

투영법에 의한 선형계획문제의 시각적 표현에 관하여

김우재* · 박순달*

On the Visual Representation of Linear Programming Problem by a Projection Method

Wooje Kim* and Soondal Park*

Abstract

The purpose of this paper is to show the graphic representation of a linear programming problem by a projection method. First, we develop a projection method which conserves the optimality in the projected space, and next we introduce an algorithm to visualize the feasible solution set and the solution process by the projection method. Finally, we give an example to represent a 4-dimensional linear programming problem graphically.

1. 서 론

선형계획법은 경영과학 분야에서 가장 널리 사용되고 있는 모형중의 하나이다. 그러나 선형계획법을 실제의 경영 및 행정에서 의사결정 도구로서 사용하기 위해서는 선형계획법에 익숙한 경영과학자의 도움을 필요로 한다. 이것은 선형계획법에서의 정식화과정, 풀이과정, 해의 분석과정등이 복잡하여, 선형계획법의 초심

자가 이러한 과정들을 수행하기가 상당히 어렵기 때문이다. 그런데 선형계획법의 풀이과정을 시각적으로 표현하게 되면 선형계획법의 비전문가도 선형계획법을 보다 쉽게 이해할 수 있게 되어, 선형계획법은 의사결정 도구로서 널리 활용될 수 있을 것이다. 따라서 본 연구에서는 다차원 선형계획법의 가능해집합과 풀이과정을 시각적으로 표현하는 방법에 대해 연구하였다.

지금까지 선형계획법을 시각적으로 표현하고

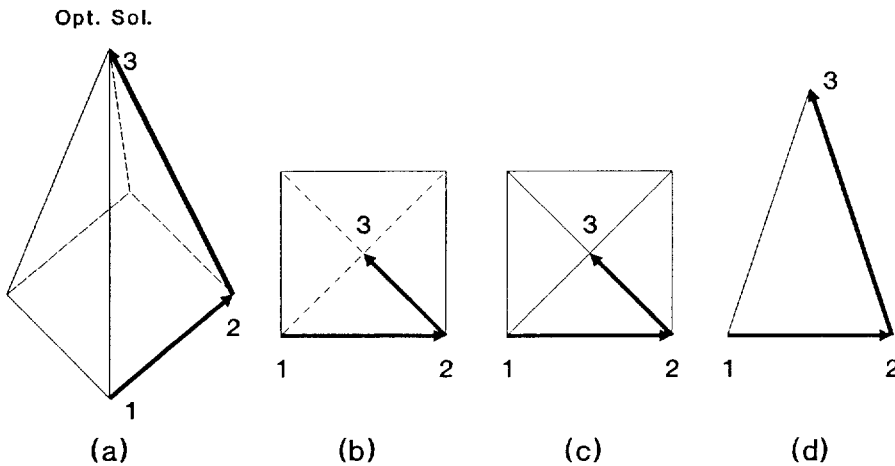
* 서울대학교 산업공학과

자 했던 연구로는 특정한 선형계획법 패키지 [5]에서 2차원 또는 3차원 선형계획법 문제에 한하여 가능해집합과 풀이과정을 도식적으로 보여주는 프로그램이 있었다. 또한, 4차원 이상의 일반적인 선형계획법 문제의 표현에서는 T. GAL[9]이 퇴화해를 표현할 때 해집합을 그래프(Graph)로 표현한 방법이 있었다. 이 방법은 단지 정점해의 연결상태만으로 표현한 것으로, 이 방법에 의해서는 가능해집합의 형태를 표현하기가 어려우며, 최적해를 표현하기에도 부적절하였다. 그러므로 본 연구에서는 투영법(projection method)에 의해서 가능해집합을 표현하고 선형계획법의 풀이과정을 표현하고자 한다.

일반적으로 3차원 물체는 컴퓨터 화면상의 2차원 평면으로 투영시켜 시각적으로 표현 가능하다. 이들의 투영방법에 대해서는 평행투영, 원근투영등 컴퓨터 그래픽스 분야에서 널리 연

구되었다[1,3,5]. 따라서 선형계획문제의 시각화는 다차원 선형계획문제의 해집합을 3차원 해집합으로 투영시키고, 투영된 3차원 좌표들을 다시 2차원 화면으로 투영하는 방법에 의해 표현 가능하다.

그런데 다차원 다면체를 낮은 차원의 공간으로 투영하는 방법에는 여러가지가 있다. 여기서 선형계획법의 풀이과정을 표현하는 것이 목표이므로 다차원 공간상에서의 최적해가 투영된 공간상에서도 최적의 상태를 유지하도록 표현하는 것이 유리하다. 예로서 [그림 1]의 (a)와 같은 3차원 다면체를 가능해집합으로 가지는 선형계획문제를 고려하자. 이 해집합에서 선형계획법의 풀이과정은 ①-②-③의 순서로 진행된다고 하자. 그러면 이러한 3차원 다면체를 한차원 낮은 2차원 공간상으로 투영하는 방법은 [그림 1]의 (b)(c)(d)와 같이 여러가지 방법이 있다.



[그림 1] 3차원 다면체와 투영방법

[그림 1]에서 (b)의 경우는 (a)를 아래쪽 방향에서 투영한 것으로 선형계획법의 진행과정을 표현하면 ①에서 ②까지의 과정만 표현할 수 있고 최적해는 표현할 수 없게 된다. 가리워진 선을 점선으로 표현하더라도 최적해가 투영된 다면체의 내부로 표현되기 때문에 최적의 느낌을 주기에는 적절하지 않다. (c)의 경우에는 (a)를 위쪽 방향에서 투영한 것으로 선형계획법의 진행과정을 표현하면 최적해가 내부점으로 표현된다. 이런 경우에도 최적해가 내부에 표현된다는 것은 시각적으로 최적의 느낌을 주기가 어렵다. 한편, (d)의 경우에는 (a)를 옆에서 투영한 것으로 선형계획법의 진행과정을 표현하면 최적해가 정점상에 나타나게 된다. 이 경우에는 투영된 공간상에서도 최적의 느낌을 그대로 유지한 채 선형계획법의 풀이과정을 표현할 수 있다. 그러므로 선형계획법의 풀이과정을 적절하게 표현하려면 (b),(c)와 같은 투영방법보다는 (d)와 같은 투영방법이 시각적으로 유리하다.

본 연구에서는 다차원 가능해집합에서의 최적해가 투영공간인 3차원 공간상에서도 최적의 상태가 유지될 수 있는 투영방법에 대해 연구하였으며, 이 투영방법에 의해 선형계획법의 풀이과정을 시각적으로 표현하는 방법에 대해 연구하였다.

2. 3차원 투영방법

다차원 선형계획문제의 해집합을 3차원 공간상에 투영하여 표현하게 되면, 다차원공간상의 정점들이 3차원공간상에서 반드시 정점으로 투영되는 것이 아니다. 즉, 다차원 공간상에서의

정점들은 투영공간상에서 3차원 다면체의 내부, 표면 또는 정점에 나타나게 된다. 그러므로 다차원 공간상의 최적점은 투영공간과 투영방법에 따라 3차원 공간상에서 내부점, 표면상의 점 또는 정점으로 나타날 수 있다.

그러나 최적점이 다면체의 내부점이 되도록 투영하는 방법은 선형계획법의 풀이과정을 표현할때 사용자에게 최적의 느낌을 주기에 적합하지 않다. 그러므로 원문제의 최적해가 투영된 공간상에서도 최적의 느낌을 줄 수 있는 투영공간과 투영방법을 구하고자 한다.

2.1 3차원 부분공간

다차원 선형계획문제의 해집합을 3차원 공간상에 투영하기 위한 부분공간(subspace)을 구해보도록 하자.

다차원공간의 부분공간에는 대단히 많은 3차원 부분공간이 존재한다. 그런데 목적함수벡터를 포함하는 3차원 부분공간을 구한 후, 부분공간상으로 가능해집합이 투영되면 이 부분공간상에서는 최적의 상태를 유지할 수 있다. 따라서 이러한 부분공간으로 투영시키면 최적의 상태가 유지되어 선형계획법의 풀이과정을 효율적으로 표현할 수 있다. 이러한 3차원 부분공간을 구하는 방법은 다음과 같다.

먼저 3차원 부분공간의 축을 형성하는 기저벡터를 구하자. 서로 독립인 정규벡터(normal vector)를 a_1, a_2, a_3 라고 둔다. 여기서 a_1, a_2, a_3 는 $(n \times 1)$ 벡터이다. 단, 3차원 부분공간에서 목적함수벡터를 포함하기 위해 a_i 을 $c/\|c\|$ 로 둔다.

그런데 3차원 부분공간의 각 축을 형성하는 기저벡터는 서로 수직이어야 한다. 따라서 서로 독립인 벡터 a_1, a_2, a_3 를 Gram-Schmidt의

직교화 과정[8]으로 다음의 직교벡터 v_1, v_2, v_3 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 \\ v_2 &= a_2 - (v_1^t a_2) v_1 / v_1^t v_1 \\ v_3 &= a_3 - (v_1^t a_3) v_1 / v_1^t v_1 - (v_2^t a_3) v_2 / v_2^t v_2 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $v_1^t v_2 = 0, v_2^t v_3 = 0, v_1^t v_3 = 0$ 이 성립하므로 v_1, v_2, v_3 는 서로 직교한다. 따라서 v_1, v_2, v_3 는 3차원 부분공간의 축을 형성하는 기저벡터가 된다.

다시 v_1, v_2, v_3 를 정규화하여 정규직교벡터인 q_1, q_2, q_3 를 구한다.

$$\begin{aligned} q_1 &= v_1 / \|v_1\| \\ q_2 &= v_2 / \|v_2\| \\ q_3 &= v_3 / \|v_3\| \end{aligned} \quad (2)$$

그러면 정규직교벡터 q_1, q_2, q_3 로 이루어지는 3차원 공간에서 목적함수벡터는 [그림 2]의 (a)와 같이 표현된다. 그런데 선형계획법의 풀이과정을 표현하기 위해서는 목적함수벡터가

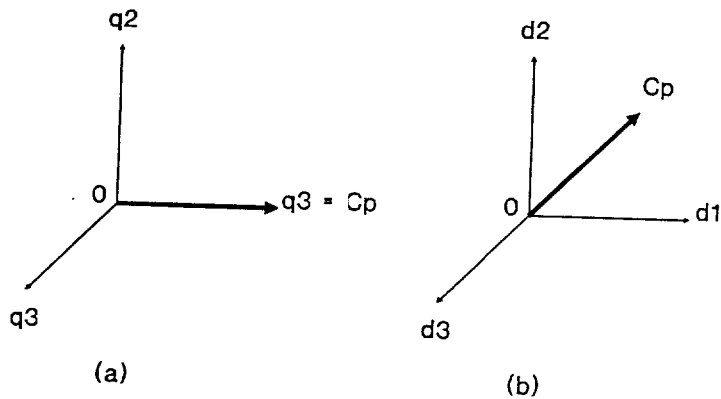
[그림 2]의 (a)와 같이 하나의 축 위에 위치하는 것 보다는 평면상에 존재하는 것이 시각적으로 유리하다. 따라서 [그림 2]의 (b)와 같이 목적함수 벡터를 평면상에 위치하도록 기저벡터 d_1, d_2, d_3 를 구한다.

[그림 2]의 (a)에서 q_1, q_2, q_3 가 이루는 공간상에서는 목적함수 벡터가 q_1 축 상에 나타나는 데, d_1 을 q_1 과 q_2 의 벡터 합으로 하고 d_2 를 q_1 과 $-q_2$ 의 벡터 합으로 두면, 기저벡터 d_1, d_2, d_3 로 이루어지는 3차원 공간상에서는 [그림 2]의 (b)와 같이 목적함수벡터가 d_1 과 d_2 의 평면상에 존재하게 된다. 즉, d_1, d_2, d_3 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} d_1 &= (q_1 + q_2) / \|q_1 + q_2\| = (q_1 + q_2) / \sqrt{2} \\ d_2 &= (q_1 - q_2) / \|q_1 - q_2\| = (q_1 - q_2) / \sqrt{2} \\ d_3 &= q_3 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $d_1^t d_2 = 0, d_1^t d_3 = 0, d_2^t d_3 = 0$ 이 성립하므로 d_1, d_2, d_3 는 서로 직교한다. 또한 d_1, d_2, d_3 는 정규벡터이다.

그러므로 목적함수벡터를 포함하는 3차원 부



[그림 2] 3차원 기저벡터와 목적함수벡터

분공간은 기저벡터 d_1, d_2, d_3 가 이루는 공간으로 구할 수 있다.

2.2 투영행렬

3차원 부분공간을 나타내는 행렬을 다음과 같이 두자.

$$D = [d_1, d_2, d_3]$$

여기서 행렬 D 는 d_1, d_2, d_3 의 열 공간 (column space)의 기저를 나타내는 $(n \times 3)$ 행렬이다. 그러면 3차원 부분공간으로의 투영행렬 (projection matrix)은 다음과 같다.

$$P = D(D'D)^{-1}D' \quad (P : R^n \rightarrow R^n)$$

여기서 P 는 d_1, d_2, d_3 가 서로 정규직교 (orthonormal)이므로 다음과 같은 보조정리가 성립한다.

[보조정리 1] 투영행렬 $P = DD'$ 이다.

증명 : $(D'D)^{-1} = I$ 임을 보이도록 하자.

그런데 d_1, d_2, d_3 가 정규직교이므로

$$d_i'd_j = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

가 성립한다.

그러므로 $D'D = I$ 가 되고 $(D'D)^{-1} = I$ 가 된다. 따라서 $P = D(D'D)^{-1}D' = DID' = DD'$ 이다. ■

2.3 가능해 집합의 투영

선형계획법 원문제를

$$\begin{aligned} & \text{Max } c'x \\ & \text{s.t. } Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

이라 하고, (4)의 가능해 집합을 K 라 하자. 그러면 $K = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ 이 된다. 그리고 (4)를 투영행렬 P 에 의해 3차원 부분공간상으로 투영한 문제를 다음과 같이 두자.

$$\begin{aligned} & \text{Max } c_p'x_p \\ & \text{s.t. } x_p \in K_p \end{aligned} \tag{5}$$

단, $K_p = PK = \{x_p | x_p = Px, Ax = b, x \geq 0\}$

그러면 K_p 는 (5)의 가능해 집합이 된다.

원문제의 목적함수벡터는 3차원 부분공간상에 포함되므로 투영행렬 P 에 의해 3차원 부분공간상으로 투영되더라도 그대로 남게 된다. 그래서 다음 보조정리가 성립한다.

[보조정리 2] (4)의 목적함수벡터 c 와 (5)의 목적함수벡터 c_p 는 동일하다.

증명 : 보조정리 1에 의해 $c_p = Pc = DD'c$ 가 성립한다.

그러면 먼저 $D'c$ 를 구해보자.

$$\begin{aligned} d_1'c &= (q_1'c - q_2'c) / \sqrt{2} \\ d_2'c &= (q_1'c + q_2'c) / \sqrt{2} \end{aligned} \text{가 된다.}$$

그런데 $a_i = c / \|c\|$ 에서 $c = a_i \|c\| = q_i \|c\|$ 이고, $q_1'q_1 = 0, q_2'q_2 = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} d_1'c &= (q_1'q_1 - q_2'q_2)(\|c\| / \sqrt{2}) = \|c\| / 2 \\ d_2'c &= (q_1'q_1 + q_2'q_2)(\|c\| / \sqrt{2}) = \|c\| / 2 \\ d_3'c &= q_3'q_3 \|c\| = 0 \text{ 이 된다.} \end{aligned}$$

그러면

$$\begin{aligned} DD'c &= [d_1 \ d_2 \ d_3] [\|c\|/\sqrt{2}, \|c\|/\sqrt{2}, 0] \\ &= (\|c\|/\sqrt{2})d_1 + (\|c\|/\sqrt{2})d_2 \\ &= (\|c\|/\sqrt{2})(d_1 + d_2) \text{ 가 된다.} \end{aligned}$$

$d_1 + d_2 = (q_1 - q_2)\sqrt{2} + (q_1 + q_2)\sqrt{2} = \sqrt{2}q_1$ 이므로

$$\begin{aligned} DD'c &= (\|c\|/\sqrt{2})\sqrt{2}q_1 \\ &= \|c\|q_1 = \|c\|(c/\|c\|) = c \text{ 가 된다.} \end{aligned}$$

따라서 $c_p = c$ 가 된다. ■

[정리 1] K 에서의 목적함수값 $c'x$ 는 K_p 에서의 목적함수값 $c_p'x_p$ 과 같다.

$$\begin{aligned} \text{증명 : } c_p'x_p &= (Pc)'(Px) = (c'P')(Px) = c'(P'P)x \\ &= c'Px \quad (\because PP' = P = P') \\ &= (Pc)'x = c'x \end{aligned} \quad \blacksquare$$

그러면 이제 선형계획법 원문제에서의 최적해가 목적함수벡터를 포함하는 3차원 부분공간에서도 최적이 유지된다는 다음 정리가 유도된다.

[정리 2] K 의 최적해를 x^* 라고 두면 3차원 부분공간으로 투영된 점 Px^* 는 K_p 에서 최적해가 된다. 또한, K 에서의 비최적해는 K_p 에서도 비최적해가 된다.

증명 : x^* 가 K 의 최적해라 하고 x 를 K 에서의 비최적해라 하자.

$$c'x^* > c'x, \quad x^*, x \in K \text{ 가 성립한다.}$$

$$c'(x^* - x) > 0$$

그런데 보조정리 2에 의해 $c = c_p = Pc = Pc_p$ 가

성립하므로

$$(Pc_p)'(x^* - x) > 0$$

$$c_p'P'(x^* - x) > 0 \text{ 이 된다.}$$

그리고 $P = P'$ 이므로 $c_p'P(x^* - x) > 0$ 가 된다.

여기서 $x_p^* = Px^*$, $x_p = Px$ 라 두면 $c_p'x_p^* > c_p'x_p$, $x_p^*, x_p \in K_p$ 가 성립한다. ■

[증정리 1] 원문제의 최적해가 유일하면 투영공간상의 최적해도 유일하다.

증명 : 원문제의 최적해를 x^* , 투영공간상의 최적해를 x_p^* 라 하자.

이제 x_p^* 가 유일하지 않다고 하자.

그러면 $c_p'x_p^* = c_p'\hat{x}_p$, $\hat{x}_p = P\hat{x}$ 이고 $\hat{x}_p \neq x_p^*$ 인 \hat{x}_p 가 존재한다.

$$\begin{aligned} c_p'(x_p^* - \hat{x}_p) &= c_p'(Px^* - P\hat{x}) = c_p'P(x^* - \hat{x}) \\ &= (Pc_p)'(x^* - \hat{x}) = c'(x^* - \hat{x}) = 0 \text{ 이} \end{aligned}$$

된다.

여기서 만약 $x^* = \hat{x}$ 이면 $x_p^* = \hat{x}_p$ 가 되므로 x_p^* 가 유일하지 않다는 가정에 위배된다.

따라서 $x^* \neq \hat{x}$ 이어야 한다. 즉, x^* 는 유일하지 않게 된다.

그러므로 원문제의 최적해가 유일하면 투영공간상의 최적해도 유일하다. ■

따라서 원문제의 최적점은 투영행렬 P 에 의해 3차원 부분공간상으로 투영되더라도 그 공간상에서 최적이 유지된다. 또한 원문제의 최적점이 유일한 해이면 투영된 공간상에서도 유일한 정점으로 표현될 수 있다.

그러면 3차원 부분공간으로 투영된 해집합은 다음과 같은 속성을 갖는다.

[증정리 2] K_p 는 볼록(convex)이다.

증명 : $K = \{x | Ax=b, x \geq 0\}$

$K_1 = \{x_1 | x_1 = Px, Ax=b, x \geq 0\}$ 에서 K_1 가 볼록임을 보이자.

$P=D(DD)^{-1}D'$ 이므로 P 는 선형사상이다.

임의의 $x_1, x_2 \in K_1$ 에 대해 투영행렬 P 에 의한 사상 $x_1, x_2 \in K_1$ 를 $x_1 = Px_1, x_2 = Px_2$ 라 하자.

($0 \leq \lambda \leq 1$ 에 대해

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \lambda Px_1 + (1-\lambda)Px_2 = P(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ 가 된다.

그런데 K 는 볼록이므로 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in K$ 이다.

따라서 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in K_1$ 이다. ■

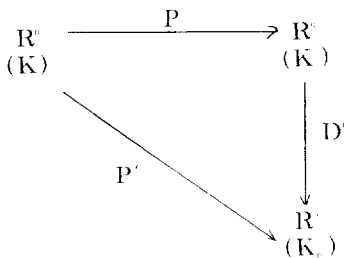
투영행렬 P 는 n 차원 공간상에서 가능해집합 K 를 d_1, d_2, d_3 가 이루는 부분공간으로 투영하는 행렬이다. 그런데 시각적으로 표현하려면 n 차원 공간상의 좌표가 아니라 3차원 공간상의 좌표가 필요하다.

원분제의 가능해집합 K 를 R 상으로 투영하는 투영행렬을 P' 라 하면

$$P' = DP = D'D(D'D)^{-1}D' = D' \quad (6)$$

가 된다.

그러면 원분제의 가능해집합 K 의 투영행렬 P 에 의한 사상을 K_1 라 하고 투영행렬 P' 에 의한 사상을 K_2 라 하면, P, P', D' 의 사이에는 그림 3과 같은 관계를 갖는다.



[그림 3] 투영행렬 P, P', D' 사이의 관계

이제 K_1 의 투영행렬 D' 에 의한 사상인 K_2 에서도 최적성이 유지됨을 보임으로 P' 는 P 와 마찬가지로 최적성이 유지되는 투영행렬임을 보이도록 하자.

[보조정리 3] K_1 와 K_2 에서는 내적(inner product)이 보존된다.

증명 : $K_1 = \{x_1 | x_1 = Px, Ax=b, x \geq 0\}$ 이고

$K_2 = \{x_2 | x_2 = P'x, Ax=b, x \geq 0\}$ 이다.

임의의 $x_1, x_2 \in K_1$ 에 대해 투영행렬 P 에 의한 사상 $x_1, x_2 \in K_1$ 를 $x_1 = Px_1, x_2 = Px_2$ 라 하고, $x_1, x_2 \in K_1$ 에 대해 투영행렬 D' 에 의한 사상 $x_1, x_2 \in K_1$ 를 $x_1 = D'x_1, x_2 = D'x_2$ 라 하자.

$$\begin{aligned} x_1'x_2' &= (D'x_1)'(D'x_2)' = (D'Px_1)'(D'Px_2)' \\ &= (Px_1)'DD'(Px_2)' = (Px_1)'P(Px_2)' \\ & \quad (\because P=DD') \\ &= (Px_1)'(PP)x_2 = (Px_1)'(Px_2) \\ & \quad (\because PP=P) \\ &= x_1'x_2' \end{aligned}$$

K_1 와 K_2 에서는 내적이 보존되므로 다음 증정리가 성립한다.

[증정리 3] K_1 와 K_2 는 동일한 형태이다.

증명 : 보조정리 3에 의해 K_1 와 K_2 에서는 내적이 보존되므로 K_1 와 K_2 에서의 다면체가 동일한 각도를 유지하고 선분의 길이가 동일하게 된다.

따라서 K_1 와 K_2 는 동일한 형태이다. ■

그러면 K_1 와 K_2 에서 내적이 보존되고 동일한 형태를 가지므로 다음 정리가 성립한다.

[정리 3] K_p 에서의 목적함수값 $c_p'x_p$ 는 K_p 에서의 목적함수 값 $c_p'x_p$ 와 같다.

$$\begin{aligned} \text{증명 : } c_p'x_p &= (D'c_p)'(D'x_p) = (c_p'D)(D'Px) \\ &= c_p'(DD')Px \\ &= c_p'PPx = c_p'Px \quad (\because PP=P) \\ &= c_p'x_p \quad \blacksquare \end{aligned}$$

그러면 K_p 의 투영행렬 D' 에 의한 사상인 K_p 에서도 최적성이 유지됨을 보일 수 있다.

[정리 4] K_p 의 최적해를 x_p^* 라고 두면 투영행렬 D' 에 의한 사상 $D'x_p^*$ 는 K 에서 최적해가 된다. 또한, K_p 에서의 비최적해는 K 에서도 비최적해가 된다.

증명 : x_p^* 를 K_p 의 최적해라 하고 x_p 를 K_p 에서의 비최적해라 하자.

$$c_p'x_p^* > c_p'x_p \quad x_p^*, x_p \in K_p \text{가 성립한다.}$$

$$\begin{aligned} c_p'(x_p^* - x_p) &> 0 \\ (PC)'(x_p^* - x_p) &> 0 \\ (DD'c)'(x_p^* - x_p) &> 0 \\ (c'D)(D'x_p^* - D'x_p) &> 0 \end{aligned}$$

여기서 $x_p^* = D'x_p^*$, $x_p = D'x_p$, $c_p = D'c_p$ 라 두면

$$\begin{aligned} (D'c_p)'(x_p^* - x_p) &> 0 \\ c_p'(x_p^* - x_p) &> 0 \text{ 이 된다.} \\ c_p'x_p^* &> c_p'x_p \quad x_p, x_p^* \in K_p \text{가 성립한다. } \blacksquare \end{aligned}$$

따라서 K_p 에서는 투영행렬 D' 에 의해 K_p 의 최적성이 그대로 유지되므로, K 를 투영행렬 P' 에 의한 사상 K_p 에서는 K 의 최적성을 유지할 수 있다.

[정리 5] K 에서의 최적점 x^* 는 투영행렬 P' 에 의해 K_p 에서의 최적점 x_p^* 에 대응된다.

증명 : 정리 2에 의해 K 에서의 최적점 x^* 는 투영행렬 P 에 의해 K_p 에서 최적점 x_p^* 으로 투영된다.

또한, 정리 4에 의해 K_p 에서의 최적점 x_p^* 는 투영행렬 D' 에 의해 K 에서 최적점 x_p^* 으로 투영된다.

따라서 K 에서의 최적점 x^* 는 투영행렬 P' 에 의해 K_p 에서의 최적점 x_p^* 으로 투영된다. \blacksquare

[중정리 4] K_p 는 볼록이다.

그러므로 원문제를 식(3)을 기저벡터로 하는 3차원 공간상으로 투영시키면, 원문제의 최적해를 투영공간상에서도 최적으로 유지하면서 선형계획문제를 표현할 수 있게 된다.

3. 선형계획문제의 표현 방법

다차원 선형계획문제의 해집합을 3차원 도형으로 표현하는 과정은 다음과 같다. 먼저 다차원 선형계획문제에 대한 모든 정점해와 이웃기저를 구한다. 모든 정점을 구하는 방법에 대한 연구에는 여러가지 방법이 알려져 있다. 대표적인 방법으로는 Balinski 법[9], Mattheiss 법[12] 및 Khang 법[11] 등이 있다. 여기서는 위의 방법중 한 방법을 선택하여 원문제에 대한 모든 최적해를 구하고 기저를 이용하여 이웃정점들을 정의한다.

다음으로 다차원 선형계획법의 해집합을 투영하기 위한 투영공간과 투영행렬을 구한다.

즉, a_i 을 $c/\|c\|$ 로 두고 a_1, a_2 은 a_1 과 서로 독립인 임의의 벡터를 설정한 후, 식 (1), (2), (3)에 의해 투영공간의 기저벡터를 구하고 투영행렬을 구한다. 3차원 공간상의 좌표를 구하기 위한 투영행렬은 식(6)에 의해서 구한다. 그리고 이러한 투영행렬에 의해 다차원상의 모든 정점들을 3차원상으로 투영한다.

다음에는 3차원으로 투영된 좌표들을 화면상에 표현하는 과정으로, 3차원 도형을 화면상에 표현하는 일련의 그래픽 기법들이 사용된다. 여기서는 회전공식(rotation formula)[1]과 이동공식(translation formula)[1] 그리고 투영공식(projection formula)[1]을 사용하여 화면상의 좌표를 계산할 수 있다. 마지막으로 선형계획법 프로그램과 연결하여 선형계획법의 풀이 과정을 표현한다.

이러한 선형계획문제의 해집합과 선형계획법의 풀이과정을 표현하는 과정을 요약하면 다음과 같다.

단계 1 : 다차원 공간에서의 모든 정점
모든 정점과 각 정점에 이웃한 이웃정점을 찾는다.[9,11,12]

단계 2 : 다차원 도형의 3차원 투영
① 투영할 3차원 부분공간 D를 식(1), (2),(3)에 의해 구한다.
② 투영행렬을 식(6)에 의해 구한다.
③ 다차원 공간상의 모든 정점을 3차원 공간상으로 투영한다.

단계 3 : 3차원 좌표의 화면상 좌표
① 화면상의 투영된 좌표를 구한다 [1].
② 화면상에 표현하기 위해 scaling 을 한다 [1].

단계 4 : 화면상 표현

화면상의 좌표와 이웃정점을 고려하여 다면체를 형성한다.

단계 5 : 선형계획법 수행 과정
선형계획법 프로그램과 연결하여 기저의 이동과정과 최적점을 표현한다.

4. 예제

다음과 같은 4차원 문제를 고려하자.

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{i=1}^4 x_i \\ \text{s.t. } & x_i \leq 1, \quad i=1, 2, 3, 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

모든정점을 구하면 16가지의 정점이 존재한다.

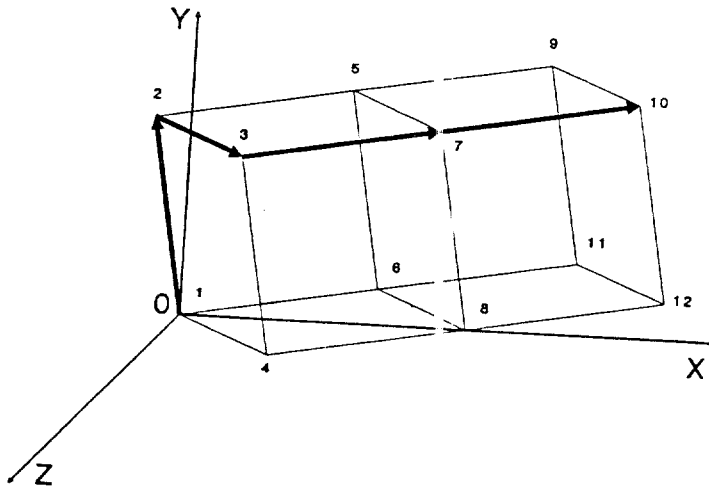
3차원 부분공간을 구하기 위해 서로독립인 벡터를 다음과 같이 둔다.

$$\begin{aligned} a_1 &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)' \\ a_2 &= (1, 0, 0, 0)' \\ a_3 &= (0, 1, 0, 0)' \end{aligned}$$

식 (1), (2), (3)에 의해 3차원 공간을 나타내는 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$D = \begin{pmatrix} -.2588 & .9659 & 0 \\ .5577 & .1494 & .8165 \\ .5577 & .1494 & .4082 \\ .5577 & .1494 & .4082 \end{pmatrix}$$

식 (6)에 의해 투영행렬을 구한후 그래픽으로 표현하면 [그림 4]와 같다.



[그림 4] 4차원 선형계획법 문제의 3차원 표현 예제

여기서는 12개의 정점만이 표현되는데 투영 과정에서 4개의 정점이 ⑤,⑥,⑦,⑧에 각각 겹쳐서 표현되었다. 선형계획법의 풀이과정은 ①-②-③-⑦-⑩으로 진행되어 최적해는 ⑩에 나타나게 된다.

선형계획법의 풀이과정을 보다 쉽게 이해할 수 있다. 또한, 의사결정자가 선형계획법을 보다 쉽게 이해할 수 있게 되어, 선형계획법이 의사결정도구로서 더욱 광범위하게 활용될 수 있을 것이다.

5. 결론 및 기대효과

본 연구에서는 선형계획법의 비전문가가 선형계획법을 보다 쉽게 이해할 수 있도록 선형계획문제의 가능해집합과 선형계획법의 풀이과정을 시각적으로 표현하는 방법에 대해 연구하였다.

먼저 다차원 가능해집합에서의 최적해가 투영공간인 3차원 공간상에서도 최적의 상태가 유지될 수 있는 투영방법을 구하였다. 다음으로 이 투영방법에 의해 선형계획법의 풀이과정을 표현하는 방법을 제시하였다.

본 연구의 결과로 선형계획법의 비전문가가

참 고 문 헌

- [1] 김영한, 「CAD Graphics in C」, 정보문화사, 1991.
- [2] 박순달, 「선형계획법」, 3정판, 민영사, 1992.
- [3] 신영수, 김현석, 「3차원 그래픽」, 가남사, 1991.
- [4] 임홍식, 「C 그래픽」, 정보문화사, 1990.
- [5] Chang, Y.L. and R.S. Sullivan, *Quantitative Systems for Business Plus*, Prentice-Hall, 1989.
- [6] Dewey, B.R., *Computer Graphics for Engineers*, Harper & Row, 1988.
- [7] Preparata, F.P. and M.L. Shamos,

Computational Geometry, Springer
-Verlag, 1985.

- [8] Strang, G., *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, 1980.
- [9] Balinski, M. L., "An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets," *SIAM J. on Appl. Math.*, Vol. 9, No 1(1961), pp.72-88.
- [10] Gal, T., H.J. Kruse, and P. Zornig, "Survey of Solved and Open Problems in the Degeneracy Phenomenon," *Mathematical Programming*, Vol. 42(1988), pp. 125-133.
- [11] Khang, D.B. and O. Fujiwara, "A New Algorithm to Find All Vertices of a Polytope," *Operations Research Letters*, Vol. 8(1989), pp.261-264.
- [12] Mattheiss, T.H., "An Algorithm for Determining Irrelevant Constraint and All Vertices in Systems of Linear Inequalities," *Operations Research*, Vol. 21, No.1(1973), pp. 247-261.
- [13] 福川 忠昭, "線形計画法から多目的・多目標計画法へ," *Communications of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 32, No. 6(1987), pp. 300-308.