垂直統合 意思決定을 위한 計量分析模型

文 相 源*

A Mathematical Planning Model for Vertical Integration

Sangwon Moon

ABSTRACT

This paper presents a mathematical model for a class of vertical integration decisions. The problem structure of interest consists of raw material vendors, components suppliers, components processing plants, final product (assembly) plants and external components buyers. Economic feasibility of operating components plants instead of keeping outside suppliers is our major concern. The model also determines assignment of product lines and production volumes to each open plant considering the cost impacts of economies of scale and plant complexity.

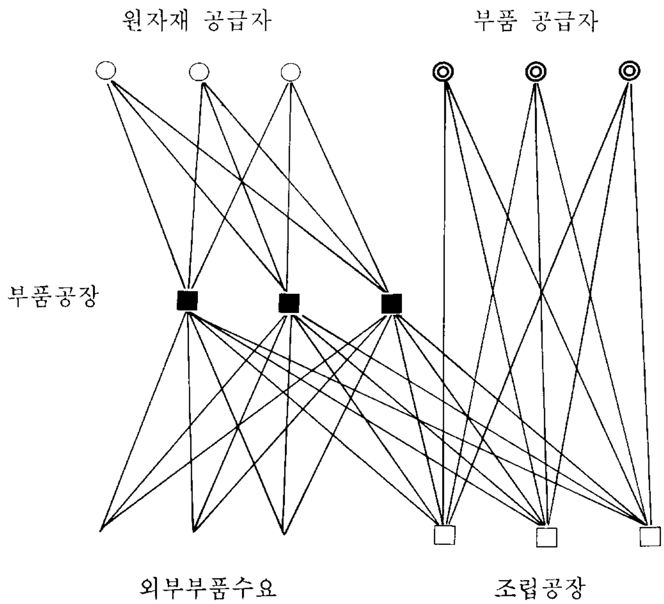
The problem formulation leads to a concave, mixed integer mathematical program. Given the state of the art of nonlinear programming techniques, it is often not pssible to find global optima for reasonably sized such problems. We developed an optimization solution algorithm within the framework of Benders decomposition for the case of a piecewise linear concave cost function. It is shown that our algorithm generates optimal solutions efficiently.

1. 問題의 模型化

垂直統合에 대해서는 많은 實證硏究가 이루어진 바 있다. 그 중 한 부류([3], [20],[21], [25])는 戰略的 利點과 不利點에 관한 연구에 主眼點을 두고 있다. 특히 Porter [20]는 實證硏究에 근거하여 垂直統合 意思決定을 위한 구체적 지침을 제공해 주고 있다. Schoeffler[21]는 PIMS 데이타베이스의 분석결과 시장이 변화(성장, 쇠퇴 등 불안정한 상태)하는 시기에는 기업들이 垂直統合을 꺼려 하는 반면 성숙된 산업에 있어서는 垂直統合이 보다 활발히 전개된다는 결론을 얻고 있다.

다른 부류 ([4], [11], [22], [23])의 연구자들은 生産施設計劃과 관련해서 垂直統合의 經濟效果를 논의 하였다. 그 중 Skinner[22]는 많은 공장들이 기존시설의 활용도를 높이는 의미에서 제품라인을 하나 둘 추가하다 보니 결국은 생산환

* 한국방송통신대 경영학과 교수



[그림 1] 垂直統合問題의 네트워크 構造

경이 너무 복잡해 지고 혼잡스러워서 비용증대뿐 아니라 고객의 요구에 적절히 대응 할 수 있는 능력을 상실하게 되는 경우가 많다고 지적 하였다. Skinner는 이러한 연구결과를 토대로 보다 장기적인 관점에서 戰略的으로 제조 施設計劃을 수립해 나가는 일이 중요하다고 주장하였다.

垂直統合을 포함한 대부분의 生産戰略에 관한 연구들은 case별 심층연구 또는 통계적 분석에 초점을 맞추어 온 반면, 개별기업 차원에서의 意思決定에 도움이 될 수 있는 계량 모델의 構築을 위한 연구는 거의 이루어지지 않았다. 이러한 현상은 戰略的問題의 특성에 기인하는 바도 없지 않다. 즉, (1) 戰略的 變數들을 計量化 또는 模型化 하는 것이 용이하지 않거나, (2) 복잡하게 模型化된 問題들을 풀기위한 적절한 解法이 잘 발견되지 않는 등이 그것이다.

그러나 생산 네트워크에 관한 意思決定의 중요성을 생각해 볼 때 우리는 計量化 할 수 있는 요소들을 분석할 수 있는 模型을 구축하고, 이러한 計量模型을 이용하여 대안들을 計量的으로 평가해 보는 것이 요망된다.

본 고에서는 생산 물류 비용을 극소화 하기 위한 垂直統合 意思決定模型을 설계하였으며 그 解法을 개발하였다. 이 模型에서는 수송비용은 물론이고 규모경제와 생산의 복잡성이 비용에 미치는 영향 까지도 고려되어 진다. 同模型에 의해 취급되어지는 垂直統合 問題의 構造는 [그림 1]과 같다.

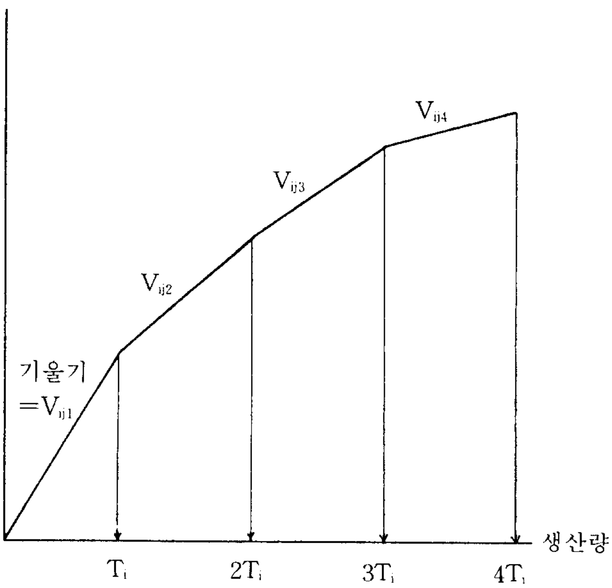
同模型이 지원할 수 있는 주요 意思決定 부문은 아래와 같다.

(1) 부품공장을 가동하는 편이 외주형태를 유지하는 것보다 경제적인가?
(2) 부품공장을 가동하게 된다면 그 위치는 어디에 둘 것인가?
(3) 각 공장(부품 및 완제품 공장)에서 어떤 품목들을 얼마만큼 생산하는 것이 경제적인가?

(4) 부품공장 가동시 외부로부터의 부품수요를 얼마나 충족시킬 것인가?

위 문제는 規模經濟에 의한 비용효과를 반영한 漸減的非線型(concave)混合整數計劃(mixed integer programming:MIP)으로 표현될 수 있다. 그러나 이러한 非線型問題를 푸는 과정에서 全域的(global)最適解를 찾지 못하는 경우가 흔히 발생하며, 더구나 실제 data의 수집과정에서 정확한 非線型曲線을 도출해 내는 것은 매우 힘든 일이며 현장 종사자의 경험이나 推定에 의해 단지 몇 개의 구간별로 단위 생산비용을 도출해 내는 것이 보통이다. 이러한 이유에서 위의 垂直統合問題는 漸減的 꺾은선 混合整數計劃(piecewise linear concave MIP)으로 설계 되었다.

$$생산비용 = \sum_t V_{ijt}\ X_{ijt}$$



[그림 2] Subplant ij에서의 꺾은선 비용곡선

생산량 구간	1	2	3	4
(0,1)변수	q_{ij1}	q_{ij2}	q_{ij3}	q_{ij4}
연속 변수	X_{ij1}	X_{ij2}	X_{ij3}	X_{ij4}

위 問題에 쓰여지는 계수와 결정변수는 다음과 같다.

r =원재료를 나타내는 subscript
v=원재료 공급자를 나타내는 subscript
i =부품을 나타내는 subscript
j =자체 부품 공장을 나타내는 subscript
s =외부 부품 공급자를 나타내는 subscript
k=조립 공장을 나타내는 subscript
d=외부 부품 수요자를 나타내는 subscript
t =꺾은선 비용곡선에서의 생산량을 나타내는 구간 ([그림 2]참조)

(계수)

F_j =부품공장 j를 가동하는데 소요되는 연간고정비용
F_{ij} =부품공장 j에서 부품라인 i를 가동하는데 드는 연간 고정비용
C_{vjr} =원재료 r을 원재료 공급자 v로 부터 부품공장 j로 반입하는데 드는 단위비용
C_{ijk} =부품 i를 부품공장 j로 부터 조립공장 k로 이송하는데 드는 단위비용
C_{isk} =부품 i를 부품공급자 s로 부터 조립공장 k로 반입하는데 드는 단위비용
V_{ijt} =부품 i를 부품공장 j에서 생산할 경우 생산량 구간 t에서의 단위변동 생산비용
p_{ijd} =부품 i를 부품공장 j로 부터 외부수요자 d에게 판매할 경우 단위수익
S_{rv} =원재료 공급자 v의 원재료 r의 공급능력
U_{ri} =단위부품 i당 소요되는 원재료 r의 수량
S_{is} =부품공급자 s의 부품i 공급능력
CAP_j =부품공장 j의 생산능력
R_{ij} =단위부품 i당 부품공장 j의 생산설비 사용율
T_i =부품 i의 생산량 구간
D_{ik} =조립공장 k에서 필요로 하는 부품 i의 수량
D_{id} =부품 i에 대한 외부수요자 d의 수요 물량

한도

(결정변수)

q_j =부품공장 j가 가동될 경우 1, 그렇지 않을 경우 0

q_{ij} =부품공장 j에서 부품라인 i가 가동될 경우 1, 그렇지 않을 경우 0

q_{ijt} =부품공장 j내 부품라인 i에서 생산량 구간 t가 가동될 경우 1, 그렇지 않을 경우 0

X_{ijt} =부품공장 j내 부품라인 i에서 생산량 구간 t에서의 생산량

X_{vjr}=원재료 공급자 v로 부터 부품공장 j로 반입되는 원재료 r의 수량

X_{ijk}=부품공장 j로 부터 조립공장 k로 이송되는 부품 i의 수량

X_{isk}=부품공급자 s로 부터 조립공장 k로 반입되는 부품 i의 수량

X_{ijd}=부품공장 j로 부터 외부수요자 d에게로 반출되는 부품 i의 수량

상기 notation을 이용하면 우리의 垂直統合問題는 아래와 같이 표기될 수 있다.

(MILP)

$$\underset{q=(0,1)}{\text{Minimize}} \quad Z=\sum_{j}F_j\ q_j+\sum_{i,j}F_{ij}\ q_{ij}+\sum_{i,j,t}V_{ijt}\ X_{ijt}$$

$$X\geq 0 \quad +\sum_{v,j,r}C_{vjr}\ X_{vjr}+\sum_{i,j,k}C_{ijk}\ X_{ijk}$$

$$+\sum_{i,s,k}C_{isk}\ X_{isk}-\sum_{i,j,d}P_{ijd}\ X_{ijd}$$

S.T.

(1) $q_{ij}\leq q_j \qquad \forall_{ij}$

(2) $q_{ijt}\leq q_{ij} \qquad \forall_{ijt}$

(3) $q_{ijt}\leq q_{ij(t-1)} \qquad \forall_{ij}$ and $t\geq 2$

(4) $X_{ijt}\leq T_i\ q_{ijt} \qquad \forall_{ijt}$

(5) $X_{ijt}\geq T_i\ q_{ij(t+1)} \qquad \forall_{ijt}$

(6) $\sum_{i,t}R_{ij}\ X_{ijt}\leq CAP_j \qquad \forall_j$

(7) $\sum_{k}X_{isk}\leq S_{is} \qquad \forall_{is}$

(8) $\sum_{j}X_{vjr}\leq S_{rv} \qquad \forall_{rv}$

(9) $\sum_{i,t}U_{ri}\ X_{ijt}\leq\sum_{v}X_{vjr} \qquad \forall_{jr}$

(10) $\sum_{k}X_{ijk}+\sum_{d}X_{ijd}\leq\sum_{t}X_{ijt} \qquad \forall_{ij}$

(11) $\sum_{j}X_{ijk}+\sum_{s}X_{isk}=D_{ik} \qquad \forall_{ik}$

(12) $\sum_{j}X_{ijd}\leq D_{id} \qquad \forall_{id}$

(13) 意思決定者의 q_j, q_{ij}, q_{ijt}에 관한 自意的 統制

목적 비용함수는 공장고정비용, 제품라인에 따른 고정비용, 생산변동비용, 원재료 반입비용, 공장간 부품운송비용 및 외부 공급자로 부터의 부품조달비용을 포함하며, 외부 부품수요에 의한 수익은 총 비용서 차감된다. 이와 관련한 制約式들은 아래와 같이 설명될 수 있다.

(1)=부품공장 j가 가동될 경우에만 부품라인 i가 공장 j내에서 가동될 수 있다.

(2)=부품공장 j내 부품라인 i에서의 생산량 구간 t는 同工場 및 부품 라인이 열렸을 경우에만 가동될 수 있다.

(3)=부품공장 j내 부품라인 i에서의 생산량 구간 t($t\geq 2$ 경우)는 구간 1부터 $t-1$이 가동된 후가 아니면 가동될 수 없다.

(4)=생산량 구간 t에서의 생산량은 그 구간을 초과할 수 없다.

(5)=생산량 구간 t는 다음구간 $(t+1)$이 가동되기 전에 full로 가동 되어야 한다.

(6)=부품공장 j의 생산능력

(7)=부품공급자 s의 부품 i공급능력

(8)=원재료 공급자 v의 원재료 r공급능력

(9)=부품공장 j에서의 원재료 r에 대한 수요 등식

(10)=부품공장 j에서의 부품생산과 반출에 대한 등식

(11)=조립공장 k에서의 부품 i에 대한 수요 등식

(12)=외부 수요자 d의 부품 i에 대한 수요 한도

위 模型에서는 각 제품라인 별로 생산량이 증가함에 따라 單位變動費用이 감소하는 規模經濟構造를 나타내고 있다. 더구나 漸減的 單位生産變動費用構造 외에 공장고정비용 및 제품라인 고정비용이 별도로 존재하여 공장 전체 및 제품 라인별로 規模經濟 및 範圍經濟가 나타남을 보여주고 있다.

이러한 費用構造에 따라 운용의 복잡성에 의한 非經濟性(즉 범위의 非經濟性)이 반영되기도 하는데, 어떤 공장에서 다수의 제품라인을 생산할 경우 그 공장은 많은 제품라인 고정비용을 떠맡게 되어 공장 전체로 볼때 단위생산 비용이 증가할 것이다. 그 이유는 同工場의 전체 생산능력이 한정되어 있으므로 제품라인별로 규모경제를 실현할 수 있는 여력이 없어지는 데에도 기인한다. 반면, 소수의 제품라인만을 취급하는 공장에서는 적은 제품라인 고정비용을 부담하게 되고 따라서 생산변동비용이 낮게 된다. 물론 소수의 제품라인 취급에 의한 규모생산으로 인한 비용절감은 공장 고정비용(가동 공장의 수에 의해 결정), 원재료의 반입비용, 부품의 이송비용 등과 상충관계에 있음을 유념하여야 한다.

2. 解法과 관련한 旣存 研究

앞 절에서 설명한 모델은 고정 및 비선형 변동비용을 포함하는 네트워크 설계문제로 분류될 수 있다. 따라서 본 절에서는 이와 유사한 시스템적 특성을 지닌 問題들을 위해 개발된 解法들에 主眼點이 주어질 것이다. 보다 광범위한 생산 분배 시스템의 설계문제에 대한 해법들의 소개는 [17]을 참조하기 바란다.

非線型曲線을 포함하는 네트워크 설계문제는 주로 도심 및 고속도로 네트워크 설계를 위해 다루어져 왔다 ([6], [12], [14]). 이러한 問題들에 나타나는 점증적(convex) 비용은 도로의 혼잡이나 병목현상으로 인해 증가하는 이용자비용을 나타낸다. Le Blanc[14]은 예산이라는 제약조건 하에서 교통혼잡을 최소화하기 위해서는 어느 (연결)도로가 증설되어야 하는가에 대한 問題를 다루고 있다. 이를 효율적으로 풀기 위하여 복합정수(mixed integer) 프로그래밍 기법과 분단 탐색법이 제안되고 있으나, 실제로 이러한 기법을 이용하여 해결한 예제는 단지 5개의 (0,1)결정변수를 지니고 있을 뿐이었다.

[6]과[12]는 豫算制約下에서의 무제한 용량의 複合整數 輸送 네트워크 設計問題의 解決에 Generalized Benders Decomposition(GBD) 技法을 적용한 바 있다. Hoang[12]은 위 問題 해결에 있어서, 問題를 두 부분 즉 整數部分(主問題: master problem)과 非整數部分(副問題:continuous subproblem)으로 구분하여 순차적으로 풀어가는 방법을 취하고 있다. 副問題는 점증적 비용특성을 지닌 다수제품 흐름 問題이며, 이로부터 나오는 쌍대변수치는 主問題에 도입할 절단면(cutting plane)을 도출하는데에 이용된다. 同解法을 적용하여 얻은 실험결과는 매우 고무적인 것이었다. 그러나 Hoang의 기법은 제한적 용량 특성을 지니는 시설계획 問題에는 직접 적용될 수 없는 아쉬운 면이 있다.

Soland[24]는 분단 탐색법의 범주내에서 非線型 模型 問題의 解法을 제시한 바있다. 同解法은 분리 가능한 concave 費用曲線을 線型으로 단순화한 특수 해법이라 할 수 있다. 그러나 계산적인 부담 때문에 소규모 問題에만 적용될 수 있다는 것이 同解法의 커다란 短點으로 지적되고 있다.

ADD/DROP기법([7], [8], [26]) 또한 concave 費用曲線 특성을 지닌 물류거점입지 선정문제에 사용된 바 있다. Whitaker[26]는 단일 제

품 분배 시스템 설계문제에 同技法을 적용하였는데, 그는 먼저 잠정해를 구하기 위해 ADD/DROP 기법을 사용한 다음 더 좋은 解를 구하기 위해 交換(INTERCHANGE)技法을 사용하는 방식을 반복적으로 행하였다. 同解法은 [26]에서 제시된 단순한 예제들에 대해서는 매우 효과적이었으나, 대규모의 복잡한 問題를 푸는데 있어서는 교환단계에 커다란 어려움이 수반된다. 다시 말해서 교환 가능한 SET의 수가 감당할 수 없을 만큼 커진다는 것이다. Whitaker 역시 그의 解法이 전체적으로 최소치와는 거리가 있는 국부적 최소치 밖에 발견하지 못할 가능성이 있다는 것을 인정하고 있다. 더구나 현재 개발된 非線型計劃技法의 한계로 인하여 각 단계에서의 점감적 副問題의 全域的 最適解를 구해내는 것도 쉬운일이 아니다.

최근 Moon[18]은 다층적 점감적 비용특성을 가진 問題의 解法을 개발하기에 이르렀다. Moon은 유명한 Geoffrion and Graves[10]의 다층적, 다수제품 분배 시스템 설계문제(선형적 변동비용을 지님)를 규모의 경제를 감안한 점감적 비용模型으로 바꾸어 이를 효율적으로 풀수있는 GBD 기법을 개발 하였다. 그는 Benders cut에 사용될 쌍대가격을 concave問題가 아닌 선형문제를 풀어서 구하였는데, 이는 물류거점과 고객과의 특수한 관계, 즉 한개의 물류거점은 그 취급 지역내 여러 고객을 상대로 영업을 하는 반면 각 고객은 한개의 물류거점으로 부터만 제품을 배분받을 수 있다는 특수한 문제구조에 근거하고 있다. 선형으로 도출된 쌍대가격은 점감적 비용곡선을 감안하여 차후에 조정되는 형식으로 최적치를 찾아 나가는데 사용되고 있다. Moon은 그의 GBD기법은 이러한 사후 조정작업을 가미 하여야 좋은 해의 도출이 가능하다고 강조하고 있다. 이는 조정작업이 적절히 이루어질수 없는 복잡한 問題에 대하여 일반적인 GBD기법을 직접적으로 적용할 경우 좋지못한 해가 도출될 우려가 있다는 점을 우리에게 시사하고 있는 것이다.

요약해서 말하자면, 현실에서 흔히 발생할 수 있는 규모의 concave, 복합정수문제의 해결을 위한 解法의 개발은 아직 그 실적이 미미한 수준이라 할 수 있다. 또한 본논문에 제시된 문제는 전통적인 시설계획문제보다 훨씬 복잡한 바, 그 問題의 구조가 생산 뿐 아니라 원자재의 공급 및 공장간의 부품이송 까지도 포함하고 있다. 더구나 부품에 대한 자체 사용 뿐 아니라 외부 구입자의 존재 까지도 고려 함으로써 問題의 구조는 더욱 복잡화 되어가고 있다.

다음절에서는 同問題를 효율적으로 해결하기 위하여 非線型問題를 어떤 방식으로 선형화 하였으며, 이렇게 변형된 問題를 어떤 절차를 거쳐서 最適化 하였는가를 설명하기로 한다.

3. 問題의 효율적 解法

현재 사용가능한 것으로 알려진 MIP 소프트웨어가 해결할 수 있는 問題의 크기가 매우 제한적이며 더구나 위에서 설계된 問題의 구조는 상당히 복잡하여, 원모델인 (MILP)의 크기가 극히 작은 경우를 제외하고는 이를 직접 풀기는 不可能 하였다. 따라서 (MILP)를 아래에 기술된 (MILP)'으로 변형함이 필요 하였다. 변형된 모델인 (MILP'의 制約式인 (A4), (A5) 및 (A6)은 본 장에서 제시한 decomposition 解法을 가능하게 하는 key가 되는 식으로서 다음과 같이 설명될 수 있다.

제품라인 공장 ij에서

① 制約式(A5) : 최종적으로 가동되는 구간에서 생산되는 물량은 구간 크기인 Ti를 초과하지 못하며

② 制約式(A4) : 그 이전 구간에서의 물량은 구간

크기인 Ti와 같아야 하며

③ 制約式(A6) : 최종구간 이후에 위치한 구간에서는 생산되는 물량이 있어서는 안된다.

(MILP)' : 변형된 模型

$$\underset{q=(0,1)}{\text{Minimize}} \quad Z=\sum_j F_j\ q_j+\sum_{i,j} F_{ij}\ q_{ij}+\sum_{i,j,t} V_{ijt}\ X_{ijt}$$

$$X\geq 0 \quad +\sum_{v,j,r} C_{vjr}\ X_{vjr}+\sum_{i,j,k} C_{ijk}\ X_{ijk}$$

$$+\sum_{i,s,k} C_{isk}\ X_{isk}-\sum_{i,j,d} P_{ijd}\ X_{ijd}$$

S.T.

(A1) $q_{ij}\leq q_j$ $\quad\forall_{ij}$

(A2) $q_{it}\leq q_{ij}$ $\quad\forall_{ijt}$

(A3) $q_{ijt}\leq q_{ij\ (t-1)}$ $\quad\forall_{ij}$ and $t\geq 2$

(A4) $X_{ijt}=T_i$ $\quad\forall_{ij}$ and $t<t^*$

(A5) $X_{ijt}\leq T_i$ $\quad\forall_{ij}$ and $t=t^*$

(A6) $X_{ijt}=0$ $\quad\forall_{ij}$ and $t>t^*$

where t^* is defined by

$q_{ijt^*}=1$ and $q_{ij(t^*+1)}=0$

(A7) $\sum_{it} R_{ij}\ X_{ijt}\leq CAP_j$ $\quad\forall_j$

(A8) $\sum_k X_{isk}\leq S_{is}$ $\quad\forall_{is}$

(A9) $\sum_j X_{vjr}\leq S_{rv}$ $\quad\forall_{rv}$

(A10) $\sum_{i,t} U_{ri}\ X_{ijt}\leq\sum_v X_{vjr}$ $\quad\forall_{jr}$

(A11) $\sum_k X_{ijk}+\sum_d X_{ijd}\leq\sum_t X_{ijt}$ $\quad\forall_{ij}$

(A12) $\sum_j X_{ijk}+\sum_s X_{isk}=D_{ik}$ $\quad\forall_{ik}$

(A13) $\sum_j X_{ijd}\leq D_{id}$ $\quad\forall_{id}$

(A14) 의사결정자의 q_j, q_{ij}, q_{ijt}에 관한 자의적 통제

Benders decomposition解法下에서의 (MILP)'은 MIP主問題와 LP副問題로 분리되어 진다. 우선 主問題(MIP)에 의해 어떠한 整數解가 도출되면 (MILP)'에서 남는 問題는 副問題인 (LP)형태가 된다. 그러면 이 (LP)를 풀어 쌍대가격(dual price)set을 도출한 다음 이로써 Benders cut을 만들어 먼저번 (MIP)에 추가하여 풀음으로써 새로운 整數解를 도출하게 되고, 이러한 과정은 미리 정해 놓은 종결조건을 만족할 때 까지 계속된다.

(LP)副問題와 (MIP)主問題는 아래와 같이 기술되어 진다.

(LP)

$$\text{Minimize} \quad Z(q^H)=\sum_j F_j\ q_j^H+\sum_{i,j} F_{ij}\ q_{ij}^H+\sum_{i,j,t} V_{ijt}\ X_{ijt}$$

$$X\geq 0 \quad +\sum_{v,j,r} C_{vjr}\ X_{vjr}+\sum_{i,j,k} C_{ijk}\ X_{ijk}$$

$$+\sum_{i,s,k} C_{isk}\ X_{isk}-\sum_{i,j,d} P_{ijd}\ X_{ijd}$$

S.T.

(14) $X_{ijt}=T_i$ $\quad\forall_{ij}$ and $t<t^*$

(15) $X_{ijt}\leq T_i$ $\quad\forall_{ij}$ and $t=t^*$

(16) $X_{ijt}=0$ $\quad\forall_{ij}$ and $t>t^*$

and (6)−(12)

단, t^*는 $q_{ijt^*}=1$, $q_{ij(t^*+1)}=0$에 의해 정의 된다.

만약 위의(LP)問題가 어떠한 제약조건으로 해가 도출되지 않을 경우 아래(LP)'을 대신 풀어 쌍대가격 set를 구한다.

(LP)' Minimize α

S.T. (6)' $\sum_{it} X_{ijt}-CAP_j\leq\alpha$ $\quad\forall_j$

and (14)−(16), (7)−(12)

(MIP)

Minimize Yo

q=(0,1)

S.T.

(17a) $Yo\geq Z^n+\sum_j F_{j(qj-qj^n)}+\sum_{i,j} F_{ij}(q_{ij}-q_{ij}^n)+$

$$+\sum_{i,j,t} T_i\pi_{ijt}^n(q_{ijt}-q_{ijt}^n)$$

$n=1,\cdots\cdots,N$

(17b) $\sum_{i,j,t}\lambda_{ijt}^m(X_{ijt}^m-T_iq_{ijt})\leq 0$

$m=1,\cdots\cdots,M$

(18) $\sum_{it} T_i\ q_{ijt}\leq CAP_j+\sum_i T_i\ q_{ij}$ $\quad\forall_j$

(19) $\sum_{k} D_{ik} \le \sum_{j,t} T_i\ q_{ijt}$

$\le \sum_{d} D_{id} + \sum_{k} D_{ik} + T_i\ \sum_{j} q_{ij} \qquad \forall_i$

and (1)-(3), (13)

단, π_{ijt}는 (LP)의 制約式 (14)-(16)과 관련한 쌍대값이며, λ_{ijt}는 (LP)'의 制約式 (14)-(16)과 관련한 쌍대값 임.

解法의 效率性을 높이기 위해서 가능한 非最適(nonoptimal) 또는 實行不可能(infeasible) 한 整數解가 도출되지 않도록 (MIP)에 制約式(18)과 (19)를 추가 하였다. 制約式(18)은 위(MIP)에서 도출되는 q_{ijt}(整數解)를 이용하여 (LP)를 풀 경우 동(LP)가 실행가능(feasible)하게 되도록 각 공장 j의 생산능력을 고려하여 q_{ijt}해를 미리 조정하는 역할을 한다. 制約式 (19)는 비최적 q_{ijt}해를 미리 방지하는 역할을 한다. 즉 각 제품에 있어서 수요조건을 충족 시키기 위해 필요한 충분한 수의 생산구간을 가동시켜야 함과 동시에, 과잉생산을 방지 할 수 있도록 가동생산 구간의 수를 제한한다.

이러한 제약조건들은 (MIP)가 비최적 또는 실행불가능한 整數解를 도출해 내는것을 미리 방지함으로써 解法의 效率性을 높이는 역할을 하는 바, 이러한 논리는 Magnanti and Wong[15]의 연구결과에 의해 뒷받침 된다. 즉 가능한한 (MIP)가 도출할 수 있는 해의 영역을 좁힘(最適解를 배제하지 않는 한)으로써 보다 효과적인 Benders cut이 도출될 수 있는 것이다.

Benders decomposition의 절차는 아래와 같다.

step 1

종료허용계수 ε을 정하고, 첫 (LP)에 사용될 최초정수결정변수를 도출하기 위해 (MIP)를 푼다. 반복지수 H=1로 두고 Benders cut 지수 N=0, M=0으로 둔다. upper bound 값으로 $Z^{UB}=+\infty$로 둔다.

step 2

주어진 q^H 값을 사용하여 $(LP)^H$를 푼다. 이때

(1) $(LP)^H$가 실행가능할 경우, 목적함수 $Z(q^H)$, primal 해인 X^H 그리고 dual 해인 $\pi_{ijt}{}^H$를 구할 수 있다. 이 경우 upper bound를 $Z^{UB}=\min\{Z^{UB} \cdot Z(q^H)\}$로 조정한다. 만약 새로운 upper bound, 즉 $Z^{UB}=Z(q^H)$가 되었을 경우 $q^*=q^H$, $X^*=X^H$로 둔다.
$N=N+1$로 두고, $\pi^N=\pi^H$, $q^N=q^H$ 그리고 $Z^N=Zq(^H)$로 값을 바꾸고 N번째의 Benders cut인 (17a)를 (MIP)에 추가한다.

(2) $(LP)^H$가 실행불가능한 경우, $M=M+1$로 두고 q^H값을 사용하여 (LP)'을 푼다. 이 결과 primal 해인 X^M과 dual 解인 $\lambda_{ijt}{}^M$을 얻게 되는데, 이를 이용하여 M번째의 Benders cut인 (17b)를 (MIP)에 추가한다.

step 3

$(Z^n,\ \pi^n: n=1,\cdots\cdots,N)$과 $(X^m,\ \lambda^m: m=1,\cdots\cdots,M)$의 값이 주어진 $(MIP)^H$를 푼다. 이로써 q^{H+1}과 lower bound Z^{LB}를 얻게된다.

만약 $Z^{LB} \ge Z^{UB}-\varepsilon$ 또는 H가 미리 정해놓은 허용반복계수에 달하는 경우 반복절차를 종료한다. 그러나 종료조건이 만족되지 않았을 때는 $H=H+1$로 하여 step 2로 부터 절차가 반복된다.

Benders decomposition解法에 의한 절차의 종료와 最適解의 도출은 다른 저자([1], [9]에 의해 입증된 바 있으므로 여기에서는 생략하기로 하고, 대신에 (MIP)에 첨가된 두 制約式(18)과 (19)가 (MIP)'의 最適解에 영향을 주지 않음을 설명하고자 한다.

(MILP)'에 制約式(18), (19)를 추가한 問題를

(MILP)"이라고 하자. 制約式(18)과 (19)는 어떠한 경우에도 (MILP)의' 最適解를 배제하지 않음으로 (MILP)'과 (MILP)"의 最適解는 동일하다. 이러한 의미에서 (MILP)'과 (MILP)"은 동일한 問題로 간주될수 있다.

4. 解法의 實證分析

위의 解法은 GAMS([12], [13])를 이용하여 프로그램화 되었다. GAMS는 세계은행에서 개발되어 현재 널리 쓰여지고 있는 고차원적인 模型化 시스템으로서 프로그램내에서 선형, 비선형, 정수선형 문제해결을 위한 소프트웨어를 불러내어 쓸 수 있도록 되어있다. 아래에 설명된 예제들에 대하여 각 問題의 LP副問題는 MINOS 3[19] 그리고 MIP主問題는 ZOOM/XMP[16]를 GAMS를 통하여 불러내어 풀었다.

앞에서 제시한 解法의 效率性을 검증하기 위하여 3개의 예제 set를 이용하였다. 첫번째 set은 원재료의 종류=3, 원재료공급자수=3, 부품의 종류=2, 부품공급자수=3, 부품공장수=3, 생산량 구간수=3, 조립 공장수=3, 그리고 외부 부품 수요자=3 (결과적으로 27개의 정수결정변수 및 99개의 연속결정변수를 이룸)이 logistics체제를 가정 하였고, 두번째, set은 첫번째 set와 비교하여 부품수=3, 생산량 구간수=4, 그리고 조립 공장수=4로 logistics체제가 변형(결과적으로 48개의 정수결정변수 및 162개의 연속결정변수)되었고 세번째 set은 다시 부품수=4, 부품 공장수=4, 생산량 구간수=4 그리고 조립공장수=5, (84개의 정수결정변수 및 288개의 연속결정변수)로 변형 되었다.

각 set은 반입비용, 고정 및 변동생산비용 그리고 공장간 이송비용 등 비용 요소들의 값을 무작위로 변경시켜 만들어진 열 개의 개별문제로 구성되어 있다.

이제 예제들의 最適化 과정에서 특히 주의 깊게 살펴볼 것은 절차종료에 소요되는 반복회수 및 問題의 크기가 同회수에 미치는 영향이다. 종료허용계수 $\varepsilon=0.0001$을 사용한 검증결과는 〈표1〉에 요약되어 있다.

우리가 제시한 解法은 모든 예제에 있어서 단지 몇 회만의 반복절차를 거쳐서 最適解를 도출해 낼수 있었다. (LP)副問題가 실행불가능한 경우는 전무 하였으며, 이는 앞에서 설명한 두개의 추가 제약 조건이 실행불가능한 정수결정변수의 발생을 방지하는 데에 매우 효과적 이었음을 설명해 주기도 한다. VAX8700을 이용할 경우 첫번째 예제 set에 있어서의 最適化 소요시간은 평균 29.84초, 평균반복회수는 2.1을 기록 하였다.

두번째 set에 있어서는 평균 42.34초의 最適化 소요시간과 2.9의 평균반복회수, 그리고 세번째 set에 있어서는 80.67초의 最適化 소요시간과 3.8의 평균반복회수를 나타내었다. 最適化 소요시간은 問題의 크기에 따라 서서히(급격하지 않게)증가하였음을 볼 수 있다. 위에서 제시한 Benders decomposition기법으로 풀 수 있는 問題의 크기는 결국 이용 가능한 MIP 프로그래밍 기법과 LP프로그래밍 기법에 의존 한다고 할 수 있다. 또한 最適化 소요시간은 프로그래밍 소프트웨어와 기법의 종류에 따라 현저히 달라 질 수 있음도 유념하여야 한다.

참고로 동일한 예제들을 (MILP)형태로 ZOOM (branch-and-bound기법을 사용)을 이용하여 풀어보았다.

첫번째 set에서는 분단탐색법(branch-and-bound)에 의해 소요된 평균 시간이 Benders decomposition 방식으로 소요된 시간보다 훨씬 짧은 15.93초 이었으나, 두번째 set에서는 소요시간이 평균 64.72초로 늘어났다. 분단탐색법의 적용결과

〈표 1〉 解法의 效率性 비교

Problem Set	Test Case	제안된Benders 解法 #Iteration	소요시간(초)	분단 탐색법 소요시간
I	1	2	28.36	16.31
	2	2	30.41	14.92
(27개의 정수	3	2	27.64	15.18
&	4	2	32.22	16.44
99개의 연속변수)	5	2	27.56	16.27
	6	2	29.44	13.96
	7	2	28.02	15.56
	8	2	30.83	16.21
	9	3	38.58	18.32
	10	2	26.34	16.17
	평균	2.1	29.84	15.93
II	1	3	42.66	65.79
	2	2	32.16	59.73
(48개의 정수	3	4	53.72	70.12
&	4	3	44.39	64.86
162개의 연속변수)	5	2	35.21	60.71
	6	3	43.49	65.93
	7	4	55.17	68.48
	8	2	33.82	59.34
	9	3	40.70	65.72
	10	3	42.08	66.51
	평균	2.9	42.34	64.72
III	1	4	82.75	290.63
	2	4	85.11	*
(84개의 정수	3	3	65.93	263.29
&	4	3	61.45	272.25
288개의 연속변수)	5	4	86.54	*
	6	5	100.43	*
	7	3	70.19	274.06
	8	4	87.36	295.74
	9	3	69.24	260.53
	10	5	97.72	*
	평균	3.8	80.67	276.42**

* ZOOM에 의해 最適化 되지 못한 問題들을 나타냄.

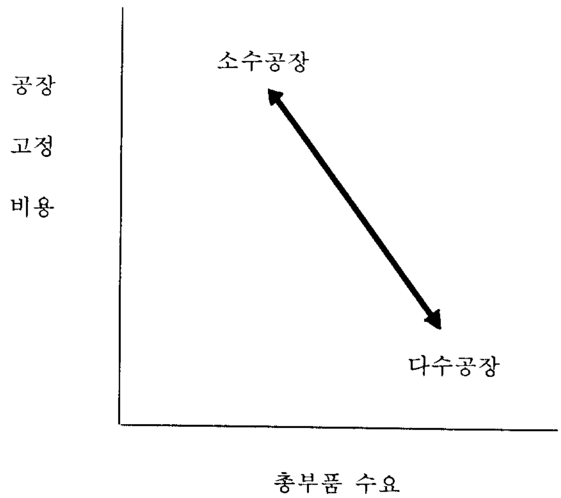
** 最適化된 問題들에 있어서 평균소요시간

最適化 소요시간이 問題의 크기에 따라 급격하게 증가됨을 볼 수 있었는데, 이는 분단탐색법의 한계점으로 널리 알려진 바이다. 더구나 세번째 set을 푸는데 있어서는 많은 경우 最適化가 이루어지지 못하였다. (同方式에 의해 해결할 수 있는 問題의 크기는 매우 제한되어 있음.)

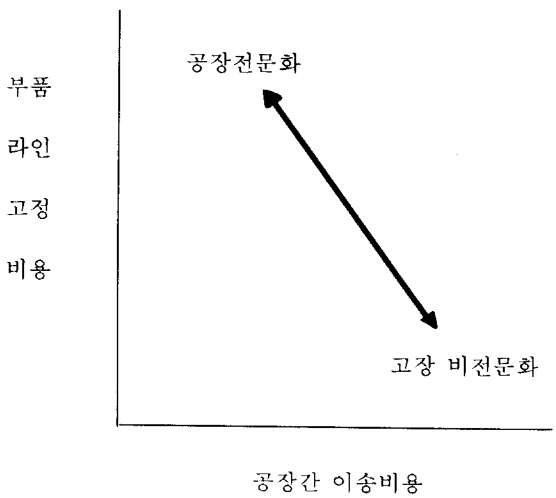
이상으로서 解法의 效率性에 대한 실증분석을 행하여 보았다. 이제 우리는 이러한 解法의 效率性 뿐만 아니라, 앞에서 제시된 模型이 얼마나 효과적으로 규모 및 범위의 경제성을 나타내었는지를 살펴보는 것도 의미있는 일이라 할 수 있다. 예를 들어 공장 전문화(focused plant) 전략은 규모의 경제를 달성하고 범위의 비경제성(복잡성)을 회피하기 위한 방안으로 사용되어진다. 우리의 模型에서는 이러한 논리가 부품라인별 규모경제, 부품라인별 고정비용, 공장전체의 고정비용 그리고 생산 용량의 제한 등의 명확화에 의해 형성되고 있다. 한편 공장전문화 전략은 공장간 부품이송에 소요되는 비용의 증가를 초래하기도 하는데, 우리의 模型은 이를 충분히 감안하고 있다.

다수부품공장전략은 공장전문화 전략에 극단적으로 상반되는 개념으로서 한 공장이 관련 조립공장에서 소요되는 대다수의 부품을 공급하는 체제를 지닌다. 이러한 full-line부품공장들은 공장간 이송에 있어서는 비용절감을 가능하게 하지만 생산에 있어서의 경제효과를 상실하게 된다. 물론 경제효과의 달성을 위하여는 이에 충분한 수요수준이 뒷받침 되어야 함은 당연하다.

우리는 공장 고정비용, 부품라인 고정비용, 공장간 이송비용 및 수요수준의 변화를 통하여 同모델에서의 最適化가 어떻게 달라지는지를 관찰하였다. 반복적 실행을 통한 실험결과는 그림 3과 4에서 분명하게 나타나고 있다. 〈그림 3〉은 공장고정비용과 부품수요수준(내부 및 외부)이 공장의 갯수에 미치는 영향을 보여주고 있다. 높은 수요 수준과 낮은 공장고정비용은 공장갯수의 증가를 유발하고 있는 바, 이는 높은 수준의 垂直統合(조립공장별 부품공장의 설립)이 이루어짐을 의미한다. 부품라인 고정비용과 공장간 이송비용이 공장별 부품라인 분담에 미치는 영향은 〈그림 4〉에서 잘 나타나고 있는 바, 높은 부품라인 고정비와 낮은 이송비용은 부품라인 생산에서의 규모경제를 가능하게 하는 공장전문화를 유도해 내고 있는 것을 볼 수 있다.



[그림 3] 공장고정비용과 수요수준이 최적공장 갯수에 미치는 영향



[그림 4] 부품라인 고정비용과 공장간 이송비용이 공장간 제품할당에 미치는 영향

5. 結　論

본 논문에서 우리는 하나의 垂直統合意思決定 모델을 제시하였는데 이는 기업들이 이와 관련한 問題를 해결하는데에 이용할 수 있는 분석의 틀을 제시함과 동시에 일반적 지침을 제공하기 위한 것이다.

위 모델은 규모와 범위의 경제성을 반영하고 있으며 또한 생산비용과 반입・반출등 수송비용간의 상충관계를 고려하고 있다.

예제의 最適化에 있어서 우리의 Benders decomposition 解法은 매우 효과적이었으며, 同解法에 의해 도출된 最適解는 각종 비용구조의 범위에 따른 최적 logistics체제의 변화형태를 엿볼 수 있게 하였다.

지금까지의 연구결과를 살펴볼 때 여기서 제시된 점감적 꺾은선 생산비용을 지닌 생산・물류체제의 설계를 위한 解法은 전무 하였다. 현재 개발되어 있는 비선형 프로그래밍기법들은 흔히 전역적 最適解의 발견에 실패하는 경우가 많으므로 이러한 問題의 해결에 여기서 제시된 問題의 변형과 Benders decomposition 解法이 매우 유용하게 쓰일 수 있을 것이다. 또한 유념할 것은 同解法은 漸減的 費用構造를 가진 問題뿐 아니라 꺾은선 비용함수로 변형될 수 있는 어떠한 비선형문제들(예, 漸減的, 漸增的, 또는 이의 混合型)에도 적용될 수 있다는 점이다.

참 고 문 헌

1. Benders, J.F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", *Numerische Mathematik*, 4 (1962), 238−252.
2. Bisschop, J. and A. Meeraus, "On the Development of a General Algebraic Modeling System in a Strategic Planning Environment", *Math. Prog. Study*, 20 (1982), 1−29.
3. Buzzell, R. D., "Is Vertical Integration Profitable?" *Harvard Business Review*, January-February (1983), 92−102.
4. Cohen, M. A. and H.L.Lee, "Manufacturing Strategy : Concepts and Methods", *The Management of Productivity and Technology in Manufacturing* : P. R. Kleindorfer (ED.), (1985) 153−188.
5. Cohen, M. A., H.L.Lee, and S. Moon, "A Planning Model for Manufacturing and Distribution Systems Design", Working Paper #87−07−03, Dept. of Dec. Sci., Wharton School, U. of Pennsylvania, 1987.
6. Cotes, G. and M.Laughton, "Large-Scale Mixed Integer Programming Benders-Type Heuristic", Institut de recherche de l'hydro-Quebec, Varennes, Quebec, Canada, 1981.
7. Drysdale, J.K. and P.J.Sandiford, "Heuristic Warehouse Location-a case history using a new method", *INFOR*, 7 (1969), 45−61.
8. Feldman, E., F.A.Lehrer, and T.L.Ray, "Warehouse Location Under Continuous Economies of Scale", *Management Science*, 12 (1966), 670−684.
9. Geoffrion, A. M., "Generalized Benders Decomposition", *J.Optim. Thry. Appl.*, 10 (1972), 237−260.
10. Geoffrion, A.M. and G.W. Graves, "Multicommodity Distribution System De-

sign by Benders Decomposition", ***Management Science***, 20 (1974), 822-844.

11. Hayes, R.H. and S.C.Wheelwright, ***Restoring Our Competitive Edge***. John Wiley & Sons, 1984.
12. Hoang, H.H., "Topological Optimization of Networks : A Nonlinear Mixed Integer Model Employing Generalized Benders Decomposition", ***IEEE Trans.***, AC-27 (1982), 164-169.
13. Kendrick, D. and A.Meeraus, "GAMS : An Introduction", Development Research Department, the World Bank, 1985.
14. LeBlanc, L. J., "An Algorithm for the Discrete Network Design Problem", ***Transp. Sci.***, 9 (1975), 183-199.
15. Magnanti, T.L. and R.T. Wong, "Accelerating Benders Decomposition : Algorithmic Enhancement and Model Selection Criteria", ***Operations Research***, 29 (1981), 464-484.
16. Marsten, R., "User's Manual for : ZOOM / XMP", Department of Management Information System,. U. of Arizona, 1987.
17. Moon, S., "Developments in Mathematical Supply Chain Network Design Models and Solution Algorithms", Working Paper #89-1, CBA, U. of Iowa, 1989.
18. Moon, S., "Application of Generalized Benders Decomposition to A Nonlinear Distribution System Design Problem", ***Naval Research Logistics.***, Vol. 36 (1989), 283-295.
19. Murtaph, B.A. and M.A.Saunders, "MINOS 5.0 User's Guide", Technical Report SOL 83-20, Systems Optimization Lab., Departmant of Operations Research, Stanford U, 1983.
20. Porter, M.E., ***Competitive Strategy: Techniques for Analyzing Industries and Competitors***, The Free Press, 1980.
21. Schoeffler, S., "Nine Basic Findings on Business Strategy", ***The PIMSletter***, No. 1 (1988).
22. Skinner, W., "The focused factory", ***Harvard Business Review***, May-June (1974), 113-121.
23. Skinner, W., ***Manufacturing:the Formidable Competitive Weapon***. John Wiley & Sons, 1985.
24. Soland, R. M., "Optimal Facility Location with Concave Costs", ***Operations Research***, 22 (1974), 373-382.
25. Vesey, J., "Vertical Integration : Its Effect on Business Performance", ***Managerial Planning***, May-June (1978).
26. Whitaker, R. A., "Some ADD-DROP and DROP-ADD Interchange Heuristics for Non-Linear Warehouse Location", J. Opl. Res. Soc., 36 (1985), 61-70.