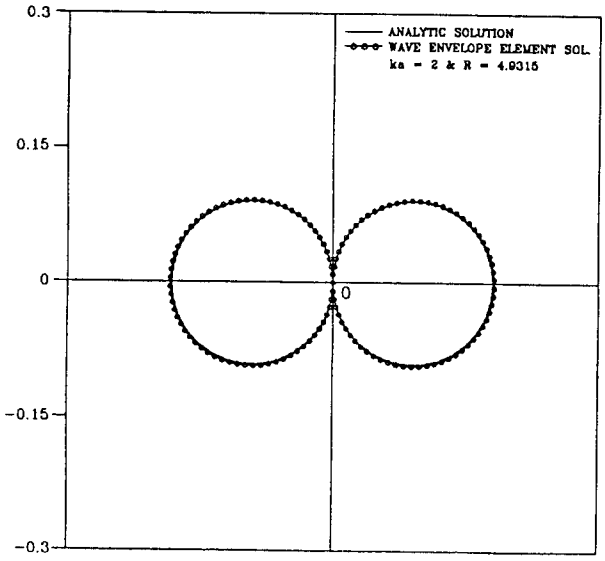

Fig. 4 Oscillating sphere에 대한 절대압력의 엄밀해와의 비교

실제 Fig. 5에서는 ka가 1에서 8까지 높은 주파수 영역대에서 거리 R의 증가에 따라 나타난 절대압력과 거리와의 관계를 살펴보면 ka가 6인 경우, 거리 R이 1부터 5까지의 계산 범위내에서는 엄밀해와 거의 일치함을 알 수 있다. ka가 8인 경우에 계산된 결과를 보면 거리가 점차 증가함에 따라 oscillating하며 진폭이 증가해 가는 경향을 나타냄을 알 수 있다. 이와 같은 경향은 모든 수치적 기법에서 나타나는 현상과 같이 고주파수 영역에서는 element의 크기에 민감하게 영향을 받기 때문이다. 본 논문에서는 element의 크기와 주파수와의 상호관계는 고려하지 않기로 한다.

5.3 Duct내부에 점음원이 존재하는 경우 내부 및 외부 음향장 해석

Fig. 6과 같이 duct내부에 점음원이 $z=-1$의 왼쪽 벽 전체에 존재하는 경우, 내부 및 외부 음향장을 동시에 해석해 보면 다음과 같다. 절대음압의 크기

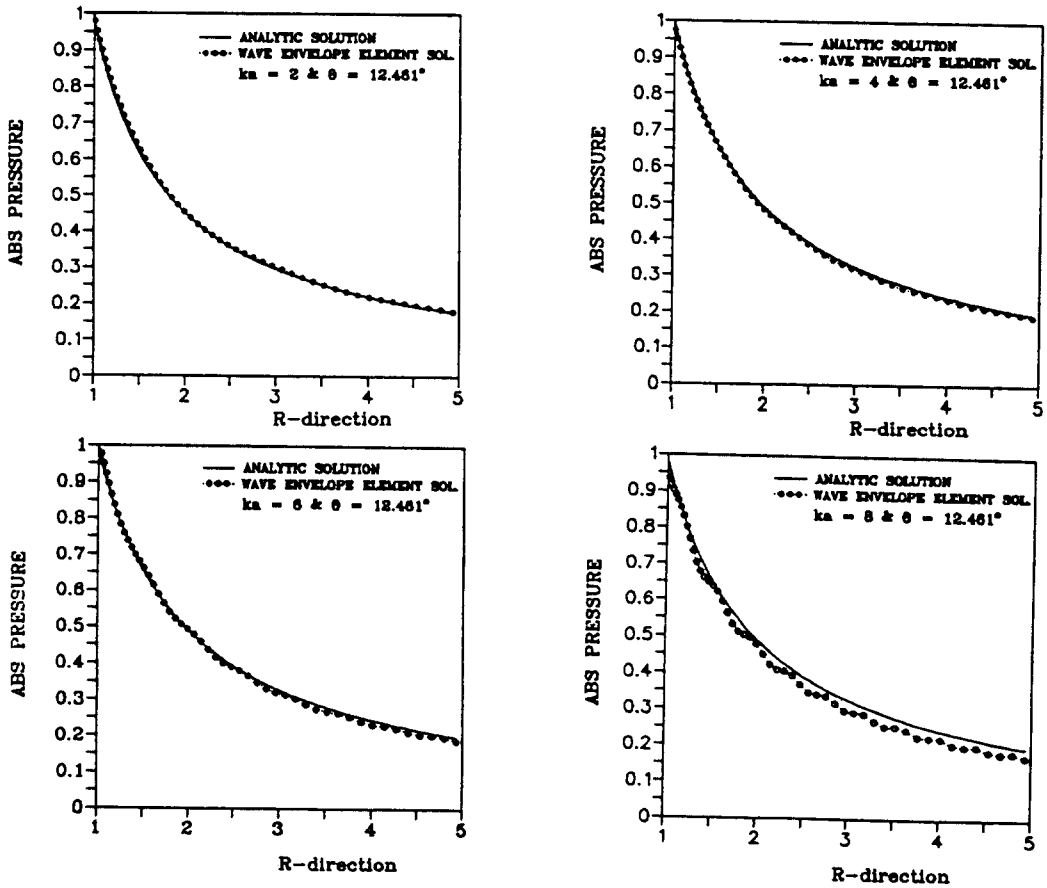

Fig. 5 거리 R과 ka변화에 따른 엄밀해와의 비교

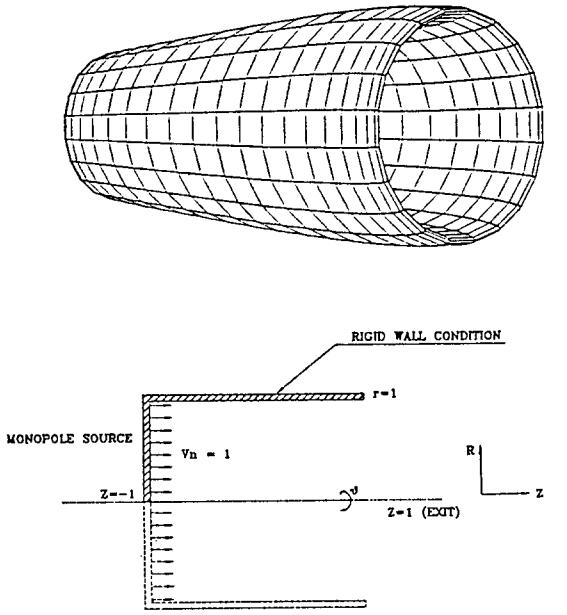

Fig. 6a 점음원이 존재하는 도관내부 및 외부의 전체 격자 구성

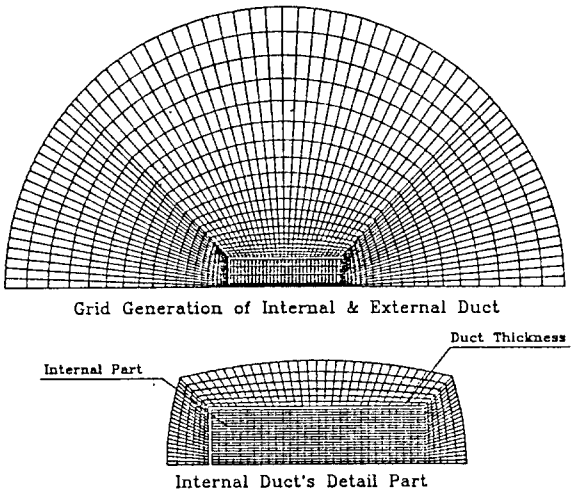

Fig. 6b 벽전체가 점음원인 경우($z=-1$)의 모델 및 개략도

와 방향은 거리 $R=4.90$에서 계산하였으며 보다 이해하기 쉽게 하기 위해서 intensity vector plot을 통해 가시화하기로 한다. Fig. 7은 *ka*증가에 따른 intensity vector의 경향성을 나타내며, Fig. 8은 *ka*가 6인 경우의 duct내부와 외부에 대한 intensity vector plot을 나타낸 결과이다.

Fig. 9의 결과를 통해 duct의 출구부분에서는 *ka*의 증가에 따라 intensity의 크기와 방향이 $\theta=0$의 축방

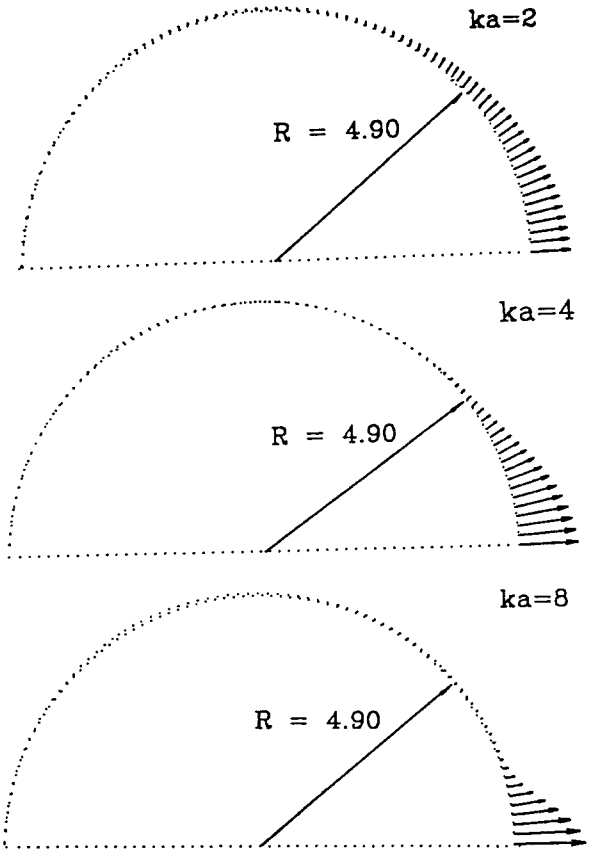

Fig. 7 *ka*의 증가에 따른 intensity vector plot의 경향성 비교

향으로 모이는 현상을 알 수 있었고 또한 절대음압의 방향성을 살펴보면 θ방향의 폭은 줄어들면서 크기는 점차 축방향으로 증가함을 알 수 있었다.

6. 결 론

(1) Wave envelope element를 도입한 외부 음향장 해석시 수치적 정확도의 검증을 위해서 pulsating sphere (monopole source) 문제와 oscillating sphere (dipole source)의 문제를 거리와 *ka*의 증가에 따라 계산된 결과와 엄밀해와의 비교를 통해 *ka*가 6까지 3%의 오차 범위내에서 잘 일치함을 확인 할 수 있었다.

(2) Duct내부에 점음원이 존재하는 경우, *ka*의 증가에 따라 duct내부와 외부에서 절대압력과 intensity의 크기 및 방향성을 가시적으로 나타내었으며 *ka*가 증가함에 따라 절대음압의 θ방향은 폭은 점차 줄어들며 크기는 출구부분에서 가장 크게 나타남을 알 수 있었다.

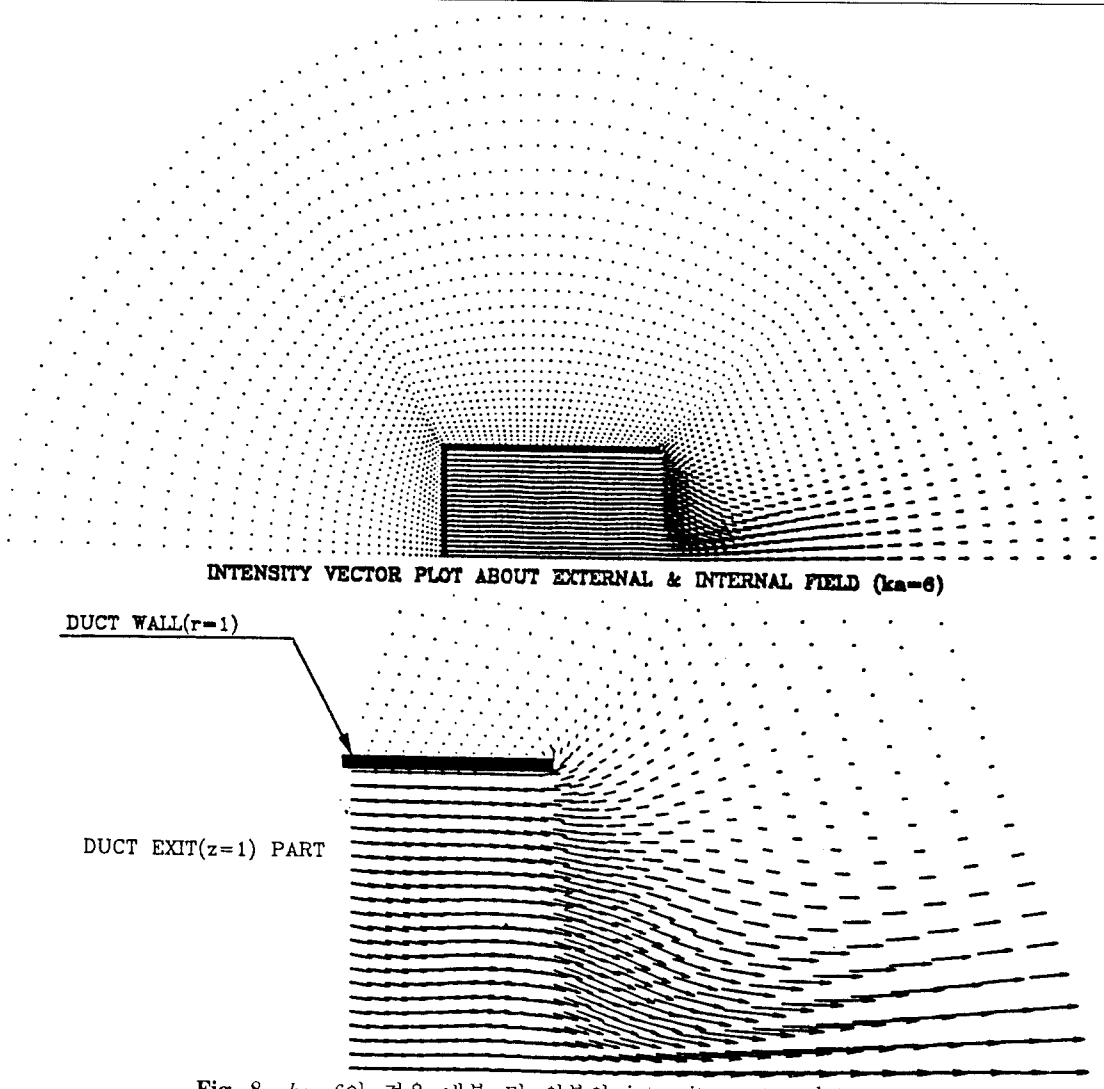

Fig. 8 ka=6인 경우 내부 및 외부의 intensity vector plot

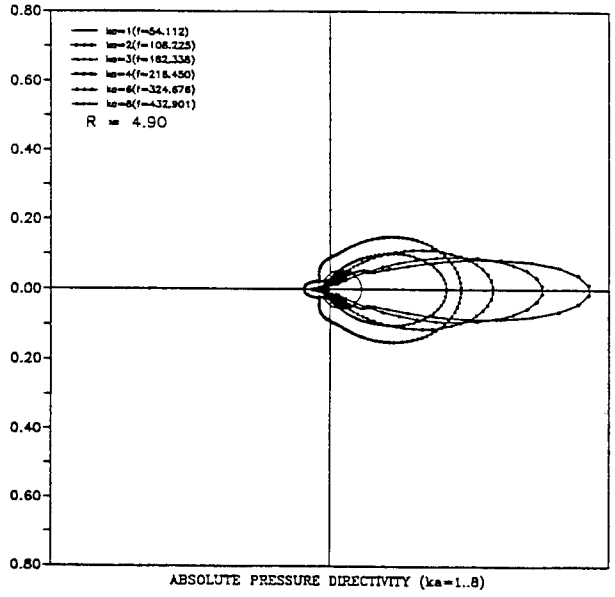

Fig. 9 ka의 증가에 따른 절대압력의 방향성 비교

후 기

이 논문을 수정해준 한국과학기술원 항공우주공학과 공력음향학실험실의 이강덕, 전완호에게 감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Tyler, J. M. and Sofrin, T. G., 1962, "Axial Flow Compressor Noise Studies", Society of Automotive Engineers Transactions 70, pp. 309~332.

(2) R. K. Sigman, R. K. Majjigi, and B. T. Zinn, 1978, "Determination of Turbofan Inlet Acoustics

Using Finite Elements", AIAA, Vol. 16, No. 11, pp. 1139~1145.

(3) Eversman, W., Parrett, A. V., 1985, "Contributions to the Finite Solution of the Fan Noise Radiation Problem", ASME Transactions Vol. 107, pp. 216~223.

(4) Astley, R. J. and Eversman, W., "Finite Element Formulations for Acoustical Radiation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 88, No. 1, pp. 47~64.

(5) W. Eversman and J. E. Steck, 1986, "Finite Element Modeling of Acoustic Singularities with Application to Propeller Noise", 1990, J. Aircraft Vol. 23, No. 4, pp. 275~282.

(6) W. Eversman, "Analytical Study of Wind Tunnel Acoustic Testing of Propellers", J. Aircraft, Vol. 27, No. 10, pp. 851~858.

(7) Astley, R. J. and Eversman, W., 1981, "Acoustic Transmission in Nonuniform Ducts with Mean Flow, Part II : The Finite Element Method" Journal of Sound and Vibration, Vol. 74, No. 1, pp. 103~121.

(8) C. Golia, F. S Caramuzzino, "F. E. M. Analysis of Acoustic Propagation in Duct Compressible Flows", DGLR/AIAA 92-02-056, pp. 356~360.

(9) Walter Eversman, 1977, "Radiated Noise of Ducted Fans", DGLR/AIAA 92-02-139, pp. 836~845.

(10) P. Bettess, "Infinite Elements", Int. J. num. Meth. Engng, 11, pp. 53~63.

(11) Paul P. Lynn, and Hassoun A. Hadid, 1981, "Infinite Elements With $1/r^n$ Type Decay", Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 17 pp. 347~355.

(12) Jean-Pierre G. Coyette, "Validation of a New Envelope Formulation for Handling Exterior Acousic and Elasto-Acoustic Problems in the Frequency domain", DGLR/AIAA 92-02-073, pp. 421~427.

(13) Becker, E. B., Carey, G. F., and Oden, J. T., 1981, "Finite Elements : An Introduction, Vol. I and II", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.