

비선형 동흡진기의 동적 거동에 관한 연구

A Study on the Behaviour of Nonlinear Dynamic Absorber

박철희* · 송석흥** · 신현재** · 홍성철**

Chol Hui Pak, Suck Heung Song, Hyun Jae Shin and Sung Chul Hong

〈1993년 1월 18일 접수 ; 1993년 5월 31일 심사완료〉

ABSTRACT

The conventional dynamic vibration absorber is very efficient in inhibiting the vibration of a machine. This is accomplished by "tuning" the absorber to the frequency of the harmonic disturbing force. If, however, the frequency of the disturbing force varies over a tuning frequency range in the normal operation of the system, the linear dynamic absorber may become inoperative and might aggravate matters particularly. This study is to endow the dynamic absorber with greater flexibility in suppressing vibrations through a range of frequencies of the disturbing force. By introducing springs with nonlinear characteristics into its design, the results can be obtained. In this paper, the machine and the absorber were modelled as a nonlinear two-degree-of freedom system. And the concepts of nonlinear normal mode were adopted to obtain this purpose.

1. 서 론

공진영역에서의 과도한 진동은 기계의 성능 및 수명에 악영향을 미치므로 그 방지 및 예방에 관한 연구가 수행되어 왔다. 이들 중 감쇠재료(damping material)를 사용하는 제어방법이 일반화 되어왔으나, 이 방법은 계의 특성이나 규모등에 따라 많은 제한요소가 따른다. 특히 복잡한 구조물에서는 제어 위치 선정이 곤란한 경우가 많다. 다른 방법으로는 기계계의 고유 동적 특성에 변화를 주어서 제어할 수 있으나, 이는 기계계의 구조변경이 가능한 경우에만 해당된다. 따라서, 이러한 댐핑재료의 단점을 보완하고, 기계계의 구조변경 없이 공진제어가 가능

한 동흡진기(dynamic absorber)가 연구되어 왔다.

선형동흡진기의 연구는 Brock⁽¹⁾에 의해 계의 공진을 제어할 수 있는 최적의 동흡진기의 해석을 수행하였고, Ormondroyd등⁽²⁾에 의해 계의 특성에 따른 동흡진기의 최적화가 수행되었다. 그러나, 기존의 선형동흡진기는 가진주파수에 대한 흡진기의 제어폭(band width)이 좁고, 흡진기의 질량비(mass ratio)에 따라 제어할 수 있는 가진주파수도 한계가 있다. 따라서 선형동흡진기는 외력의 주파수가 기계계의 주공진 부근영역에서 가진되는 계에만 적용이 가능하다. 이러한 제한을 극복하고 비교적 넓은 범위의 가진주파수에 대해서 안정된 응답을 얻기위해 비선형동흡진기의 해석이 요구되고 있다.

비선형동흡진기의 초기 연구는 Roberson⁽³⁾, Pipes⁽⁴⁾, Arnold⁽⁵⁾에 의해 3차의 비선형을 갖는 스프링을 사용하여 외력의 가진주파수에 대한 계의 제어주파수 영역을 확장하는 동흡진기의 설계가 수행되

*정회원, 인하대학교 공과대학 기계공학과

**정회원, 인하대학교 대학원 기계공학과

었고, Nissen 등⁽¹⁰⁾은 연성(softening)의 비선형 스프링을 사용하여 제한된 강성계수 값 내에서 최적의 동흡진기를 해석하였다.

선형동흡진기에 비해 비선형동흡진기의 장점은, 제어대상의 최적응답을 얻기 위해 흡진기의 크기를 변환시키는 과정인 tuning시, 비선형 강성계수 변화에 의해 가진주파수에 대한 흡진기의 제어영역을 확장할 수 있는 큰 특징을 갖는다.

본 연구에서는 기계계와 동흡진기를 비선형 2자유도계로 모델링하여 정규 모드 해석을 수행한 결과로써, 동흡진기의 크기와 비선형 강성계수에 따른 계의 특성을 파악할 수 있었고, 자동차의 내연기관과 같이 속도가 변하거나, 또는 하중이 변하는 기계계에 적용할 수 있는 비선형동흡진기의 제어가능성 및 유용성을 검토하였다.

2. 계의 설정 및 운동방정식

실제의 기계계는 기초(base)의 비선형성과 동흡진기의 비선형성까지 고려한다면, Fig. 1과 같이 비선형 2자유도 감쇠·강제진동으로 모델링할 수가 있다.

이들의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + k_1 x + k_2(x-y) + C_2(\dot{x}-\dot{y}) \\ + \alpha_1 x^3 + \alpha_2(x-y)^3 = F \cos \Omega t \\ m_2 \ddot{y} + k_2(y-x) + C_2(\dot{y} + \dot{x}) + \alpha_2(x-y)^3 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,

C_2 : 감쇠계수,

$k_i (i=1, 2)$: 선형 강성계수,

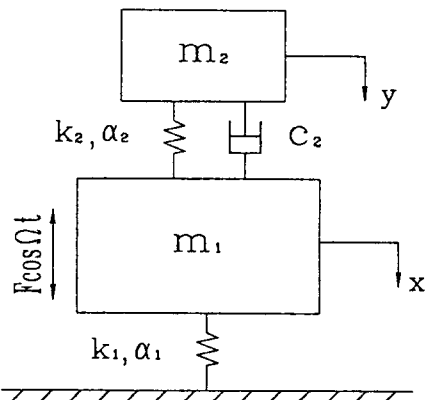


Fig. 1 기계계와 동흡진기의 2-DOF 모델링

$\alpha_i (i=1, 2)$: 비선형 강성계수,

F : 외력의 진폭,

Ω : 외력의 주파수.

따라서, 이계의 전체 거동은 비선형 강성계수($\alpha_i: i=1, 2$)에 영향을 받게 된다. 특히, 기계계의 변위가 커질 때에는 이들의 영향이 지배적으로 됨에 따라, 운동의 양상을 예측하기란 매우 어렵다.

본 논문에서는 이러한 운동의 양상을 정규모우드(normal mode)의 해석을 수행함으로써 비선형 강성계수에 따른 계의 특성을 고찰하였다.

3. 비선형 정규모드

계의 특성을 파악하고 비선형 비감쇠 자유진동에 대한 정규모드를 구하기 위하여 해를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\Omega t) \\ y(t) &= b \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

운동방정식 (1)에 대입한 후, harmonic balance method를 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2) a - k_2 b + \frac{3}{4} \alpha_1 a^3 \\ + \frac{3}{4} \alpha_2 (a-b)^3 = 0 \\ (k_2 - m_2 \Omega^2) b - k_2 a - \frac{3}{4} \alpha_2 (a-b)^3 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

가 된다. 식 (3)에서 비선형 정규모드를 구하기 위

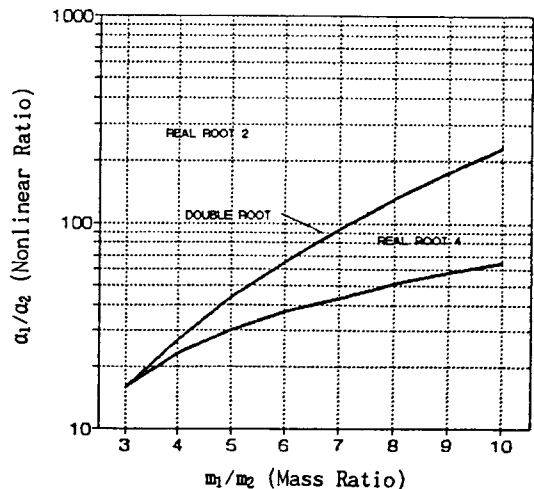


Fig. 2 계의 질량비(m_1/m_2)와 비선형강성계수비(α_1/α_2)에 따른 정규모우드의 분기영역

해서 Ω 를 소거하고, 좌표변환($a=r\cos\theta, b=r\sin\theta$)하여서, $P(P=\tan\theta)$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$f(P) + r^2g(P) = 0 \quad (4)$$

여기서,

$$f(P) = m_2k_2(1+P^2) \left(P^2 - \left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{m_1}{m_2} + 1 \right) P - \frac{m_1}{m_2} \right)$$

$$g(P) = \frac{3}{4}m_2\alpha_2(P^4 - (3 - \frac{m_1}{m_2})P^3 - 3(\frac{m_1}{m_2} - 1)P^2 - (\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 3\frac{m_1}{m_2} + 1)P - \frac{m_1}{m_2})$$

이 식으로부터 비선형 인자에 대한 계의 정규모우드 분기영역을 구할 수가 있고, 이를 도시한 것이 Fig. 2이다.

4. 비선형 동흡진기 이론

앞절의 normal mode 해석을 통하여 $\alpha_2=0$ 은 분기가 일어나지 않는 영역임을 확인하였으므로, 본 논문에서는 기계계의 변위가 작다는 가정하에 기초(base)의 비선형성(α_2)을 무시하고 해석을 수행하였다.

본 논문에서는 비선형 강제진동을 해석하기 위해서, slowly changing phase and amplitude(SCPA) 방법을 적용하였다. 이를 위해 변수 x, y, \dot{x}, \dot{y} 의 좌표변환을 다음과 같이

$$x(t) = a(t)\cos\Omega t + c(t)\sin\Omega t$$

$$y(t) = b(t)\cos\Omega t + d(t)\sin\Omega t$$

$$\dot{x}(t) = -\Omega a(t)\sin\Omega t + \Omega c(t)\cos\Omega t$$

$$\dot{y}(t) = -\Omega b(t)\sin\Omega t + \Omega d(t)\cos\Omega t \quad (5)$$

하여, 운동방정식에 대입한 후 정리하면, $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{d}$ 에 대한 식을 얻을 수가 있다. 이 식은 시간 t 의 함수로 표현되므로, SCPA 방법에 의해 평균을 취하여 t 를 소거할 수가 있다. 이와같이 정리를 하면 다음과 같은 1차 미분방정식을 얻는다.

$$\{\dot{u}\} = \{Q(u)\}, \{u\} = \{a \ b \ c \ d\}^T \quad (6)$$

따라서, 정상상태응답 $\{u_0\} = \{A \ B \ C \ D\}^T$ 는

$$\{\dot{u}\} = \{0\} \quad (7)$$

에 의해서 구할 수가 있고, 이들을 정리하여 무차원 변수로써 나타내면 다음과 같다.

$$(1-g^2)A - \mu f^2B - 2\zeta_2\mu gD - \frac{3}{4}\mu f^2\epsilon_2(B^3 + BD^2) = X_{st}$$

$$(1-g^2)C - \mu f^2D + 2\zeta_2\mu gB - \frac{3}{4}\mu f^2\epsilon_2(D^3 + DB^2) = 0$$

$$(f^2-g^2)B - g^2A + 2\zeta_2gD + \frac{3}{4}f^2\epsilon_2(B^3 + BD^2) = 0$$

$$(f^2-g^2)D - g^2C - 2\zeta_2gB + \frac{3}{4}f^2\epsilon_2(D^3 + DB^2) = 0 \quad (8)$$

여기서,

$$f = \frac{\omega_2}{\omega_1} : \text{natural frequency ratio,}$$

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} : \text{mass ratio}$$

$$g = \frac{\Omega}{\omega_1} : \text{force frequency ratio,}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\alpha_2}{k_2} : \text{nonlinearity}$$

$$X_{st} = \frac{F}{k_1} : \text{static deflection,}$$

$$\zeta_2 = \frac{C_2}{C_c} : \text{damping coefficient}$$

따라서, 이들 식으로부터 기계계의 응답(X_1)을 감쇠계수(ζ_2)의 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\left[\frac{X_1}{X_{st}} \right]^2 = \frac{E\zeta_2^2 + F}{G\zeta_2^2 + H} \quad (9)$$

여기서,

$$X_1^2 = A^2 + C^2$$

$$X_2^2 = B^2 + D^2$$

$$E = (2g)^2$$

$$F = (f^2T^2 - g^2)^2$$

$$G = (2g)^2(g^2 - 1 + \mu g^2)^2$$

$$H = ((1-g^2)(f^2T^2 - g^2) - \mu f^2g^2T^2)^2$$

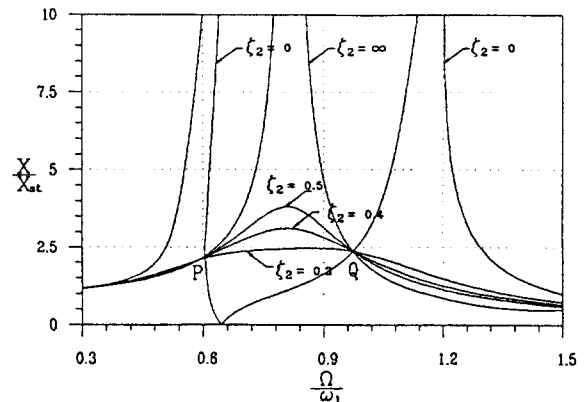


Fig. 3 동흡진기의 감쇠계수(ζ_2) 변화에 따른 기계계의 응답곡선

$$T^2 = 1 + \frac{3}{4} \varepsilon_2 X_2^2$$

기계계의 응답에 대한 감쇠계수의 영향은 Fig. 3과 같이 되며, 감쇠계수가 무한대인 경우에는 기계계에 동흡진기가 부착된 결과가 되어서 감쇠에 대한 일은 없게 된다. 또한, 감쇠계수가 영(zero)인 경우에서도 마찬가지로 감쇠에 의한 일은 없게 된다.

이들 사이 임의의 감쇠계수값에서 감쇠에 의한 일이 최대가 되면, 이에 해당하는 주파수에서의 공진 진폭은 최소가 된다. 이때의 감쇠계수값이 계의 최적 감쇠계수값으로 된다.

이러한 감쇠계수값을 계산하기 위해서 주파수 응답곡선식의 특성을 살펴보면 다음과 같다.

- (1) 감쇠계수와 독립적인 특성응답곡선은 두개의 고정점(P, Q)를 갖는다.
- (2) 계의 응답곡선은 두 고정점을 항상 통과한다.
- (3) 최적의 응답곡선은 같은 크기의 두 고정점에서 기울기가 영으로 되는 곡선이다.

위의 특성을 고려한 동흡진기의 설계를 위해서는 특성곡선의 두 고정점을 구하는 작업이 선행되어야 한다. 이들 고정점(P, Q)는 기계계와 동흡진기의 고유주파수비인 f에 의해서 결정되는데, 동흡진기의 고유주파수가 커질수록 P점은 상승하고, Q점은 하강을 한다. 그러므로 두 고정점의 높이를 일치시키는 tuning과정이 필요하다.

4.1 Tuning

기계계에서 최적으로 안정된 응답은 감쇠와 독립적인 두 응답곡선의 특성에 의해서 결정되는데, 그 과정은 다음과 같다.

식 (9)에서 특성응답곡선의 두 고정점은 구하기 위한 관계식은 다음과 같다.

$$\frac{E}{G} = \frac{F}{H} \tag{10}$$

따라서, δ 에 대한 특성방정식은

$$g^4 - \frac{2}{2+\mu} (f^2 T^2 + \mu f^2 T^2 + 1) g^2 + \frac{2f^2 T^2}{2+\mu} = 0 \tag{11}$$

와 같이 g의 함수로 표현된다.

식 (11)을 만족하는 두 근을 g_1^2, g_2^2 라 하자. (g_1 에 해당하는 점 P, g_2 에 해당하는 점 Q) 이에 해당하는 진폭을 같게 하기 위해서 특성응답곡선에 대입하면

$$\left\{ \frac{E}{G} \right\}_{g_1^2} = \left\{ \frac{E}{G} \right\}_{g_2^2} \tag{12}$$

가 되므로, 다음의 관계식을 얻을 수가 있다.

$$g_1^2 + g_2^2 = \frac{2}{1+\mu} \tag{13}$$

식 (11)의 두 근의 합에 대한 관계식은 식 (13)의 근과 계수의 관계에 의해서

$$f = \frac{1}{(1+\mu)T} \tag{14}$$

로 나타낼 수 있다. 따라서, 이 식은 기계계와 동흡진기의 고유주파수비(f), 질량비(μ)와 비선형계수(ε_2)의 함수로 표현된다.

여기서, 식 (14)의 조건에 의해 구해진 tuning된 두 고정점의 폭(band width)이 가진주파수에 대한 제어영역에 해당된다. 그러므로 가진주파수에 대한 제어영역은 질량비(μ)와 비선형계수(ε_2)에 의해 조절이 가능함을 알 수가 있다.

- (1) Mass Ratio(μ)의 영향

Contant tuning($f=1/T$)시 질량비에 따른 두 고정점은 식 (14)을 식 (11)에 대입하여 구할 수 있다.

선형 :

$$g^4 - \frac{2}{1+\mu} g^2 + \frac{2}{(1+\mu)^2(2+\mu)} = 0$$

비선형 :

$$g^4 - 2g^2 + \frac{2}{(2+\mu)} = 0 \tag{15}$$

식 (15)에서 두 고정점의 band width관계는 다음 식과 같이 질량비(μ)에 대한 관계식으로 표현된다.

$$BW_{non} = (1+\mu) BW_{lin} \tag{16}$$

식 (14)에서 비선형파라미터 (T), 즉 비선형 강

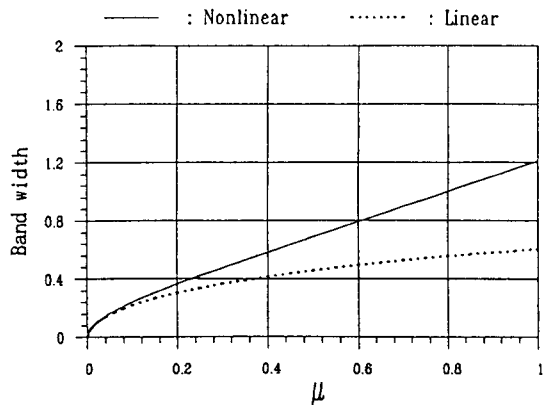


Fig. 4 계의 질량비(μ)에 따른 band width

성도 질량효과를 유도해 band width를 확장시켜준다. Fig. 4은 constant tuning시 선형계의 band width와 비선형계의 band width를 질량비(μ)에 따라 나타낸 그림으로써 가진주파수에 대한 동흡진기의 제어영역이 확장됨을 볼 수 있다.

(2) Nonlinearity (ϵ_2)의 영향

비선형비(ratio of Nonlinearity, $\epsilon_2 = \alpha_2/k_2$)는 기계계와 동흡진기의 고유주파수비(f)에 영향을 준다. 식 (14)에서 고유주파수비는 비선형계수(ϵ_2)가 커질수록 감소한다. 즉, 비선형계수를 증가시키면 상대적으로 흡진기의 질량비를 작게할 수 있다. Fig. 5는 비선형비(ϵ_2)에 따른 고유주파수비(f)의 변화를 나타낸 그림이다.

(3) Tuning 파라미터

고유주파수비(f)는 질량비(μ)와 비선형비(ϵ_2)에 따라 변하는데, 질량비가 일정할때 비선형비의 크기에 따라 tuning의 여부가 결정된다. Fig. 6은 질량비(μ)에 따른 비선형비(ϵ_2) 크기의 제한을 나타낸 그림이다.

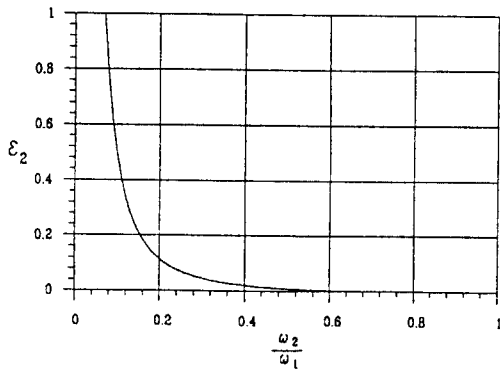


Fig. 5 비선형비(ratio of nonlinearity ; $\epsilon_2 = \alpha_2/k_2$)에 따른 고유주파수비($f = \omega_2/\omega_1$)

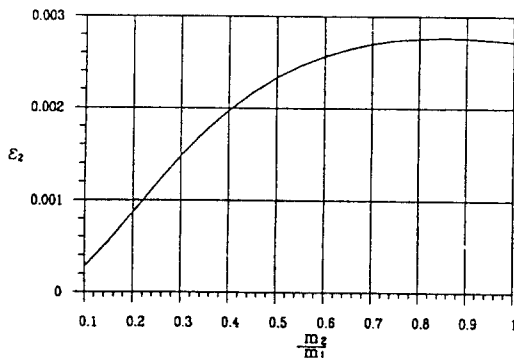


Fig. 6 계의 질량비(m_2/m_1)에 따른 tuning 가능한 비선형비($\epsilon_2 = \alpha_2/k_2$)

해당되는 질량비(μ)에 대한 비선형비(ϵ_2)가 너무 크면, 고유주파수비는 작아져 두 고정점에 의한 band width를 벗어나게 된다. 이 경우 tuning은 이루어지지 않는다. 이 결과로부터 tuning시 질량비(μ)와 비선형성비(ϵ_2)의 적절한 조절에 의해 고유주파수비(f)가 band width 영역내에 존재하도록 해야만 가능하다.

4.2 Optimum Damping

Tuning된 동흡진기의 최적의 감쇠 응답곡선은 tuning 때의 주파수비 g_1 또는 g_2 에서 기울기가 영(zero)인 곡선으로, 응답곡선식 (9)를 가진주파수비(g)로 미분하여서 구할 수가 있다. tuning과정에서 구한 관계식 (14)를 기계계의 응답함수식 (9)에 대입하면

$$\left\{ \frac{X_1}{X_{st}} \right\}^2 = \left\{ \frac{\tau}{\pi^2 + \Theta^2} \right\} \tag{17}$$

여기서,

$$\pi = (2\xi_2 g) (g^2 + \mu g^2 - 1)$$

$$\Theta = (1 - g^2) \left(\frac{1}{(1 + \mu)^2} - g^2 \right) - \frac{\mu}{(1 + \mu)^2} g^2$$

$$\tau = (2\xi_2 g)^2 + \left(\frac{1}{(1 + \mu)^2} - g^2 \right)^2$$

로 표현된다. 또 식 (17)을 미분한 후, g_1^2, g_2^2 을 각각 대입하면

$$\frac{d}{dg^2} \left\{ \frac{\tau}{\pi^2 + \Theta^2} \right\}_{g_1} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{d}{dg^2} \left\{ \frac{\tau}{\pi^2 + \Theta^2} \right\}_{g_2} = 0 \tag{19}$$

가 된다.

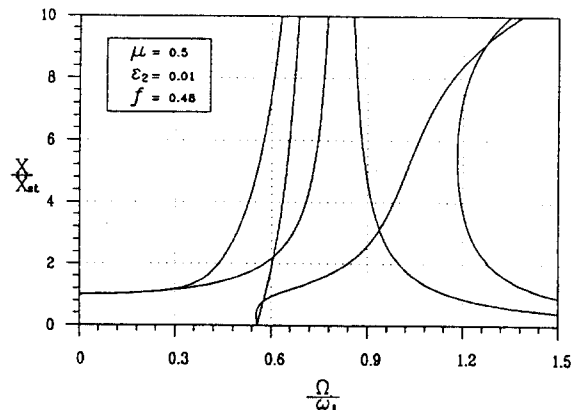


Fig. 7 Tuning에 부적합한 비선형 강성계수값에 의한 응답곡선

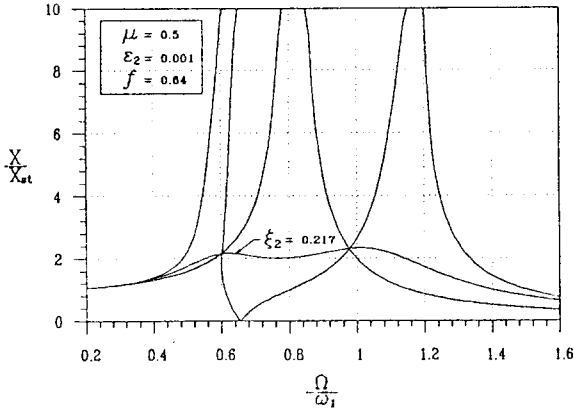


Fig. 8 Tuning된 최적의 감쇠 응답곡선

그러므로, 식 (18)과 식 (19)로부터 두 고정점(P, Q)에서 최적의 응답을 나타낼 수 있는 감쇠 계수값을 구할 수가 있다. 이와 같이 구한 감쇠 계수값에 대한 응답은 가진주파수에 의한 공진영역에서 안정된 응답을 가지게 된다.

앞의 정규모우드 해석에서 분기가 일어나는 경우와 그렇지 않은 경우에 해당되는 계에 대하여, 이들 방법에 따라 기계계의 응답을 구하면 다음과 같다. 즉, Fig. 7은 Fig. 6에서 tuning이 부적당한 영역에 해당되는 예로써, 두고정점의 tuning이 잘 안됨을 알 수가 있었다. Fig. 8은 tuning이 적당한 예로써, 두 고정점의 tuning이 잘되었고, 최적적인 감쇠계수를 구함으로써, 기계계의 응답이 공진주파수 영역에서도 매우 안정됨을 알 수가 있었다.

5. 결 론

비선형 동흡진기에 대한 연구를 수행한 결과, 선형 동흡진기의 가진주파수에 대한 제어영역에 제한성을 극복할 수 있었다. 또한, 제어 대상의 특성에 가장 적합한 동흡진기의 설계가 가능함을 알 수가 있었다.

이와 같은 본 연구 결과에 대한 결론을 정리하면 다음과 같다.

- (1) 정규모드의 해석을 통해 정규모우드의 분기영역을 구할 수 있었으며, 분기 발생하지 않는 영역을 통해 기계계에 적합한 흡진기의 크기와 비선형 강성계수의 범위를 구할 수 있었다.
- (2) Tuning 관계식은 흡진기의 질량비와 비선형 파라미터의 함수로 표현되므로, 흡진기의 질량비에 따라 tuning이 가능한 비선형 강성계수의 크기의 한

계가 있음을 알았다.

(3) Tuning된 응답곡선에 의해 구해진 기계계의 감쇠응답은 가진주파수에 대한 기계계의 공진영역에서 안정된 최적화한 응답을 얻을 수 있었다.

(4) 비선형 동흡진기로 설계된 기계계는 비선형 강성계수로 인해 가진 주파수에 대한 제어영역폭을 확장할 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) J. E. Brock, 1946, "A Note on the Damped Vibration Absorber," Trans. ASME, p. 284.
- (2) J. Ormondroyd and J. P. Den Hartog, 1928, "The Theory of Dynamic Vibration Absorber," Trans. ASME, Vol. 50, p. 9.
- (3) R. E. Roberson, 1952, "Synthesis of a Non-linear Vibration Absorber," J. of Franklin Institute, Vol 254, pp. 205~220.
- (4) L. A. Pipes, 1953, "Analysis of a Nonlinear Vibration Absorber," J. of Applied Mechanics, Vol. 20, pp. 515~518.
- (5) F. R. Arnold, 1955, "Steady State Behaviour of Systems provided with Nonlinear Dynamic Vibration Absorbers," J. of Applied Mechanics, Vol 20, pp. 487~492.
- (6) W. Szemplinska-Stupnicka, 1969, "On the Phenomenon of Combination Type Resonances in Nonlinear Two degree-of-Freedom Systems," International J. of Nonlinear Mechanics, Vol. 4, p. 335.
- (7) W. Szemplinska-Stupnicka and J. Baikowski, 1980, "Multi-Harmonic Response in the Regions of Instability of the Harmonic Solution in Mult Degree-of-Freedom Nonlinear Systems," International J. of Nonlinear Mechanics, Vol. 15, pp. 1~11.
- (8) J. B. Hunt and J. C. Nissen, 1982, "The Broadband Dynamic Vibration Absorber," J. of Sound and Vibration Vol. 83, pp. 573~578.
- (9) A. Soom and Ming san Lee, 1983, "Optimal Design of Linear and Nonlinear Vibration Absorbers for Damped Systems," Trans. ASME, Vol. 105, pp. 112~119.
- (10) J. C. Nissen, K. Popp and B. Schmalhorst, 1985, "Optimization of a Dynamic Nonlinear Vibration Absorber," J. of Sound and Vibration, Vol. 99,

pp. 149~154.

(11) H. J. Rice, 1986, "Combinational Instability of the Nonlinear Vibration Absorber," J. of Sound and Vibration, Vol. 108, pp. 526~532.

(12) H. J. Rice and J. R. McCraith, 1986, "On Practical Implementations of the Nonlinear Vibration Absorber," J. of Sound and Vibration, Vol. 110, pp. 161~163.