

노드채색문제에 대한 기존 해법의 분석 및 분류

최택진* · 명영수** · 차동완*

Analysis and Classification of Heuristic Algorithms for Node Coloring Problem

Taek-jin Choi*, Young-soo Myung** and Dong-wan Tcha*

Abstract

The node coloring problem is a problem to color the nodes of a graph using the minimum number of colors possible so that any two adjacent nodes are colored differently. This problem, along with the edge coloring problem, has a variety of practical applications particularly in item loading, resource allocation, exam timetabling, and channel assignment. The node coloring problem is an NP-hard problem, and thus many researchers develop a number of heuristic algorithms. In this paper, we survey and classify those heuristics with the emphasis on how an algorithm orders the nodes and colors the nodes using a determined ordering.

1. 서론

노드채색문제(Node Coloring Problem, NCP)는 자매문제인 에지채색문제(Edge Coloring Problem, ECP)와 함께 그래프채색문제(Graph Coloring Problem, GCP)의 하나로서, 그 광범위한 응용가능성으로 인해 지금까지 많은 연구들이 이루어져 왔다. NCP는 뒤에 언급되는 바

처럼 모델을 확장하면 통신 분야 등 그 응용범위가 광범위하게 되어 이들 문제의 해결을 위해서 NCP의 성질 및 해법의 이용이 필수적이다. 본 논문에서는 이제까지 밝혀진 NCP의 특징 및 해법들을 분석, 정리하고, 특히 확장된 문제의 응용성을 고려하여 기존의 해법들을 특성 별로 분류하고자 한다.

임의의 그래프에 대한 NCP는 polynomial time 한도내에서는 그 최적해를 구할 수 없는

* 한국과학기술원 경영과학과

** 단국대학교 경영학과

NP-complete 문제로 알려져 있다[12]. 이런 이유로 지금까지 대부분의 연구는 해의 하한 및 상한에 관한 연구와 최적해는 아니지만 그에 근사한 해를 polynomial time내에 구할 수 있는 발견적해법을 개발하는 데에 초점이 모아져 왔다. 본 논문에서는 먼저 NCP와 ECP의 정의 및 대표적인 응용문제들을 간략히 살펴보고, 2장에서 NCP의 수리적모형 및 상 하한과 관련된 NCP의 특징을 ECP의 경우와 비교하여 소개하기로 한다. 3장에서는 대표적인 NCP 해법들을 소개하고, 그 특성을 현실문제의 해법개발에 응용하는 관점에서 비교, 분석하기로 한다.

1.1 용어 및 기호 설명

루프(loop)와 중복에지(multiple edge)가 존재하지 않는 그래프를 단순그래프(simple graph)라 하는데, NCP는 방향성 없는(undirected) 단순그래프를 대상으로 하는 문제이다. 본 논문에서는 특별한 언급이 없는 한, 노드집합 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 와 에지집합 $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ 로 구성된 단순그래프를 $G = (V, E)$ 로 표시한다.

주어진 그래프 $G = (V, E)$ 에 대해서 다음의 용어 및 기호들을 정의한다.

- Node Degree : 임의의 노드 v_i 에 인접한 노드수를 그 노드의 node degree라 하고 $d(v_i)$ 로 나타낸다.
- $\Delta(G)$: node degree의 최대값, 즉 $\max_{v_i \in V} d(v_i)$.
- $\langle S \rangle$ 또는 $\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle$: V 의 부분집합 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ 와 S 의 노드들만을 연결하는 에지들로 구성된 서브그래프(subgraph).
- $d_{\langle S \rangle}(v_i)$ 또는 $d_{\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle}(v_i)$: 만일 $v_i \in S$ 이면 $\langle S \rangle$ 또는 $\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle$ 에서의 v_i 의 node degree를 나타내고, $v_i \notin S$ 이면 $\langle S \rangle$ 또는 $\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle$ 의 노드들 중에서 v_i 와 인접한 노드수를 나타낸다.
- 독립집합(Independent Set) : 상호간에 인접하지 않는 노드들로만 구성된 집합.
- 최대독립집합(Maximal Independent Set) : 다른 어떤 독립집합에도 포함되지 않는 독립집합.
- Independence Number, $\alpha(G)$: G 의 독립집합들 중에서 가장 많은 수의 노드로 구성된 독립집합을 최량독립집합(maximum independent set)이라 하고, 최량독립집합의 노드수를 그래프 G 의 independence number라 한다.
- 완전집합(Complete Set) : 상호간에 모두 인접한 노드들로만 구성된 집합.
- 클릭(Clique) : 다른 어떤 완전집합에도 포함되지 않는 완전집합.
- Clique Number, $\rho(G)$: G 의 클릭들 중에서 가장 많은 수의 노드로 구성된 클릭을 최량클릭(maximum clique)이라 하고, 최량클릭의 노드수를 그래프 G 의 clique number라 한다.
- 매칭(Matching) : 상호간에 서로 인접하지 않은 에지들로만 구성된 집합.
- 최대매칭(Maximal Matching) : 다른 어떤 매칭에도 포함되지 않는 매칭.
- Matching Number, $\beta(G)$: G 의 매칭들 중에서 가장 많은 수의 에지로 구성된 매칭을 최량매칭(maximum matching)이라 하고, 최량매칭의 에지수를 그래프 G 의 matching number라 한다.

- 상보(Complementary) 그래프, $\bar{G}=(V, \bar{E})$
: 단 \bar{E} 는 G 에서 인접하지 않은 노드들을 연결하는 에지들의 집합 ($\alpha(\bar{G})=\rho(G)$, $\rho(\bar{G})=\alpha(G)$).

1.2 NCP의 정의 및 응용

NCP는 주어진 그래프 G 에 대하여 인접노드는 서로 다른 색으로 채색한다는 제약하에서 모든 노드를 최소의 색으로 채색하는 문제이다. 이때 사용된 색의 최소 수를 그래프 G 의 chromatic number라 하고 $\chi(G)$ 로 나타낸다. 또한 $\chi(G) \leq k$ 인 그래프 G 를 k -colorable 그래프라 하고, k 개의 색으로 채색한 상태를 k -coloring이라 한다.

이러한 NCP를 직접 또는 다소 변형시켜 표현할 수 있는 현실문제들은 많은 분야에서 찾아볼 수 있다. 본 절에서는 지금까지 많이 다루어진 대표적인 NCP의 응용문제들을 대상으로 NCP로의 변환과정 및 현실을 반영한 모수와 제약조건들을 간단히 소개하기로 한다[10, 14, 20, 21, 35].

<물품적재문제(Loading Problem)>

n 개의 물품(item)들을 상자에 담으려 할 경우, 몇 개의 특정한 두 물품은 동일한 상자에 함께 담을 수 없는 제약하에서, 최소의 상자로서 모든 물품들을 담는 문제를 생각할 수 있다. 이때 각 물품을 노드 $v_i(i=1,2,\dots,n)$ 라 하고, 동일한 상자에 담을 수 없는 특정한 두 물품들 사이에 에지를 대응시키면 하나의 그래프를 만들 수 있고, 색에 대응되는 상자의 용량에 제한이 없다고 가정하면 이 문제는 NCP와 완전히 일치하게 된다.

실제 현실문제에서는 여러 가지 추가적인 제약들을 고려해야 한다. 예를 들면, 각 상자에 담을 수 있는 물품들의 총 수에 대한 제약, 각 물품의 무게가 주어진 경우 각 상자에 담을 수 있는 총 무게에 대한 제약, 이용가능한 상자의 총 수에 대한 제약 등이 추가적인 제약으로 주어질 수 있다.

<자원할당문제(Resource Allocation Problem)>

m 개의 서로 다른 자원으로 구성된 집합 $R=\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ 과 작업처리시간이 동일한 n 개의 작업으로 구성된 집합 $T=\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ 가 주어져 있다. 또한 각 작업을 수행하는데 필요한 자원들을 나타내는 자료가 주어진 경우, 하나의 자원은 두개 이상의 작업에 동시에 배정될 수 없다는 제약하에서 최소의 단위작업시간을 이용하여 모든 작업을 수행할 수 있도록 작업시간을 배정하는 문제를 생각할 수 있다.

이 문제를 NCP로 풀기 위해 각 작업을 노드에 대응시키고, 동시에 처리할 수 없는 작업(노드)들 간에는 에지로 연결되는 그래프를 작성한다. 예를 들어, 3개의 자원 r_1, r_2, r_3 에 대하여 작업 T_1 은 r_1 과 r_3 , 작업 T_2 는 r_2 와 r_3 가 필요하다고 가정할 때, T_1 과 T_2 는 r_3 로 인해 동시에 처리할 수 없게 되고 따라서 T_1 과 T_2 를 에지로 연결한다.

<시험시간배정문제(Examination Timetabling Problem)>

m 명의 학생으로 구성된 집합 $S=\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ 와 n 개의 시험으로 구성된 집합 $E=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 가 주어져 있다. 각 학생은 자신이 수강한 강의의 시험을 치뤄야 하는 경우, n 개의 시험과목에 대한 시험시간을 배정하는 문제를 고려한다. 이 문제를 NCP로 해결하기 위해서 각 시

험과목은 노드로 표현하고, 어떤 학생이 특정한 몇 가지 시험을 치뤄야 할 경우 해당 노드들 사이에는 에지를 대응시켜 그래프를 만든다. 시험시간배정문제는 시간을 단위시험기간으로 구분했을 때, 에지로 연결된 두 시험은 동일한 시험기간에 배정할 수 없다는 제약하에서 최소의 시험기간으로 전 과목을 소화하는 시험시간표를 작성하는 문제이다.

Leighton[21]은 이용가능한 단위시험기간의 총 수에 대한 제약, 어떤 시험은 특정한 시간대를 이용할 수 없거나 혹은 특정 시간대에서만 치뤄져야 한다는 제약, 한 시험기간 동안 동시에 치를 수 있는 시험과목수에 대한 제약(시험장소 제약) 등 몇 가지 현실적인 제약들을 추가한 문제에 대해 자신이 제시한 해법을 적용하였다.

〈채널할당문제(Channel Assignment Problem)〉

n 개의 기지국(Base Station)으로 구성된 셀룰러이동통신시스템(Cellular Mobile Communication Systems)에 무선채널을 할당하는 문제를 생각해 보자. 각 기지국을 노드에 대응시키고, 주파수간섭(Frequency Interference)현상이 발생하는 기지국들 사이에는 에지를 대응시켜 그래프를 작성한다. 채널할당문제는 에지로 연결되는 두 기지국에는 동일한 채널을 할당할 수 없다는 제약하에, 최소의 채널을 이용하여 전 기지국에 하나씩의 채널을 할당하는 문제이다. 여기서 각 채널들은 사용하는 주파수대역에 따라 특정의 번호가 부여된다.

실제 현실문제에서는 다음과 같은 사항들을 고려해야 한다.

- 각 기지국의 채널수요량이 주어진 경우, 동일한 기지국에 할당되는 채널들 사이에는 특정의 채널번호간격이 유지되어야 한

다(동일기지국제약).

- 심각한 주파수간섭현상이 발생하는 특정한 두 기지국 사이에는 인접한 채널들조차 사용할 수 없다. 즉, 채널번호간격은 2 이상이 되어 한다(인접채널제약).
- 이용가능한 전체 주파수대역의 제한(가용채널제약).
- 어떤 기지국의 경우 특정 주파수대의 채널들을 사용할 수 없다.

NCP 해법에 사용된 아이디어들을 이용하여, 이러한 현실적 채널할당문제를 해결하고자 하는 많은 연구들이 있었다[4, 11, 30, 31, 38].

1.3 ECP의 정의 및 응용

ECP는 주어진 그래프 G 에 대하여 인접에지는 서로 다른 색으로 채색한다는 제약하에서, 모든 에지를 최소의 색으로 채색하는 문제이다. 이때 사용된 색의 최소수를 그래프 G 의 chromatic index라하며 $\chi'(G)$ 로 나타낸다. 또한 $\chi'(G) \leq q$ 인 그래프 G 를 q -colorable 그래프라 하고, q 개의 색으로 채색한 상태를 q -coloring이라 한다.

많은 현실문제들이 ECP로 모형화될 수 있다. 여기서는 이중에 대표적인 몇 가지 문제에 대하여 ECP로의 모형화 과정을 간단히 소개하기로 한다[29].

〈구두시험시간배정문제(Oral Examination Timetabling Problem)〉

학기말에 각 학생들은 자신이 수강한 과목의 교수에게 구두시험을 치뤄야하는 경우, 어느 정도의 단위시험기간이 필요한가?

이 문제를 ECP로 풀기 위해서, 학생과 교수

를 노드에 대응시키고, 각 학생에 대응되는 노드에 대하여 그 학생이 수강한 과목의 교수에 대응되는 노드와 에지로 연결하는 bipartite 그래프를 작성한다.

<작업시간배정문제(Workers to Jobs Scheduling Problem)>

작업자, 기계 및 특정 작업들이 주어지고, 각 작업에 대하여 필요작업자, 필요기계 및 필요작업기간이 주어져 있을 때, 모든 작업을 완료하기 위해서 어느 정도의 단위작업기간이 필요한가?

만일 복수의 단위작업기간이 필요한 작업이 있으면, 이 문제는 동일한 두개의 노드에 여러개의 에지가 존재하는 중복그래프에서의 ECP로 모형화해야 한다. 이 문제를 ECP로 풀기 위해서, 작업자와 기계를 노드에 대응시키고, 각 작업에 대하여 사전에 정의된 특정 작업자와 특정 기계를 필요작업기간만큼의 에지로 연결하는 bipartite 그래프를 작성한다.

<실험시간배정문제(Experiment Scheduling Problem)>

두개의 서로 다른 실험작업으로 이뤄지는 실험들의 효과를 측정하고자 한다. n 개의 실험작업 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 과 x_i 와 x_j 로 이뤄지는 실험에 필요한 실험시간 $t_{ij} (i \neq j)$ 가 주어져 있을 때, 모든 실험을 완료하기 위해서 어느 정도의 단위실험시간이 필요한가?

이 문제를 풀기 위해, 각 실험작업을 노드에 대응시키고, 특정한 두개의 노드를 t_{ij} 만큼의 에지로 연결하는 중복그래프를 작성한다.

2. NCP의 수리적모형 및 특징

뒤에서 소개되겠지만 주어진 임의의 그래프 G 에 대하여 chromatic index는 $\Delta(G)$ 또는 $\Delta(G)+1$ 이 되어 상·하한과 관련된 연구는 의미가 없다. 즉 ECP에서는 대상 그래프의 chromatic index가 $\Delta(G)$ 와 $\Delta(G)+1$ 중에 어떤 값을 갖는가 하는 데에 연구의 초점이 있었다. 반면에 chromatic number의 경우 상·하한 및 그 간격조차도 일정하지 않다. 따라서 지금까지 chromatic number의 상·하한과 관련된 많은 연구들이 이루어져 왔다. 또한 이들 중에 일부는 NCP 해법과 밀접한 연관이 있어 NCP 해법들을 소개하기 전에 그러한 상·하한들을 살펴보는 것은 의미가 있다.

2.1 NCP의 수리적모형

하나의 최대독립집합을 구성하는 노드들은 그 정의상 NCP에서 동일한 색을 채색할 수 있는 노드들의 집합을 의미한다. 따라서 NCP는 최소의 최대독립집합들로서 그래프의 모든 노드들을 커버(cover)하는 문제로 표현될 수 있다. 이제 t 개의 최대독립집합이 있는 그래프 $G=(V,E)$ 에서 NCP를 Set Covering Problem(SCP)로 모형화하면 다음과 같다[7].

$$\begin{aligned}
 \text{(NCP)} \quad \chi(G) &= \min \sum_{j=1}^t x_j \\
 \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^t a_{ij} x_j &\geq 1 \quad \forall i=1, \dots, n \\
 x_j &\in \{0,1\} \quad \forall j=1, \dots, t
 \end{aligned}$$

단, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{가 최대독립집합 } j \text{에 포함되면} \\ 0, & \text{그렇지 않으면,} \end{cases}$

$$x_j = \begin{cases} 1, & j\text{-번째 최대독립집합이 선택되면} \\ 0, & \text{그렇지 않으면.} \end{cases}$$

NCP의 경우와 유사하게 매칭의 개념을 이용하면, ECP는 최소의 최대매칭들로서 모든 에지들을 커버하는 문제로 표현될 수 있다. k 개의 최대매칭이 있는 그래프 G 의 ECP를 SCP로 모형화하면 다음과 같다[29].

$$\begin{aligned} \text{(ECP)} \quad \chi(G) &= \min \sum_{j=1}^k y_j \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^k b_{ij} y_j &\geq 1 \quad \forall i=1, \dots, m \\ y_j &\in \{0, 1\} \quad \forall j=1, \dots, k \end{aligned}$$

단, $b_{ij} = \begin{cases} 1, & e_i \text{가 } j\text{-번째 최대매칭에 포함되면} \\ 0, & \text{그렇지 않으면.} \end{cases}$

$$y_j = \begin{cases} 1, & j\text{-번째 최대매칭이 선택되면} \\ 0, & \text{그렇지 않으면,} \end{cases}$$

2.2 Chromatic number의 상한 및 하한

$\alpha(G)$ 는 하나의 색으로 채색할 수 있는 최대 노드수를 의미하므로 $\chi(G)$ 는 항상 $n/\alpha(G)$ 보다 크거나 같다. 또한 최량독립집합에 하나의 색을 채색하고 나머지 노드들은 $n-\alpha(G)$ 개의 색으로 채색이 가능하므로 $\chi(G)$ 와 $\alpha(G)$ 간에는 다음과 같은 관계가 성립한다[2, 15].

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq (n-\alpha(G))+1. \quad (1)$$

Nordhaus와 Gaddum[28]은 $\chi(G)$ 와 상보그래프의 chromatic number $\chi(\bar{G})$ 간에 다음과 같은 관계가 있음을 제시하였다.

$$2\sqrt{n-\chi(\bar{G})} \leq \chi(G) \leq n+1-\chi(\bar{G}), \quad (2)$$

$$\frac{n}{\chi(\bar{G})} \leq \chi(G) \leq \left[\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \right] / \chi(\bar{G}). \quad (3)$$

하나의 클릭을 채색하기 위해서는 그 클릭의 노드수만큼의 색이 필요하다는 것은 명백하다. 따라서 그래프 G 의 clique number $\rho(G)$ 는 chromatic number의 하한이 된다. 즉,

$$\chi(G) \geq \rho(G). \quad (4)$$

Geller[13]는 그래프의 노드수(n)와 에지수(m)를 이용하여 구할 수 있는 다음과 같은 하한을 제안하였다.

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{(n^2-2m)}. \quad (5)$$

(4)의 하한은 clique number를 이용하므로 그 값을 구하기가 어렵다. Myers와 Lin[27]은 (4)가 (5)보다 항상 좋은 하한을 제공하며, 따라서 (5)의 유일한 장점은 계산이 간단하다는 것임을 보였다.

Brooks[6]는 다음과 같은 상한을 제시하였다.

$$\chi(G) \leq \Delta(G)+1. \quad (6)$$

(6)에서 만약 G 가 완전집합이거나 홀수개의 에지로 구성된 circuit인 경우에는 $\chi(G)$ 는 $\Delta(G)+1$ 이되지만, 그 외의 모든 그래프의 $\chi(G)$ 는 $\Delta(G)$ 보다 작거나 같다(증명은 [6, 22, 26] 참조).

G 의 모든 노드들에 대해 node degree의 크기순으로 순위를 결정할 수 있다. 즉, $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$. Welsh와 Powell[34]은 이러한 순위 및 node degree를 이용하여 구할 수 있는 상한을 제시하였다. 즉,

$$\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n} [\min\{d(v_i)+1, i\}]. \quad (7)$$

(7)의 증명을 위해 Welsh와 Powell은 상한

보다 항상 작은 수의 색으로 채색이 가능한 해법을 제시하였다. Bondy[3]는 (7)의 간단한 증명 및 (7)을 이용한 (2)의 상한 증명을 제시하였다.

Matula[23], Szekeres와 Wilf[32]는 다음과 같은 상한을 제시하였다.

$$\chi(G) \leq 1 + \max_S \min_{v \in S} |d_S(v)| \leq |V|. \quad (8)$$

ECP에서 인접한 에지는 동일한 색으로 채색할 수 없으므로 하나의 노드에 연결된 모든 에지들은 서로 다른 색으로 채색해야 하고, 따라서 $\chi'(G)$ 는 $\Delta(G)$ 보다 크거나 같다. 더욱이 Vizing[33]에 의하면, 임의의 그래프 G 의 chromatic index는 항상 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1. \quad (9)$$

Arjomandi[1]는 임의의 그래프 G 를 $\Delta(G)+1$ 의 색으로 채색하는 polynomial time 해법을 제시하였다. 결국 모든 그래프는 최적해의 여부는 알 수 없지만, 항상 $\chi'(G)$ 또는 $\chi'(G)+1$ 개의 색으로 채색이 가능하다.

3. NCP 해법의 특성 및 분류

3.1 해법의 분류기준

현재까지 발표된 해법들을 해법진행규칙을 중심으로 분류하면, 노드를 중심으로 해법이 진행되는 순차적채색해법(Sequential Coloring Algorithm, SCA)과 색을 중심으로 해법이 진행되는 순환적채색해법(Recursive Coloring Algorithm, RCA) 및 interchange 또는 con-

traction 등 특정한 기법을 이용하는 해법으로 구분할 수 있다. 또한 노드들의 채색할 순서를 결정하는 방법을 중심으로 분류하면, 노드채색순위(node coloring order)를 해법이 시작되기 전에 일괄적으로 결정하여 이용하는 고정적순위해법(Fixed Ordering Algorithm, FOA)과 전 단계까지의 채색상황을 검토하여 채색할 노드를 선택하는 적응적순위해법(Adaptive Ordering Algorithm, AOA) 및 FOA와 AOA를 혼용하는 해법으로 구분할 수 있다.

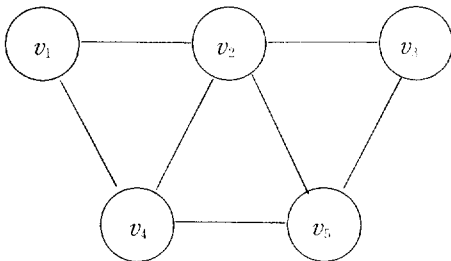
이와 같은 구분은 NCP에서는 큰 의미가 없을 수도 있다. 즉 동일한 노드채색순위에 대해 SCA와 RCA를 적용하는 경우 같은 해를 얻는다. 그러나 채널할당문제와 같이 일반화된 모형에서는 큰 차이를 줄 수 있으므로 이러한 구분의 의미가 있다. 또한 많은 현실문제들은 특정한 형태의 제약이 있는 것이 일반적인 데, 특히 노드들 중에 일부분은 특정의 색으로 이미 채색이 되어있는 그래프에서의 NCP를 생각할 수 있다. 이 경우 FOA보다는 AOA에 속하는 해법을 적용하는 것이 일반적으로 더 좋은 해를 구할 수 있다.

본 장에서는 먼저 해법들을 해법진행규칙을 중심으로 분류하여 소개하고, 5절에서 다시 노드채색순위의 결정방법을 중심으로 정리하기로 한다.

3.2 SCA에 속하는 해법

SCA는 먼저 노드들의 채색순위를 정한 후, 이 노드채색순위에 따라서 순차적으로 각 단계마다 하나의 노드를 채색이 가능한 가장 작은 번호의 색으로 채색하는 방법이다. SCA에 의해서 구해진 해의 질은 노드채색순위에 매우

의존적이며, 만일 정확한 순위만 구할 수 있다면 그 최적해를 얻을 수 있다. 즉, NCP의 최적해를 구하는 것은 최적의 노드채색순위를 구하는 것이다. 아래의 [그림 1]에서 노드채색순위가 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ 인 경우에는 4개의 색이 필요하지만, 반면에 $(v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$ 인 경우에는 3개의 색만으로 전체 노드들을 채색할 수 있게 된다. 결국 SCA에 속하는 해법들의 차이는 노드채색순위의 결정방법에 있다고 할 수 있다.



최적노드채색순위 : $(v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$

[그림 1] 그래프 G 의 최적노드채색순위

<최대우선법(Largest-First Algorithm, LF)>

Welsh와 Powell[34]은 node degree의 크기 순서로 노드들의 채색순위를 결정할 후 SCA를 적용하는 방법을 제시하였다. 즉, 노드채색순위는

$$(v_1, v_2, \dots, v_n), \text{ 단 } d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n). \quad (10)$$

LF에서 각 단계까지 사용된 색의 수는 해당 노드의 순위를 초과할 수 없고, 또한 각 노드들은 자신과 인접한 노드들에서 사용된 색들을 제외한 최소 번호의 색을 채색하므로, LF를 적용하는 경우 채색을 위해 사용되는 색의 수는 항상 (7)의 상한보다 항상 작거나 같다. 또한, (7)의 상한은 다른 임의의 순위에 의해 구한 상한보다 항상 작거나 같다.

<변형된 최대우선법(Modified Largest First Algorithm, MLF)>

NCP에서는 일반적으로, 주변상황이 복잡하여 채색이 어려운 노드를 먼저 채색하는 것이 더 좋은 해를 구할 수 있다. 그러나 이러한 채색난이도를 정확하게 측정한다는 것은 사실상 불가능하다. 예를 들어 동일한 node degree를 갖는 두 개의 노드에 대해, 하나는 인접한 노드들 간에 연결이 전혀 없는 경우이고, 다른 하나는 인접한 노드들 간에 모두 에지로 연결되어 있다면 이들 두 노드는 node degree 값은 같지만 채색난이도는 많은 차이가 있음을 직관적으로 알 수 있다.

Williams[36]는 각 노드의 주변상황을 반영할 수 있는 척도로서 k -step node degree를 제시하였다.

[정의 1]

$$k\text{-Step Node Degree} : d_i(k) = \sum_{j=1}^k a_{ij} d_j(k-1),$$

단 $d_i(1) = d(v_i)$ 이고

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{만일 } v_i \text{와 } v_j \text{가 인접하면} \\ 0 & \text{그렇지 않으면.} \end{cases}$$

MLF는 노드채색순위를 결정할 때 node degree 대신 k -step node degree를 사용한다는 것을 제외하면 LF와 동일하다. 즉, 노드채색순위는

$$(v_1, v_2, \dots, v_n), \text{ 단 } d_i(k) \geq d_j(k) \geq \dots \geq d_n(k). \quad (11)$$

<최소후위법(Smallest Last Algorithm, SL)>

임의의 노드채색순위 (v_1, v_2, \dots, v_n) 에 SCP를 적용할 때 채색을 위해 필요한 색의 수는 (12)의 k 보다 작거나 같다. 이는 SCP의 진행과정상, v_i 의 채색에 영향을 미치는 노드들은 v_1, v_2, \dots, v_i 뿐이며, $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n$ 은 노드 v_i 가 채색가

능한 색을 선택하는데 아무런 영향을 미치지 않기 때문이다.

$$k = \max_{1 \leq i \leq n} \{i + d_{(v_1, v_2, \dots, v_n)}(v_i)\} \quad (12)$$

Matula [23]는 k 값을 최소화하는, 최소후위순위(smallest-last ordering, SL순위)라 불리우는, 다음과 같은 순위결정방법을 제시하였다(증명은 [24] 참조).

- 단계 1. G 에서 최소의 degree를 갖는 노드를 순위의 끝에 위치시킨다(v_n):
- 단계 2. $i=n-1, n-2, \dots, 1$ 에 대하여, 서브그래프 $\langle V - \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}\} \rangle$ 에서 최소의 degree를 갖는 노드를 순위 i 의 노드(v_i)로 선택한다.

SL순위 (v_1, v_2, \dots, v_n) 은 그 결정규칙에 의해 항상 다음과 같은 관계가 성립됨을 알 수 있다.

$$d_{(v_1, v_2, \dots, v_n)}(v_i) = \min_{1 \leq j \leq i} d_{(v_1, v_2, \dots, v_n)}(v_j), \quad 1 \leq i \leq n \quad (13)$$

SL은 SCP에 SL순위를 적용한 해법이며, 항상 (8)의 상한보다 적은 수의 색으로 채색이 가능하다. (8)의 상한은 서브그래프에서의 node degree를 이용하여 구하므로 항상 (7)의 상한보다 작거나 같다. 그러나 이 사실이 SL이 LF보다 항상 좋은 해를 제공한다는 것을 의미하지는 않는다.

〈Dsatur Algorithm〉

SL에서 노드채색순위가 (v_1, v_2, \dots, v_n) 인 경우, (12)의 k 값과 실제로 사용된 색의 수에 차이가 생기는 이유는 $d_{(v_1, v_2, \dots, v_n)}(v_i)$ 값과 v_1, v_2, \dots, v_{i-1} 중에서 노드 v_i 의 인접노드들이 실제 사용한 색의 수에 차이가 있기 때문이다. 즉 v_i 에 채색할 수 없는

색의 수는 단순한 $d_{(v_1, v_2, \dots, v_n)}(v_i)$ 값이 아니라 v_1, v_2, \dots, v_{i-1} 중에 v_i 의 인접노드들에 실제로 채색되어 있는 서로 다른 색의 수이다. Brélaz [5]는 이러한 개념을 내포하는 saturation degree 및 이를 이용한 해법을 제시하였다.

〔정의 2〕 Saturation Degree: 이미 채색된 인접노드들에서 사용된 서로 다른 색의 수.

- 단계 1. 가장 큰 node degree를 갖는 노드에 1번 색을 채색한다:
- 단계 2. 채색되지 않은 노드들에 대하여 가장 큰 saturation degree를 갖는 노드에 채색가능한 가장 작은 번호의 색을 채색한다. 만일 이 값이 같은 노드들이 있다면, 아직 채색되지 않은 노드들만으로 구성된 서브그래프에서 가장 큰 node degree를 갖는 임의의 한 노드를 선택하여 색을 채색한다:
- 단계 3. 모든 노드가 채색되면 종료하고, 그렇지 않으면 단계 2로 간다.

3.3 RCA에 속하는 해법

RCA는 각 단계마다 하나의 특정한 색을 기준으로 채색가능한 모든 노드들을 찾아서(즉, 하나의 최대독립집합을 선택함을 의미) 채색한 후, 그 노드들을 제거한 서브그래프를 대상으로 다음 단계를 진행한다. 이러한 과정은 그래프의 모든 노드들이 채색될 때까지 반복된다. 결국 RCA에 속하는 해법들의 차이점은 각 단계에서 어떤 방법으로 최대독립집합을 찾는가

에 있다.

이제 편의상 각 단계 j 에 대하여 대상이 되는 서브그래프를 $G_j = \langle V_j \rangle$ 라 표시한다. 즉, 색 i 가 채색된 노드들의 집합을 C_i 로 표시하면 $V_1 = V, V_2 = V_1 - C_1, V_3 = V_2 - C_2, \dots$

<Dunstan의 해법>

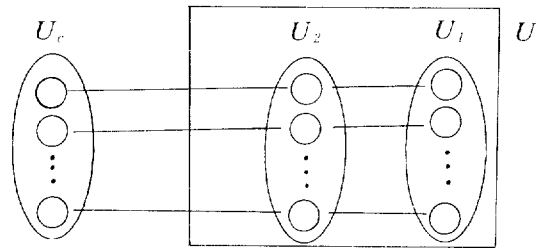
Dunstan[8]은 $G_j(j=1,2,\dots)$ 에서 하나의 최대독립집합을 찾기 위해, LF 또는 SL의 노드 채색순위를 이용하는 방법을 제시하였다. 즉 G_j 에 대해 LF 또는 SL에서 제시한 방법을 이용하여 노드채색순위를 결정한 후, 그 순위를 중심으로 j 번 색을 채색가능한 모든 노드에 채색한다.

<Approximately Maximum Independent Set Algorithm, AMIS>

Johnson[18]은 각 단계에서 가능한 한 많은 노드들로 구성된 독립집합(즉, 근사적 최량독립집합)을 찾아서 채색하는 해법을 제시하였다. 서브그래프 G 에서 근사적인 최량독립집합을 구하는 과정은 다음과 같다.

먼저 G_j 의 노드들 $v(\in V_j)$ 중에서 $d_{G_j}(v)$ 값이 가장 작은 노드를 선택하여 j 번 색을 채색한 후, 그 노드는 집합 U_j 에 포함시키고 나머지 노드들은 집합 U 에 포함시킨다. 또한 집합 U 를 다음과 같은 두개의 집합 (U_1, U_2) 로 구분한다. 집합 U_1 은 j 번 색이 채색되어 있는 노드들과 인접하지 않은 노드들의 집합이고, 집합 U_2 는 j 번 색이 채색되어 있는 노드들과 인접한 노드들의 집합이다(그림 2 참조). 만일 U_1 이 공집합이면 해법의 j 단계는 종결되고, 서브그래프 $\langle U \rangle$ 를 G_{j+1} 로 정의한 후 다음 단계를 반복한다. 만일 U_1 이 공집합이 아니면, U_1 에 속한 노드들 $v(\in U_1)$ 중에서 $d_{G_j}(v)$ 값이 가장 작은

노드를 선택하여 j 번 색을 채색한 후, 그 노드는 U_j 에 포함시키고 나머지 노드들은 다시 두개의 집합 (U_1, U_2) 로 구분한다. 이러한 과정을 U_1 이 공집합이 될 때까지 반복한다.



[그림 2] 노드들의 분류

<Recursive Largest First Algorithm, RLF>

RCA의 각 단계에서 하나의 최대독립집합을 구한다는 것은 그 노드들에 하나의 색을 채색하는 것이며, 다음 단계의 서브그래프에 속한 노드들에는 그 색을 채색할 수 없다는 것을 의미한다. Leighton[21]이 제시한 RLF에서는 각 단계에서 다음 단계의 서브그래프가 좀 더 단순한 구조를 갖도록 하는 최대독립집합을 선택한다. 각 단계 j 의 서브그래프 G 에서 최대독립집합을 구하는 과정은 다음과 같다.

먼저 G_j 의 노드들 $v(\in V_j)$ 중에서 $d_{G_j}(v)$ 값이 가장 큰 노드를 선택하여 j 번 색을 채색한 후, AMIS에서와 마찬가지로 그 노드는 U_j 에 포함시키고 나머지 노드들은 U 에 포함시켜 (U_1, U_2) 로 구분한다(그림 2 참조). 만일 집합 U_1 이 공집합이면 해법의 j 단계는 종결되고, 서브그래프 $\langle U \rangle$ 를 G_{j+1} 로 정의한 후 다음 단계를 반복한다. 집합 U_1 이 공집합이 아니면, U_1 에 속한 노드들 $v(\in U_1)$ 중에서 $d_{G_j}(v)$ 값이 가장 큰 노드를 선택하여 j 번 색을 채색한 후, 그 노드는 U_j 에 포함시키고 나머지 노드들은 다시 두개의 집합 (U, U_2) 로 구분한다. 만일 $d_{G_j}(v)$

값이 동일한 노드들이 발생하면 그중 $d_{min}(v)$ 값이 가장 작은 노드를 선택한다. 이러한 과정을 집합 U_i 이 공집합이 될 때까지 반복한다.

3.4 기타 여러 가지 해법

〈Interchange 기법을 이용한 해법〉

SCA에서 서브그래프 $\langle v_1, v_2, \dots, v_{i-1} \rangle$ 이 $(k-1)$ -coloring인 경우에 노드 v_i 를 채색하고자 한다. 이 경우 v_1, v_2, \dots, v_{i-1} 중에 v_i 의 인접노드들이 $k-1$ 개의 색을 모두 사용하고 있다면 v_i 에는 k 번 색을 채색하게 된다(즉, $\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle$ 는 k -coloring). 그런데 만일 v_i 의 채색된 인접노드들이 완전집합이 아니라면 그 중에 일부노드의 채색을 변경하여 $\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle$ 의 $(k-1)$ -coloring이 가능하다. Matula[25]는 이러한 개념을 이용한 Sequential-with-Interchange해법(SICA)을 제시하였다. 먼저 해법의 설명을 위해 필요한 몇가지 용어 및 기호를 소개한다.

- C_i : k -coloring 그래프에서 i 번 색이 채색되어 있는 노드들의 집합, $i=1, 2, \dots, k$.
- i, j component: 서브그래프 $\langle C_i \cup C_j \rangle$ 의 component.
- $i \leftrightarrow j$ interchange: i, j component에 속한 노드들의 색을 바꾸어 채색하는 절차.

노드순위가 (v_1, v_2, \dots, v_n) 인 경우, SICA의 절차는 다음과 같다.

- 단계 1. v_1 에 1번 색을 채색;
- 단계 2. 만일 $\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle$ 이 j -coloring이고, v_1, v_2, \dots, v_{i-1} 중에 v_i 와 인접한 노

드들에서 사용하지 않은 색의 최소 번호를 m 이라 하면,

- (a) $m \leq j$ 이면, v_i 에 j 번 색을 채색;
- (b) $m = j+1$ 이면, 집합 $K(\subset \{1, 2, \dots, j\})$ 를 구한다. 여기서 $x \in K$ 는 C_i 의 노드들 중에서 v_i 와 인접한 노드수가 1임을 의미한다. 이제 K 의 서로 다른 두 원소 α, β 에 대하여, $\langle C_i \cup C_j \rangle$ 의 α, β component들 중에서 하나의 노드만이 v_i 와 인접한 component가 존재하면, $\alpha \leftrightarrow \beta$ interchange를 수행하여 그 결과 채색가능해진 색(α 또는 β)으로 v_i 를 채색한다. 그렇지 않으면 v_i 에 $j+1$ 번 색을 채색.

SICA는 SCA에 속하는 해법들에 모두 적용이 가능하다. 즉, 최초의 노드순위 결정방법에 따라 LFI(LF-with-Interchange)[25], SLI(SL-with-Interchange)[25], DSI(Dsatur-with-Interchange)[5] 등이 있다. 단계 2의 (b)에서 v_i 와 인접한 노드수가 1인 경우만 K 에 포함시킬 필요는 없다. 즉, $\langle C_i \cup C_j \rangle$ 의 α, β component들 중에서 v_i 와 인접한 노드들이 C_i 또는 C_j 중에 한 집합에만 속하면 $\alpha \leftrightarrow \beta$ interchange가 가능하다. Johnson[19]은 이러한 확장된 형태의 SICA(ESICA)를 제시하였다.

〈Contraction 기법을 이용한 해법〉

여기서는 그래프이론의 contraction기법을 이용한 해법들을 소개하기로 한다.

[정의 3] 그래프 G 에서 두개의 비인접(nonadjacent)노드 x 와 y 를 하나의 노드(xy)로 대체하고, x 또는 y 에 인접했던 모든 노드들을 (xy)와 에지로 연결하는 작업을 노드 x 와 y 의 contraction(또는 merge)이라 한

〈표 1〉 해법별 해법진행규칙 및 노드채색순위결정방법

해 법 진 행 규 칙	노드채색순위결정방법	해 법
SCA	FOA	LF, MLF, SL
	AOA	Dsatur
RCA	FOA & AOA	Dunstan
	AOA	AMIS, RLF
Interchange 기법을 이용한 해법	FOA & AOA	LFI, SLI
	AOA	DSI
Contraction 기법을 이용한 해법	AOA	DB, COSINE

다.

지금까지 발표된 contraction기법에 기초한 NCP 해법들은 여러 가지가 있는데[9, 16, 17, 37], 그 기본적인 진행절차는 다음과 같다.

- 단계 1. 비인접노드 x 와 y 를 선택한다;
- 단계 2. x 와 y 의 contraction을 수행한다;
- 단계 3. G 가 클릭이면 종료, 그렇지 않으면 단계 1로 간다.

최종적인 클릭에서의 하나의 노드는 원 그래프 G 에서의 하나의 독립집합에 해당되며, 따라서 클릭의 노드수만큼의 색으로 G 의 채색이 가능하다. 기본절차에서 알 수 있듯이 이러한 해법들의 차이는 비인접노드의 선택규칙에 있다. Dutton과 Brigham[9]은 동시에 인접한 노드수가 가장 큰 비인접노드들을 먼저 선택하는 해법(DB)을 제시하였다. Hertz[16]는 DB보다 소수정향 COSINE이라 불리는 해법을 제시하였다. COSINE에서는 contraction에 의해 나타나는 새로운 노드가 나머지 다른 모든 노드들과 인접하지 않는 한, 그 새로운 노드는 다

음 contraction의 대상 노드중에 하나가 되고 다른 하나의 노드는 DB와 동일한 방법으로 선택한다.

3.5 노드채색순위의 결정방법에 의한 분류

앞에서 소개된 해법들은 노드채색순위의 결정방법을 중심으로 FOA와 AOA 및 FOA와 AOA를 혼용하는 해법 등 세가지로 구분할 수 있다. FOA에 속하는 해법은 LF, MLF, SL 등이고, AOA에 속하는 해법은 Dsatur, AMIS, RLF, DSI, DB, COSINE 등이다. 이외에 LFI, SLI, Dunstan의 해법은 FOA와 AOA를 혼합한 형태로 볼 수 있다.

〈표 1〉은 지금까지 소개된 해법들을 해법진행규칙 및 노드채색순위결정방법을 중심으로 분류한 것이다.

4. 결 론

지금까지 발표된 연구들 중에 일부분이기는 하지만, NCP 해의 상한과 하한 및 대표적인 몇가지 NCP 해법들을 소개하였다. 또한 채널 할당문제와 같은 NCP의 일반화된 모형에 적용하는 관점에서, 해법들을 해법진행규칙 및 노드채색순위의 결정방법을 중심으로 분류했다. 이러한 분류는 향후 새로운 해법의 개발이나 현실문제에 적용하기 위한 적절한 해법의 선택을 하는 데에 참고될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Arjomandi, E., "An Efficient Algorithm for Colouring the Edges of a Graph with $\Delta+1$ Colours," *INFOR Journal*, Vol.20, No.2(1982), pp.82-101.
- [2] Berge, C., *The Theory of Graphs and Its Applications*, Wiley, New York, 1962.
- [3] Bondy, J.A., "Bounds for the Chromatic Number of a Graph," *Journal of Combinatorial Theory*, Vol.7(1969), pp.96-98.
- [4] Box, F., "A Heuristic Technique for Assigning Frequencies to Mobile Radio Nets," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol.27, No.2(1978), pp. 57-64.
- [5] Brélaz, D., "New Methods to Color the Vertices of a Graph," *Communications of the ACM*, Vol.22, No.4(1979), pp. 251-256.
- [6] Brooks, R.L., "On Colouring the Nodes of a Network," *Proceedings of the Cambridge Philosophical Soc.*, Vol.37 (1941), pp.194-197.
- [7] Christofides, N., *Graph Theory: An Algorithmic Approach*, Academic Press, London, 1978.
- [8] Dunstan, F., "Greedy Algorithms for Optimizing Problems," Presented at *Euro I meeting*, Brussels, 1975.
- [9] Dutton, R.D. and R.C. Brigham, "A New Graph Coloring Algorithm," *The Computer Journal*, Vol.24, No.1(1981), pp.85-86.
- [10] Eilon, S. and N. Christofides, "The Loading Problem," *Management Science*, Vol.17, No.5(1971), pp.259-268.
- [11] Gamst, A., "Some Lower Bounds for a Class of Frequency Assignment Problems," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol.35, No.1(1986), pp. 8-14.
- [12] Garey, M.R. and D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.
- [13] Geller, D.P., "Problem 5713," *American Mathematical Monthly*, Vol.77(1970), pp.85.
- [14] Hale, W.K., "Frequency Assignment: Theory and Applications," *Proceedings of the IEEE*, Vol.68, No.12(1980), pp. 1497-1514.
- [15] Harary, F., *Graph Theory*, Addison-

- Wesley, Massachusetts, 1969.
- [16] Hertz, A., "A Fast Algorithm for Coloring Meyniel Graphs," *Journal of Combinatorial Theory Series B*, Vol. 50(1990), pp.231-240.
- [17] Hertz, A., "COSINE: a New Graph Coloring Algorithm," *Operations Research Letters*, Vol.10(1991), pp. 411-415.
- [18] Johnson, D.S., "Approximation Algorithms for Combinatorial Problems," *Journal of Computer and System Sciences*, Vol.9(1974), pp.256-278.
- [19] Johnson, D.S., "Worst Case Behavior of Graph Coloring Algorithms," *Proceedings of the 5th Southeast Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, (1974), pp.513-527.
- [20] Krarup, J. and D. de Werra, "Chromatic Optimization: Limitations, Objectives, Uses, References," *European Journal of Operational Research*, Vol. 11(1982), pp.1-19.
- [21] Leighton, F.T., "A Graph Coloring Algorithm for Large Scheduling Problems," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol.84, No.6(1979), pp.489-506.
- [22] Lovász, L., "Three Short Proofs in Graph Theory," *Journal of Combinatorial Theory*, Vol.19(1975), pp.111-113.
- [23] Matula, D.W., "A Min-Max Theorem for Graphs with Application to Graph Coloring," *SIAM Review*, Vol.10, No.4 (1968), pp.481-482.
- [24] Matula, D.W., " k -Components, Clusters and Slicings in Graphs," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 22, No.3(1972), pp.459-480.
- [25] Matula, D.W., G. Marble, and J.D. Isaacson, *Graph Theory and Computing*, Academic Press, New York, 1972.
- [26] Melnikov, L.S. and V.G. Vizing, "New Proof of Brooks' Theorem," *Journal of Combinatorial Theory*, Vol.7(1969), pp. 289-290.
- [27] Myers, B.R. and R. Lin, "A Lower Bound on the Chromatic Number of a Graph," *Networks*, Vol.1, No.3(1971), pp.273-277.
- [28] Nordhaus, E.A. and J.W. Gaddum, "On Complementary Graphs," *American Mathematical Monthly*, Vol.63(1956), pp. 175-177.
- [29] Park, S.S., "Integer Programming Approach to the Edge Coloring Problem," Ph.D. Dissertation, Cornell University, 1989.
- [30] Pennotti, R.J. and R.R. Boorstyn, "Channel Assignments for Cellular Mobile Telecommunications Systems," *Proceedings of IEEE Nat. Telecommunications Conference*, (1976), pp.16.5-1-16.5-5.
- [31] Sivarajan, K.N., R.J. McEliece and J.W. Ketchum, "Channel Assignment in Cellular Radio," *39th IEEE Vehicular Technology Conference*, (1989), pp.846-850.

- [32] Szekeres, G. and H.S. Wilf, "An Inequality for the Chromatic Number of a Graph," *Journal of Combinatorial Theory*, Vol.4(1968), pp.1-3.
- [33] Vizing, V.G., "On an Estimate of the Chromatic Class of a p -Graph," (*Russian*) *Diskretnyi Analiz*, Vol.3(1964), pp.25-30.
- [34] Welsh, D.J.A. and M.B. Powell, "An Upper Bound for the Chromatic Number of a Graph and Its Application to Timetabling Problems," *The Computer Journal*, Vol.10(1967), pp.85-86.
- [35] Werra, D. de, "An Introduction to Timetabling," *European Journal of Operational Research*, Vol.19(1985), pp.151-162.
- [36] Williams, M.R., *Combinatorial Structures and Their Applications*, Gordon and Breach, New York, 1970.
- [37] Wood, D.C., "A Technique for Colouring a Graph Applicable to Large Scale Timetabling Problems," *The Computer Journal*, Vol.12, No.4(1969), pp.317-319.
- [38] Zoellner, J.A. and C.L. Beall, "A Breakthrough in Spectrum Conserving Frequency Assignment Technology," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol.19, No.3(1977), pp.313-319.