

彈性的으로 支持된 鐵筋콘크리트 扇形板의 有限要素 解析

Finite Element Analysis of the Reinforced Concrete Circular Ring Sector Plate Supported by Elastic Beam

曹 鎮 久*
Cho, Jin Goo

Summary

Although all the reinforced concrete circular ring sector plates are elastically supported, it is conventional to simplify their supporting conditions as fixed or simply-supported ones assuming that their supporting beam has infinite stiffness. However, in order to obtain a precise solution, it should be required to consider the stiffness of their supporting beam.

As a methodological improvement to the precise analysis, "Reinforced Concrete Model" previously developed by the author was applied to the structural analysis of the reinforced concrete circular ring sector plates with elastically supported beam.

The results of analysis in the cases under various conditions of open angle, steel ratio, relative stiffness(EI/DL) between plate and supporting beam were summarized as follows :

1. Although the effect of relative stiffness between plate and supporting beam varies depending on the magnitude of open angle, in general, it shows the largest when not more than 5.0 and negligible when not less than 10.0. Therefore, it would be considered as fixed supporting condition : in the case of its open angle of 0° (rectangular plates), its stiffness ratio being not less than 10.0 and in the other case of its open angle of 30° , its stiffness ratio being not less than 5.0.

2. In the rectangular plates, the effect of steel ratio is considerable in no supporting condition, but negligible in the supporting condition. So, the effect of steel ratio should be negligible in the case of the elastically supported circular ring sector plates.

3. However, the effect of steel ratio is much more considerable in the case of the fixed supported circular plates, especially, when steel ratio being not more than 1.0% and stiffness

* 全南大學校 農科大學

키워드 : 扇形板, 彈性支持, R.C要素, 剛性比, 鐵筋比

ratio being smaller. So, the effect of steel ratio should be considered in the analysis of reinforced concrete circular ring sector plates with fixed conditions.

4. The effect of open angle is greater in the case of without-supporting beam conditions. However, in the other case of with-supporting beam conditions, the effect is a little bit when open angle of not more than 30° and negligible when open angle of not more than 30° .

I. 緒 論

近年에 都市交通의 發達 및 高速道路의 建設에 隨伴하여 曲線橋의 利用이 必須的으로 要求된다. 이러한 曲線橋의 上部 構造는 大部分의 경우 彈性的으로 支持된 扇形板으로서 取扱되어질 수 있으며 이러한 扇形板의 力學的 特性에 影響을 끼칠 수 있는 因子들은 여러가지가 있다.

一般的으로 扇形板의 力學的 特性에 影響을 끼치는 因子로서는 開角, 板-支持보 사이의 相對剛性 및 鐵筋比 등을 豫想할 수 있다. 鐵筋 콘크리트 構造物에 대한 지금까지의 解法에서는 鐵筋을 無視하고 콘크리트 單一材料로서 만들어진 板으로 取扱되어지고 있다. 實際로 鐵筋과 콘크리트라는 서로 다른 性質을 갖는 材料로서 이루어진 鐵筋콘크리트 構造物의 解析에 있어서 鐵筋의 影響을 完全하게 考慮한다는 것은 現在로서는 매우 어려운 일임에는 틀림없다. 그러나 構造解析이나 設計에 있어서는 어떤 單純한 假定들이 導入되지 않을 수 없다. 筆者는 이러한 鐵筋콘크리트 構造解析을 위한 合理的이면서도 實用的인 解法의 開發을 위하여 鐵筋과 콘크리트가 完全 附着이 되어 一體로서 外力에 抵抗한다고 假定하여 鐵筋콘크리트 모델을 開發 提示한 바 있으며 몇가지의 事例解析을 통하여 그의 適用性을 檢討한 바 있다.^{11,12)}

본 研究에서는 이미 筆者가 報告한 바 있는 鐵筋콘크리트 모델을 彈性的으로 支持된 鐵筋 콘크리트 扇形板의 解析에 適用하여 그의 力學的 特性이 板-支持보의 相對剛性, 鐵筋比 및 開角의 크기에 따라서 어떻게 달라지는가를 究

明하고자 한다.

II. 解析方法

1. 基本假定

有限要素法을 使用하여 Fig. 1과 같은 扇形板을 解析함에 있어서 要素의 定式化에는 다음과 같은 假定이 導入되었다.

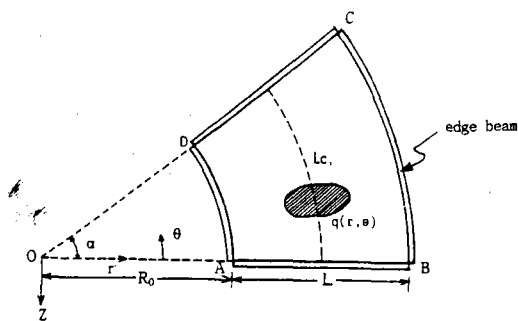


Fig. 1. Circular ring sector plate supported by edge beams

가. 平板의 垂直變形은 작다.

나. 變形前에 中立面에 垂直한 平面은 變形後에도 平面을 維持하며 變形後의 中立面에 垂直하다.

다. 中立面에 垂直한 應力은 크기에 關係없이 無視된다.

라. 鐵筋과 콘크리트는 完全히 附着되었다.

2. 有限要素모델

가. 콘크리트 板要素

콘크리트 板要素는 Fig. 2와 같은 4邊形 要

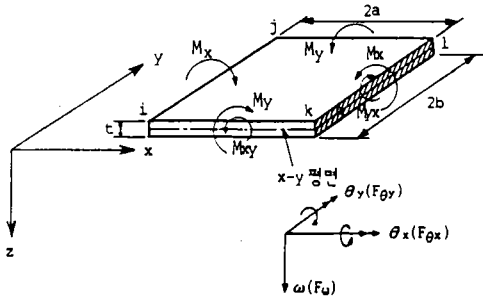


Fig. 2. Quadrilateral plate-bending element and displacement vector

素로서 x-y 平面과 一致하는 4邊形 要素의 節點을 i, j, k 및 l로 하고 z-軸 方向의 垂直變位를 ω , x軸 및 y軸에 관한 回轉變位를 各各 θ_x, θ_y 라고 하면 各節點에서의 變位는 이들 3成分으로 나타낼 수 있다.

이때 例를 들면 節點 i에서의 變位벡터는 式(1)과 같이 나타내어지고 要素의 全節點에서의 變位 벡터는 式(2)와 같이 된다.

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \left[-\frac{\partial \omega}{\partial y} \right]_i \\ \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \right]_i \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

$$\{\delta_e\}^T = [\delta_i \ \delta_j \ \delta_k \ \delta_l] \dots\dots\dots(2)$$

一般으로 板의 問題에서는 變位函數 ω 는 節點變位 $\{\delta_e\}$ 의 成分 즉 12個의 파라메타로서 定義된다. 이로부터 板의 垂直처짐은 다음의 多項式으로 表示할 수 있다.

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3 + \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}xy^3 \dots\dots\dots(3)$$

式(3)을 式(1) 및 (2)에 代入하여 整理하면

$$\{\delta_e\} = [C] \{\alpha\} \dots\dots\dots(4)$$

로 된다.

여기서

$$\{\alpha\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2 \dots\dots\dots \alpha_{12}\}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & \dots\dots\dots x_i y_i^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & i & 0 & 2x_i & \dots\dots\dots y_i^3 \end{bmatrix}$$

式(4)의 逆行列을 구하면

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{\delta_e\} \dots\dots\dots(5)$$

로 되고 여기서 $\{\alpha\}$ 가 決定된다.

이로부터 變位函數 ω 는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\omega = \{S\}^T [C]^{-1} \{\delta_e\} \dots\dots\dots(6)$$

여기서

$$\{S\}^T = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3]$$

나. 보 要素 및 鐵筋要素

보 要素 및 鐵筋要素의 剛度行列은 一般的인 보 要素의 剛度行列과 같으며 式(7)과 같다.

$$[K_b] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^3} \\ \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ \text{sym} & & & & \frac{GJ}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(7)$$

다. 鐵筋콘크리트 板要素

원래 鐵筋콘크리트 構造物에서 鐵筋은 分散되어 配筋되는 것이 一般이다. 이러한 鐵筋의 配筋狀態를 表現하는데 있어서 鐵筋을 線要素로 取扱하는 것은 要素數의 增加面에서 바람직스

럽지 않다. 따라서 鐵筋과 콘크리트라는 別個의 材料로서 이루어지는 要素를 均質인 하나의 材料로서 이루어진 鐵筋콘크리트 板要素를 使用한다. 이때 構成法則은 다음과 같다.

$$[K_{RC}] = [K_C] + [K_S]$$

여기서 $[K_{RC}]$: 鐵筋콘크리트 板要素의 剛度 行列

$[K_C]$: 콘크리트 板要素의 剛度 行列

$[K_S]$: 보 要素로서 취급된 鐵筋의 剛度 行列

즉, 콘크리트 板要素의 剛度 行列 속에 隣接한 鐵筋要素의 剛度 行列을 組立하여 넣으므로 鐵筋콘크리트 板要素의 剛度 行列이 作成된다.

III. 解析例 및 考察

2章에서 記述한 解析方法을 Fig. 3과 같은 彈性的으로 支持된 鐵筋콘크리트 扇形板의 解析에 適用하였다. 이때 使用된 材料 定數는 다음과 같다.

板 및 支持보(콘크리트) :

- 彈性係數 $E_c = 240,000 \text{ kgf/cm}^2$
- 포아송比 $\nu = 0.17$
- 自重 $\rho = 2500 \text{ kgf/m}^3$
- 分布荷重 $q = 0.5 \text{ tf/m}^2$
- 設計基準強度 $\sigma_{ck} = 240 \text{ kgf/cm}^2$

鐵筋 :

- 彈性係數 $E_c = 2,040,000 \text{ kgf/cm}^2$
- 포아송比 $\nu = 0.3$
- 許容應力 $\sigma_{sa} = 1,300 \text{ kgf/cm}^2$

支持보의 剛性이 板의 舉動特性에 미치는 影響을 調査하기 위하여 板-支持보의 剛性比(EI/DL)의 값을 0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0, 10.0, 15.0 및 30.0의 8경우로 變化시켰으며 이때 剛性比 0.0의 경우는 扇形板의 4-偶節點에서 기둥에 의해서 支持되는 것을 意味한다. 또 開角의

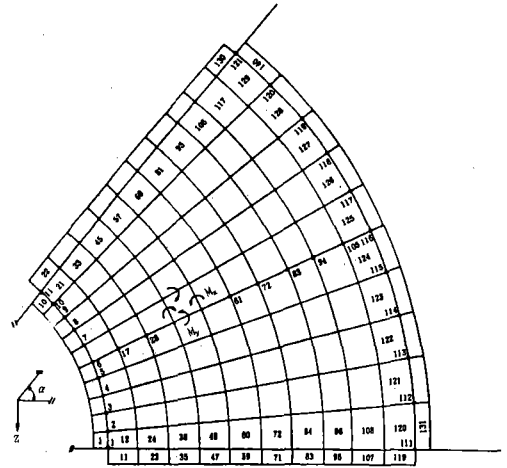


Fig. 3. Analysied circular ring sector plate supported by edge beams and mesh generation

크기에 따른 板의 舉動特性을 알아보기 위하여 開角의 크기를 0° , 30° , 60° 및 90° 의 4경우로 하였으며 이때 開角 0° 는 矩形板을 意味한다. 扇形板의 力學的 特性에 대한 鐵筋의 影響을 究明하기 위하여 鐵筋比의 값은 平衡鐵筋比($p_0 = 1.47\%$)를 中心으로 0.0, 0.47, 0.97, 1.47, 1.97 및 2.47%의 6경우로 하고 開角이 30° 일 경우에 限하여 追加로 鐵筋比 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8 및 0.9%의 8경우를 考慮하였는데 이는 鐵筋比 1% 以下에서는 鐵筋比에 따른 板의 舉動이 심한 變化를 하고 있었기 때문이다.

여기서 鐵筋比 0.0은 鐵筋의 影響을 無視한 즉, 扇形板이 콘크리트 單一의 材料로서 이루어졌다고 假定한 경우를 意味한다.

平衡鐵筋比를 갖는 鐵筋콘크리트 扇形板에서 板-支持보 사이의 相對剛性에 따른 扇形板 中央에서의 처짐, X-모멘트 및 Y-모멘트의 變化를 圖示하면 Fig. 4와 같다. 支持보의 剛性이 增加함에 따라 처짐 및 모멘트 값은 急激히 減少하였으며 開角의 크기에 따라서 약간의 差異는 있지만 一般的으로 剛性比 10.0 以上이 되면 4邊에서 固定된 경우에 거의 수렴하였다. 또한 開角이 커질수록 4邊에서 固定된 扇形板의 角

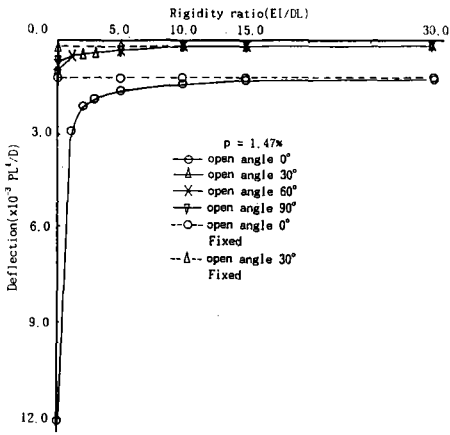


Fig. 4(a). Deflection vs. Rigidity ratio, central

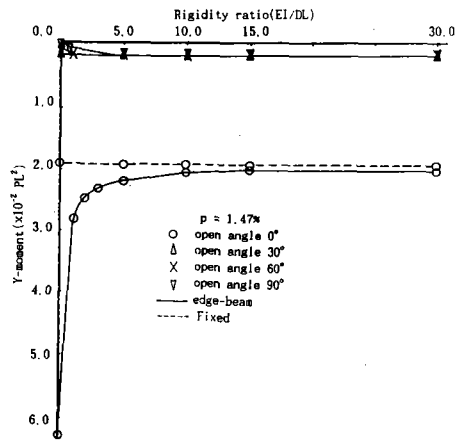


Fig. 4(c). Y-moment vs. rigidity ratio, central

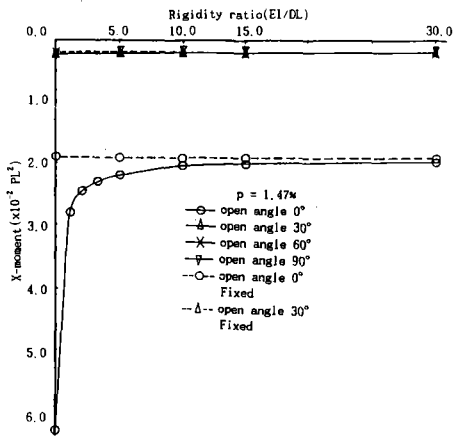


Fig. 4(b). X-moment vs. rigidity ratio, central

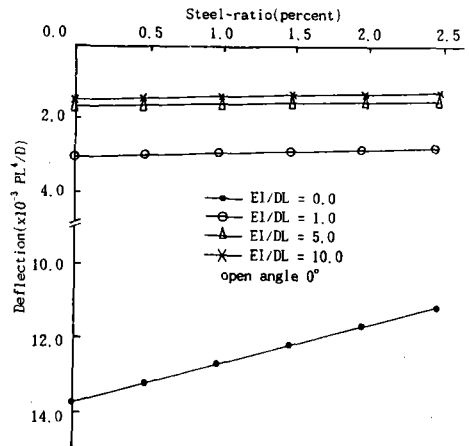


Fig. 5(a). Deflection vs. steel-ratio, central

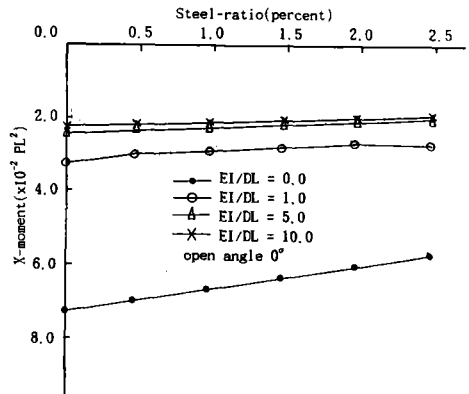


Fig. 5(b). X-moment vs. steel-ratio

우에의 수렴이 빨라졌다. 開角이 30° 以上이고 剛性比가 5.0 以上이면 彈性支持된 扇形板은 周邊에서 固定된 扇形板으로 解析하여도 될 것으로 思料되며 矩形板(그림에서 開角 0.0°)의 경우에는 剛性比의 값이 10.0~15.0 以上이면 固定板으로 解析하여도 좋을 것으로 判斷되었다. X-모멘트 및 Y-모멘트의 變化 樣相도 變位の 그것과 類似하였다.

鐵筋比에 따른 扇形板 中央에서의 처짐, X-

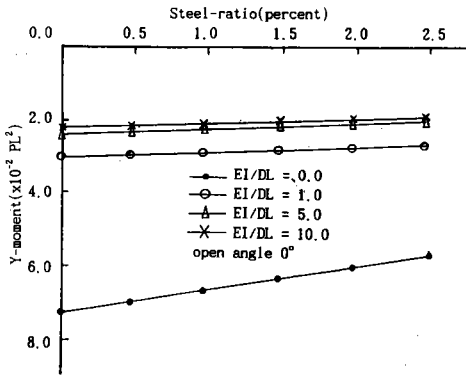


Fig. 5(c). Y-moment vs. steel-ratio

모멘트 및 Y-모멘트의 변화를 圖示하면 Fig. 5와 같다. 開角 0.0° 즉, 矩形板의 경우 相對剛性 0.0 즉 4-偶節點에서 支持된 경우 鐵筋比의 影響이 나타났지만 相對剛性이 1.0 以上인 경우에는 거의 鐵筋比의 影響은 없었다. 즉, 矩形板의 경우에는 4-偶節點에서 支持되는 경우를 除外하고 支持보에 의해서 支持되는 경우에는 鐵筋의 影響은 無視될 수 있을 것으로 思料된다. 開角 30° 인 扇形板 中央에서 처짐, X-모멘트 및 Y-모멘트의 變化를 圖示하면 Fig. 6과 같다.

矩形板의 경우와는 달리 扇形板의 경우에는

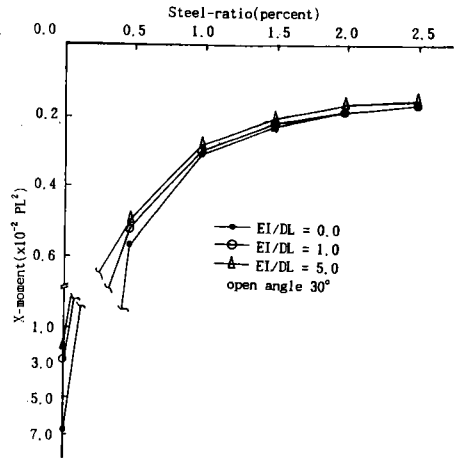


Fig. 6(b). X-moment vs. steel-ratio

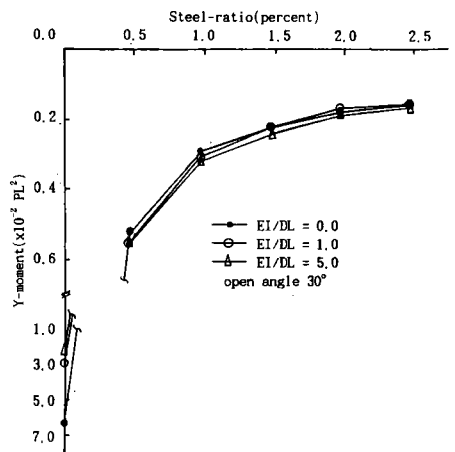


Fig. 6(c). Y-moment vs. steel-ratio

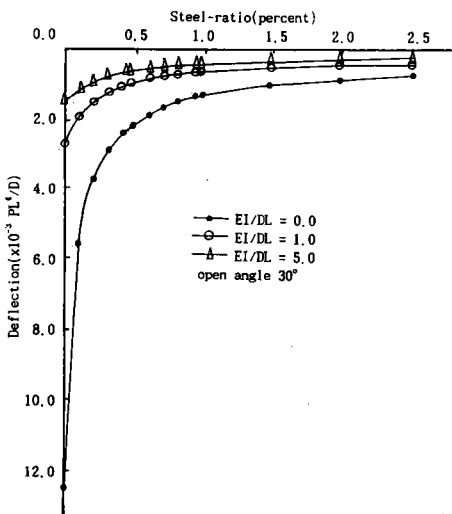


Fig. 6(a). Deflection vs. steel-ratio, central

鐵筋比의 影響이 大端히 顯著하였으며 특히 鐵筋比 1.0% 以下인 경우 顯著하였고 相對剛性이 적을수록 심하게 나타났다. 開角 60° 및 90° 의 경우도 30° 의 경우가 아주 類似한 傾向을 보였으며 圖示는 省略하였다. 開角의 크기에 따른 扇形板 中央에서의 처짐, X-모멘트 및 Y-모멘트의 變化를 圖示하면 Fig. 7과 같다.

支持보가 없는 경우 開角의 影響은 線形的으로 크게 나타났지만 支持보가 있는 경우에는 開角 30° 以下에서만 開角의 影響이 있었고 30°

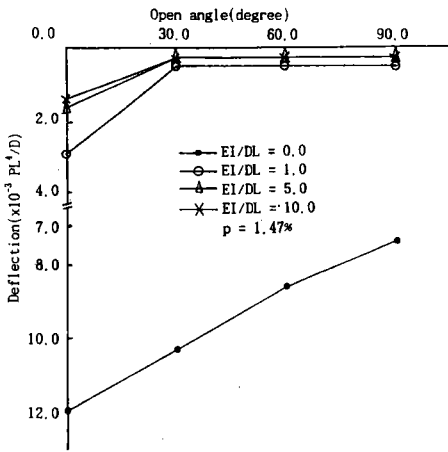


Fig. 7(a). Deflection vs. open-angle

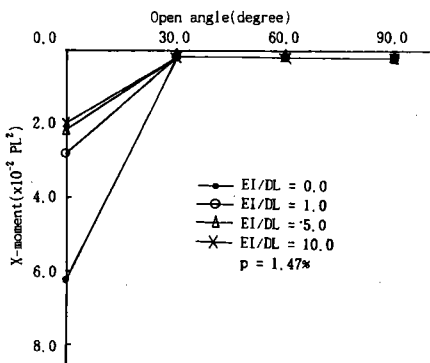


Fig. 7(b). X-moment vs. open-angle, central

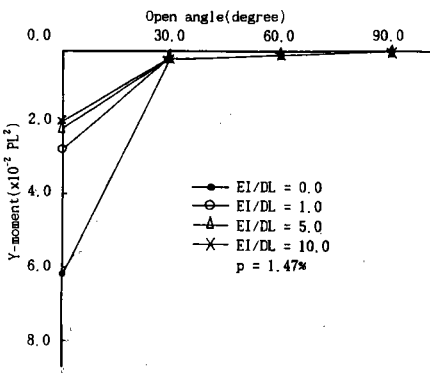


Fig. 7(c). Y-moment vs. open-angle, central

以上인 경우에는 거의 影響을 찾을 수 없었다. 그러나 이러한 開角의 影響은 相對剛性이 클수록 減少하였다.

IV. 結 論

實際 모든 鐵筋콘크리트 扇形板은 全 周邊에서 彈性的으로 支持된다. 그러나 이러한 鐵筋콘크리트 板의 解析은 支持보가 無限한 剛性을 갖는 것으로 하여 周邊에서 固定되거나 單純支持된 것으로 單純化 시키는 것이 慣行으로 되어 있다. 그러나 正確한 解析을 위해서는 支持보의 剛性을 考慮한 解析이 要求된다.

본 研究에서는 支持보에 의해서 彈性的으로 支持되는 鐵筋콘크리트 扇形板의 解析에서 筆者가 提案한 鐵筋콘크리트 모델을 適用하여 그 의 力學的 特性을 究明한 것이다.

開角, 鐵筋比 및 板-支持보의 相對剛性(EI/DL)을 몇가지로 變化시킨 事例解析을 통하여 얻어진 結果를 要約하면 다음과 같다.

1. 扇形板의 舉動에 대한 板-支持보의 相對剛性의 影響은 開角의 크기에 따라 差異는 있지만 5.0 以下에서 가장 크게 나타났으며 10.0 以上이 되면 4-邊固定 扇形板의 경우에 거의 接近되었다. 즉, 矩形板-開角 0.0°-의 경우에는 剛性比 10.0 以上이면 그리고 開角이 30° 以上인 扇形板에서는 剛性比가 5.0 以上이면 4-邊固定 扇形板으로 解析될 수 있을 것으로 思料된다.

2. 矩形板의 경우 支持보가 없을 때(EI/DL=0.0) 鐵筋比의 影響이 나타났지만 支持보가 있는 경우(EI/DL≥1.0) 鐵筋比의 影響은 거의 없었다. 따라서 彈性的으로 支持된 扇形板의 경우에는 鐵筋比의 影響은 無視될 수 있을 것으로 思料된다.

3. 扇形板의 경우 鐵筋比의 影響은 大端히 顯著하였으며 特히 鐵筋比가 1.0% 以下인 경우 또 相對剛性이 적을 수록 큰 것으로 나타났다. 따라서 鐵筋콘크리트 扇形板의 解析에서는 鐵

筋의 影響이 반드시 考慮되어야 할 것으로 判斷된다.

4. 開角의 影響은 支持보가 없는 경우 큰 것으로 나타났으며 支持보가 있는 경우에는 開角 30° 以下에서만 影響이 있었고 30° 以上인 경우에는 거의 影響을 찾을 수 없었다.

이 論文은 1992년도 教育部支援 韓國學術 振興財團의 자유공모과제 學術研究 造成費에 의하여 研究되었음.

參 考 文 獻

1. Hisanori Ohtsuka and Tadao KANEKO : Analysis of circular ring sector plates with all edge elastically supported by frames, 九大工學集報 Vol. 45, No. 6, pp. 744-780, 昭和 47年.
2. Hisanori Otsuka : Finite difference analysis of circular ring sector plates supported by edge-beams, proc. of J.S.C.E. No. 220, pp. 107-115, 1973.
3. Isamu OKUMURA, yuya HONDA and Jin Yoshimura : on an analysis for circular ring sector plates by one theory of moderately thick plates, proc. of J.S.C.E, No. 326, pp. 15-18, 1982.
4. Jin Yoshimura : The bending of curvilinear orthotropic circular ring sector plate, trans. of J.S.C.E, No. 82, pp. 9-10, 1962.
5. M. A. KMAN, K. O. KEMP : Elastic full composite action in a slab and beam system, the structural engineer, Vol. 48, No. 9, pp. 353-359, 1970.
6. Masahi IURA and Masaharu HIRASHIMA : Fourier analysis of shallow right helicoidal shells, proc. of J.S.C.E, No. 321, pp. 15-27, 1982.
7. Rudolph Sziland : Theory and Analysis of Plates, PRENTICE-HALL, INC, 1974.
8. Shoji Ikeda and Hiroyuki Nagumo : Study on a Method of Rational Application of Finite Element Method to R. C. and P. C. Structures, Proc. of J.S.C.E, No. 414, Vol. 12, pp. 137-143, 1990.
9. Tadao KANEKO and Hisanori OHTSUKA : Analysis of Circular Ring Sector Plates with two Opposite Straight Edges Elastically Supported by Frames, 九大工學集報 Vol. 45, No. 1, pp. 27-34, 昭和 47年.
10. Timosenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, McGraw Hill, 1959.
11. 曹鎮久 : 任意的 境界條件을 갖는 鐵筋 콘 크리트 扇形板의 解析(I), 韓國農工學會誌, 第33卷 2號, pp. 61-70, 1991.
12. 曹鎮久 : 任意的 境界條件을 갖는 鐵筋 콘 크리트 扇形板의 解析(II), 韓國農工學會誌, 第34卷 第1號, pp. 78-86, 1992.
13. 李敬淑 : 보에 의해서 支持된 R. C 슬래브의 解析, 全南大學校 大學院 碩士學位 論文. 1992.
14. 小堀爲雄, 吉田博 : “有限要素法による 構造 解析 프로그램”, 丸善株式會社, 1980.