韓國經營科學會誌
第18卷 第3號
1993年 12月

제조시스템의 운영형태에 관한 분석 및 설계

김성철*

Analysis and Design of Control Strategies in Manufacturing Systems with Serial Stages

Sung Chul Kim*

Abstract

Several alternative manufacturing control strategies are under study in the literature. They are, specifically, push system, pull system, conwip system, and, as a special case, infinite buffer system. We focus on modeling, comparison, analysis, and design of these systems. The event epoch sequences of each system are generated which also enable us to compare their performances. Then the stochastic monotonicity of these enent epoch sequences in several important design parameters are established through the structure of the generalized semi-Markov schemes on which they are based. Finally, we solve the stochastic optimization problem which minimizes these event epochs. Our results supplement the applicability of some previously known results in the literature.

1. 서 론

본 논문에서는 일반적인 분포의 작업 소요 시간을 요하는 하나의 서버와 제한된 대기 공간을 갖는 생산 단계 또는 작업장(work-station)으로 구성된 제조 시스템으로서 확정적 경로 변환(deterministic routing)을 갖는 생산 시스템에 대하여 다룬다. 확정적 경로 변환이란 하나의 상태(state)에서 사상(event) 발생에 의한 상태의 변이가 일정한 경우를 의미하며 일괄 생산 형태의 제조 시스템으로서 작업물(job)은 첫번째 단계로 진입되어 순차적으로 다음 단계를 거쳐 마지막 단계에서 작업이 완료되면 시스템을 떠나게 된다. 작업물 즉 원재료나 부품의 공급과 최종 제품의 수요는 무한

* 덕성여자대학교 경영학과

한 것으로 가정 한다.

언급된 제조 시스템은 각 단계에서의 제한된 대기 공간에 의하여 봉쇄 현상이 발생하며 이러한 봉쇄 현상과 관련된 제조 시스템의 운영 형태는 크게 나누어 Push 시스템, Pull 시스템, Constant Work-In-Process(Conwip) 시스템, 그리고 특수한 경우로서 무한한 대기 공간을 갖는 Infinite Buffer 시스템으로 구분할 수 있다. Push 시스템은 작업물이 주어진 단계에서 작업을 완료하고 다음 단계에 여분의 대기 공간이 존재하면 다음 단계에 진입하여 차례로 작업을 수행하게 된다. 이에 반하여 Pull 시스템은 주어진 단계에서 다음 단계로의 작업물의 전이는 다음 단계에서의 수요에 의하며 하나의 단계에서 다음 단계로의 작업물의 전이는 주어진 단계의 수요를 유발하여 전 단계로 부터의 작업물의 진입을 가능케 한다. Push 시스템과 Pull 시스템이 혼용된 제조 시스템으로서 각 단계에서는 push 형태를, shop 차원에서는 pull 형태를 갖는 Conwip 시스템은 주어진 단계에서 작업을 완료한 작업물은 다음 단계에 여분의 대기 공간이 존재하면 다음 단계로 진입하나 첫번째 단계에서 다음 단계로의 작업물의 진입은 마지막 단계에서 하나의 작업이 완료된 작업물이 시스템을 벗어나는 경우에만 가능하다. 그러므로 첫번째 단계에는 무한한 작업물의 공급에 의하여 항상 작업이 진행 중이거나 작업이 완료된 하나의 작업물이 존재하고 최종 제품의 수요는 작업물의 둘째 단계로의 진입을 가능케 하여 시스템 내에 존재하는 작업물의 총수는 항상 일정하다. 지금까지의 각 단계가 제한된 대기 공간을 갖는 제조 시스템에 있어서는 봉쇄 현상이 발생하는데 반하여 무한한 대기 공간에 의하여 봉쇄 현상이 발생하지 않는 push 형태의 제조 시스템으로서 Infinite Buffer 시스템을 고려할 수 있다. 이러한 Infinite Buffer 시스템은 현실성의 제약에도 불구하고 제조 시스템의 분석과 관련지어서 많은 관심의 대상이 되어 왔다.

본 논문에서는 이러한 다양한 운영 형태에 따른 제조 시스템들의 수행도를 측정할 수 있는 모형을 수립하고 동일한 조건 하에서 수행도를 서로 비교 제시하므로서 주어진 제조 시스템들의 상대적 효율성을 파악하고 이러한 모형에 기초하여 주어진 제조 시스템 들에 적용 가능한 설계에 관한 문제를 다루고자 한다. 이러한 설계에 관련된 문제로서는 시스템의 수행도에 영향을 주는 모수(parameter)로서 각 단계에서의 대기 공간의 수, 서버의 수, 그리고 작업 소요 시간이 시스템의 수행도에 미치는 영향, 그리고 이의 최적 설계에 관련된 문제를 언급할 수 있다.

2. 수행도

주어진 제조 시스템들의 수행도는 시스템의 상태가 연속적으로 변화되지 않고 이산적으로 일어나는 서비스 과정의 결합으로 변화되는 동적 시스템으로 이러한 이산적 사상의 동적 시스템(DEDS:Discrete Event Dynamic System)은 표본 경로(sample path)에 의한 반복적 관계로 모형화 될수 있다. 이러한 제조 시스템의 반복적 관계로의 모형화는 Yao와 Cheng[18], Mitra와 Mitrani[10], 그리고 Spearman과 Zazanis[17]등에서 찾아볼 수 있다. 주어진 제조 시스템을 DEDS로 모형화하기 위하여 i, $i=1,2,\cdots,M$,을 i번째 생산 단계, n, $n=1,2,3,\cdots$,을 n번째 작업물을 나타낸다고 하고 S_n^i

를 단계 i에서 n번째 작업물의 작업 소요 시간, I_n^i를 단계 i에서 n번째 작업물의 작업이 시작되는 시점, C_n^i를 단계 i에서 n번째 작업물이 작업을 완료하는 시점, 그리고 D_n^i를 n번째 작업물이 단계 i에서 i+1로 진입하는 시점이라고 한다.

2.1 Push 시스템

Push 시스템과 관련 지어서 제조 시스템에서 고려될 수 있는 봉쇄 현상으로서 서비스 봉쇄(service blocking)와 이전 봉쇄(transfer blocking)를 고려할 수 있다. 서비스 봉쇄는 다음 단계의 대기 공간이 대기 능력에 다다르면 주어진 단계에서의 서버는 작업을 멈추게 되며 이전 봉쇄의 경우에는 다음 단계가 대기 능력에 도달하여도 주어진 단계의 서버는 작업을 수행하나 작업이 완료된 후에도 다음 단계의 대기 공간에 여유 공간이 없는 경우에는 완료된 작업물이 서버를 점유하고 서버는 작업을 멈추게 된다. 그러므로 다음 단계의 대기 공간이 대기 능력에 다다르면 서비스 봉쇄의 경우에는 그 시점에서 이전 봉쇄의 경우에는 서버에서의 작업물이 작업을 완료 하였으나 다음 단계의 대기 공간에 여유 공간이 없는 경우에만 서버는 작업을 멈추게 된다.

그러므로 단계 i, i=1,…,M,에서 작업을 기다리는 작업물의 대기 능력이 K_i라고 하면 사상 발생 시점에 대한 반복적 관계는 다음과 같이 모형화될 수 있다. 서비스 봉쇄의 경우에는

$$I_n^i = \max\ (D_n^{i-1},\ D_{n-1}^i,\ D_{n-K_{i+1}}^{i+1}),$$

$$C_n^i = I_n^i + S_n^i,$$

$$D_n^i = C_n^i,$$

가 성립되며 이전 봉쇄의 경우에는

$$I_n^i = \max\ (D_n^{i-1},\ D_{n-1}^i),$$

$$C_n^i = I_n^i + S,$$

$$D_n^i = \max\ (C_n^i,\ D_{n-K_{i+1}}^{i+1}),$$

가 성립된다.

위의 반복적 관계는 다음과 같이 설명될 수 있다. 서비스 봉쇄의 경우에는 단계 i에서 n번째 작업물이 작업이 시작되기 위하여는 작업물이 단계 i에 진입이 완료되어 있고 n−1번째 작업물이 단계 i를 벗어나 단계 i+1에 진입이 완료된 후라야 하며 단계 i+1에 여유 공간이 존재 하여야 한다. 또한 단계 i+1에 여유 공간이 존재하므로 단계 i에서의 작업 완료 시점은 단계 i+1로의 진입 시점이 된다. 이전 봉쇄의 경우에는 단계 i에서 작업이 완료되고 단계 i+1에 여유 공간이 존재한 경우에 단계 i+1에 진입이 가능하므로 위의 관계가 성립된다.

2.2 Pull 시스템

Pull 시스템은 칸반 시스템으로 특징 지어질 수 있으며 칸반 시스템은 각 단계에 주어진 일정한 수의 칸반을 가지고 작업물의 수 및 흐름을 통제한다. 단계 1은 하나의 칸반, 즉 $K_1=1$, 을 가지며 단계 i, i=2,…,M,는 K_i개의 칸반이 배치되어 각 단계는 여분의 칸반으로 표시되는 수요에 의하여 전 단계에서 작업이 완료된 작업물을 주어진 단계로 진입시킨다. 그러므로 단계 i에 배치된 K_i개의 칸반은 단계 i에서 작업을 기다리는 작업물과 작업을 완료하였으나 단계 i+1에 여분의 칸반이 존재하지 않아 단계 i+1로 진입이 봉쇄된 작업물에 부착되며 남는 칸반은 여분의 칸반으로 존재한다. 그러

므로 단계 i-1에 작업이 완료된 작업물이 존재하고 단계 i에 여분의 칸반이 존재할 때는 단계 i-1의 작업이 완료된 작업물에 즉시 단계 i의 여분의 칸반이 부착되어 단계 i로 진입하여 단계 i에서 작업을 기다리는 작업물이 되며 주어진 작업물에 부착되었던 칸반은 단계 i-2에 작업이 완료된 작업물을 단계 i-1로 진입 시키거나 그렇지 않은 경우에는 여분의 칸반이 되어 단계 i-2에서의 작업물의 진입을 기다린다. 단계 1에 존재하는 하나의 칸반은 무한한 작업물의 공급에 의하여 항상 작업중인 작업물이나 작업이 완료된 작업물에 부착되어 있으며 단계 M에 존재하는 칸반은 무한한 수요의 가정에 의하여 작업이 완료된 작업물에는 부착되지 않는다.

Pull 시스템에 있어서의 수요의 무한성은 일반적으로 현실성이 부여된 가정으로 실제적인 수요의 도착 과정에 시스템 내의 피드백 과정이 결합되어 이루어진 가정이다. 이는 대 일정계획에 의하여 주어진 계획 기간에 일정량의 수요량 즉 생산량이 배정되어 실제 수요의 초과분은 계획된 판매(push sales)나 재고등으로 처리되는 것을 의미한다.

그러므로 Pull 시스템에 있어서의 반복적 관계는 다음과 같다.

$$I_n^i = \max\,(C_{n-1}^i,\ D_{n-K_i}^i,\ D_n^{i-1}),$$

$$C_n^i = I_n^i + S_n^i,$$

$$D_n^i = \max\,(C_n^i,\ C_{n-K_i+1}^{i+1},\ D_{n-K_i-1}^{i+1})$$

이 성립된다. 이는 단계 i에서 n번째 작업물의 작업이 시작되기 위하여는 n-1번째 작업물의 작업이 완료되어야하고 서버에 작업물이 존재하지 않아야하며 n번째 작업물은 단계 i에 존재하여야 한다. 또한 단계 i+1로 진입하기위하여는 단계 i에서 작업이 완료되고 단계 i+1에 여분의 칸반이 존재하여야 한다.

2.3 Conwip 시스템

Conwip 시스템에서의 운영 형태는 언급된 칸반 시스템의 운영 형태와 관련지어 다음과 같이 설명될 수 있다. 시스템내에는 일정한 수의 작업물과 동일한 개수의 칸반이 존재하며 각 작업물에는 하나의 칸반이 부착되어 단계 M에서 하나의 작업물이 작업을 마치고 시스템을 벗어나면 작업물에 부착되어있던 칸반은 여분의 칸반이 되어 단계 1에서의 작업물이 작업중인 경우는 작업 완료를 기다리며 작업이 완료된 경우에는 이에 부착되어 단계 2로 진입하게 된다. 그러므로 단계 1에서 단계 2로의 작업물의 진입은 pull 형태에 의하나 다른 단계에서의 작업물의 전이는 다음 단계에 여유 공간이 존재하면 다음 단계로 진입하는 push 형태를 갖는다. 그러므로 Conwip 시스템은 일반적인 분포의 서비스 시간을 갖는 폐쇄 순환 네트웍(Closed Cyclic Network)의 형태를 취하며 이의 반복적 관계는

$$I_n^i = \max\,(D_n^{i-1},\ D_{n-1}^i),$$

$$C_n^i = I_n^i + S_n^i,$$

$$D_n^i = C_n^i$$

이며 여기에서 I_n^2인 경우는 max $(D_n^1,\ D_{n-(L-1)}^M,\ D_{n-1}^2)$로 대치된다. 여기에서 L은 시스템내에 존재하는 작업물의 총수를 의미하며 L-1은 작업물의 총수에서 단계 1에 존재하는 하나의 작업물을 감함을 의미한다.

2.4 Infinite Buffer 시스템

Infinite Buffer 시스템은 Conwip 시스템에서 시스템내의 작업물의 총수에 대한 제약이 없어진 경우로서 하나의 단계에서 작업을 완료

한 작업물은 바로 다음 단계로 진입하게 된다. 그러므로 이의 반복적 관계는

$I_n^i = \max(D_n^{i-1}, D_{n-1}^i)$,

$C_n^i = I_n^i + S_n^i$,

$D_n^i = C_n^i$

가 성립된다.

위의 반복적 관계는 언급된 제조 시스템들에 있어서 모든 n, $n=1,2,3,\cdots$ 과 i, $i=1,\cdots,M$,에 대하여 성립되며 시스템 수행도는 계획된 생산량인 N개의 작업물의 작업을 모두 완료하는 시점(makespan), D_N^M, 또는 생산률 N/D_N^M으로 표시될 수 있으며 작은 makespan은 생산률을 증대 시킨다. 주어진 반복적 관계는 변이 상태(transition state)와 안정 상태(steady state) 모두에서 시스템의 수행도를 모두 산정 가능할 뿐 아니라 작업 소요 시간의 분포상의 제약에 구애되지 않는등등의 많은 장점을 수반한다.

3. 수행도 비교

언급된 제조 시스템들과 관련지어서 Spearman과 Zazanis[17]는 작업 소요 시간이 지수분포를 갖는 경우에 Buzen[3]의 승법형(product form) 해를 이용하여 Conwip 시스템과 Infinite Buffer 시스템의 수행도를 산정하고 표본 경로에 의한 반복적 관계에 의하여 Conwip 시스템과 Pull 시스템의 수행도를 서로 비교 하였다. Yao와 Cheng[18]은 일반적인 작업 소요 시간에 있어서 이전 봉쇄와 서비스 봉쇄를 비교하였으며 김성철[1]은 Yao와 Cheng[18]의 결과의 연장 선상에서 Push 시스템과 Pull 시스템의 수행도를 비교하였다. 여기에서는 제조 시스템의 수행도를 추계적으로 비교하여 고려되는 제조 시스템에서 Infinite Buffer 시스템의 수행도가 가장 높고 다음이 Conwip 시스템, 대기 능력이 $K_{i-1}+K_i$인 이전 봉쇄의 Push 시스템, Pull 시스템, 대기 능력이 Ki인 이전 봉쇄의 Push 시스템, 그리고 서비스 봉쇄인 Push 시스템 순으로 수행도가 낮아짐을 보이고자 한다.

3.1 Push 시스템의 서비스 봉쇄와 이전 봉쇄

관계식에서 주어진 n과 i에 대하여 $X=\max(D_n^{i-1}, D_{n-1}^i)$, $Y=S_n^i$라고하고 $Z=D^{i-1}_{n-K_{i+1}}$이라고 하면 주어진 반복적 관계식으로부터

$$\max(X,Z) + Y = \max\{(X+Y),(Z+Y)\}$$
$$\geq \max\{(X+Y),Z\}$$

가 성립(Yao와 Cheng[18])되어 모든 n과 i에 대하여 사상 발생 시점이 이전 봉쇄가 서비스 봉쇄보다 빠르며 따라서 이전 봉쇄의 수행도가 서비스 봉쇄의 수행도 보다 높다.

3.2 이전 봉쇄와 Pull 시스템

Pull 시스템이 이전 봉쇄보다 수행도가 높음은 김성철[1]에 제시되어 있다. 주어진 증명은 Push 시스템에 있어서의 봉쇄 현상에 대한 다음의 과정을 포함한다. Push 시스템의 서비스 봉쇄는 다음 단계의 작업물 저장소가 대기 공간에 다다르면 그 시점에서 이전 봉쇄의 경우에는 서버에서의 작업물의 작업이 완료된 시점에서 서버는 작업을 멈추게 된다. 그러므로 봉쇄 현상이 일어난 경우에 주어진 단계에는 작업이 완료된 작업물이 서비스 봉쇄인 경우에는

없으나 이전 봉쇄의 경우에는 하나가 존재하게 된다. 그러므로 서비스 봉쇄는 Block-and-Hold 0, 그리고 이전 봉쇄의 경우에는 Block-and-Hold 1으로 명명할 수 있다. 이에 반하여 단계 i, $i=1,\cdots,M$,에 작업을 기다리는 작업물(작업중인 작업물 포함)의 대기 능력이 a_i, 작업을 완료한 작업물의 대기 능력이 b_i로서 $b_{i-1}+a_i=K_i+1$, $i=1,\cdots,M$,인 Push 시스템을 고려할 수 있으며 $b_{i-1}+a_i=K_i+1$인 이유는 서버에서는 작업이 진행 중인 작업물과 작업이 완료된 작업물이 모두 존재 가능하기 때문이며 실제 대기 공간은 K_i로서 단계 i-1에서 작업을 완료한 작업물과 단계 i에서 작업을 기다리거나 작업중인 작업물의 총수는 K_i를 넘지 못한다. 이러한 경우를 위에 반하여 Block-and-Hold b라고 명명하기로 한다. 이의 특수한 경우로서 서비스 봉쇄의 경우에는 $a_i=K_i$, $b_{i-1}=0$, 이전 봉쇄의 경우에는 $a_i=K_i$, $b_{i-1}=1$이며 Block-and-Hold b와 Block-and-Hold 1의 수행도는 같다.

3.3 Pull 시스템과 대기 능력이 $K_{i-1}+K_i$인 이전 봉쇄 시스템

Pull 시스템으로서 칸반 시스템은 단계 i에서 작업을 기다리는 작업물이나 작업을 완료한 작업물의 수는 모두 K_i까지 존재 가능하다. 그러므로 단계 i에서 작업을 기다리는 작업물의 총수는 대기 공간이 $K_{i-1}+K_i$로 확대되는 것은 아니나 단계 i-1에서 작업을 완료하고 단계 i로의 진입을 기다리는 작업물의 최대치 K_{i-1}과 단계 i에서 작업을 기다리는 작업물의 최대치 K_i의 합으로 $K_{i-1}+K_i$까지 존재 가능하며 인접한 단계와 상호 조정을 통하여 대기 능력이 K_i인 이전 봉쇄 보다는 높음이 증명되었으며 여기에서는 대기 능력이 $K_{i-1}+K_i$인 이전 봉쇄 보다는 수행도가 낮음을 보이고자 한다.

대기 능력이 $K_{i-1}+K_i$인 이전 봉쇄의 경우 이의 반복적 관계는

$$I_n^i = \max(D_n^{i-1}, D_{n-1}^i),$$

$$C_n^i = I_n^i + S_n^i,$$

$$D_n^i = \max(C_n^i, C_{n-(K_i+K_{i+1})}^{i+1})$$

이 되며 비교를 쉽게하기 위하여 주어진 반복적 관계를 $b_{i-1}=K_{i-1}$, $a_i=K_i$, $i=2,\cdots,M$,인 Block-and-Hold b의 형태로 치환하면

$$I_n^i = \max(C_{n-1}^i, D_{n-K_i}^i, D_n^{i-1}),$$

$$C_n^i = I_n^i + S_n^i,$$

$$D_n^i = \max(C_n^i, C_{n-K_{i+1}}^{i+1}, D_{n-(K_i+1+K_{i+1})}^{i+1})$$

이 성립된다. 이를 Pull 시스템의 반복적 관계와 비교하면 다른 항은 모두 동일하며 $D_{n-K_{i+1}}^{i+1} > D_{n-(K_i+1+K_{i+1})}^{i+1}$이므로 주어진 대기 능력을 갖는 이전 봉쇄의 Push 시스템이 Pull 시스템보다 수행도가 높다.

3.4. Pull 시스템과 Conwip 시스템

두개의 제조 시스템의 수행도를 비교하기 위하여 초기 상태에 있어서 Pull시스템과 Conwip 시스템 모두 단계 1에는 공급의 무한성에 의하여 하나의 작업물이 존재한다. 단계 i, $i=2,\cdots,M$,에는 Pull 시스템의 경우에는 K_i개의 작업물이 K_i개의 칸반을 점유하고 존재하며 여분의 칸반은 존재하지 않는다. Conwip 시스템에 있어서도 Pull 시스템에서와 같이 단계 i에 K_i개의 작업물이 존재하며 시스템 내에 존

재하는 작업물의 총수는 항상 $L=\sum_{i=2}^{M}K_i+1$이다.

그러므로 두 시스템의 반복적 관계를 비교하면 모든 i와 n에 대하여 I_n^2를 제외한 모든 사상 발생 시점에 대하여 Conwip 시스템이 Pull 시스템보다 빠르며 따라서 모든 n에 대하여 Conwip 시스템의 $D_{n-(L-1)}^M$이 Pull 시스템의 D_n^1보다 빠르므로 Conwip 시스템의 I_n^2가 Pull 시스템의 I_n^2보다 빠르다. 그러므로 Conwip 시스템의 수행도가 높다.

3.5 Conwip 시스템과 Infinite Buffer 시스템

두 시스템의 반복적 관계를 비교하면 모든 경우는 같으나 단계 2에서 Conwip 시스템의 진입 시점이 Pull 시스템보다 늦으므로 Infinite Buffer 시스템의 수행도가 높다.

유도된 결과는 대기 능력의 결과가 수행도의 증가를 가져온다는 일반적인 인식을 고려할때 당연한 결과라고 할 수 있다. 그럼에도 불구하고 주어진 결과는 pull 시스템에 있어서 특히 관심의 대상이 된다. 일반적으로 pull 시스템은 push 시스템보다도 훨씬 효율적인 제조 시스템으로 인식되고 있다. 봉쇄 현상의 관점에서 볼때 주어진 결과는 pull 시스템은 push 시스템과 비교할때 약간의 대기 능력의 증대 효과를 가져오는데 불과하다고 할 수 있다. 실제적으로 pull 시스템으로서 칸반 시스템의 모체가 되는 just-in-time 생산 방식에 있어서 작업장 구성, 제품 믹스, 부하, 표준화, 가동 준비 시간, 품질 관리등과 관련된 제반 조건의 적절한 실행이 전제되지 않는한 칸반 시스템의 적용만으로는 수행도의 지대한 향상을 기대하기 힘들다고 결론지을 수 있다.

4. 단조성

본 절에서는 주어진 제조 시스템에 있어서 각 단계에서의 설계상의 주요 인자로서 확률적 요소나 구조적 요소가 시스템의 수행도에 미치는 영향을 다루고자 한다. 여기에서 확률적 요소는 작업 소요 시간을 구조적 요소는 대기능력/칸반의수, 그리고 서버의 수를 의미한다. 이러한 작업 소요 시간의 감소나 대기 능력이나 서버의 수의 증가가 작업 완료 시점의 감소나 생산률의 증가를 가져올 수 있다면 주어진 단조성(monotonicity)은 제조 시스템의 설계에 유용한 정보를 제공한다고 할 수 있다.

언급된 제조 시스템과 관련지어서 수행도에 관한 일계 특성(first order property)으로서 단조성과 이계 특성으로서의 concavity/convexity에 관한 결과는 문헌들에서 부분적으로 언급되고 있다. Shanthikumar와 Yao[12]는 Conwip시스템의 모형화에 적용될 수 있는 순환 대기 네트웍이 지수 분포를 가질때 총 작업물의 수에 대한 수행도의 단조성을 Shanthikumar와 Yao[13]는 이계 특성으로서의 concavity를 보였으며 Shanthikumar와 Yao[14]는 언급된 순환 대기 네트웍이 제한된 대기 공간을 가질때 서비스율, 대기 능력, 총 작업물의 수에 대한 수행도의 단조성과 총 작업물의 수에 대한 생산률의 concavity를 보였다. 또한 Shanthikumar와 Yao[15]에서는 Push 시스템의 모형화에 사용될 수 있는 tandem 네트웍과 언급된 지수 분포의 순환 대기 네트웍에서 서비스 시간에 대한 수행도의 이계 특성을 광범

위하게 제시하였다. 여기에서는 주어진 제조 시스템의 구조를 GSMP(Generalized Semi Markov Process)(Glynn[7])로 모형화하여 주어진 제조 시스템들의 단조성을 제시하고자 한다. 시스템의 GSMP 모형화는 주어진 시스템의 전개 과정을 구조적 요소인 GSMS(Generalized Semi Markov Scheme)과 확률적 요소로 분리함으로서 문제의 분석을 용이하게 한다(Glasserman과 Yao[5]).

주어진 제조 시스템의 상태를 s라고 하면 주어진 상태 s는 이전 봉쇄의 경우에는 $(a,b) = \{(a_1,\cdots,a_M),(b_1,\cdots,b_M)\}$, 여기에서 a_i는 단계 i에서 작업을 기다리는 작업물의 수, b_i는 작업물이 단계 i에서 작업을 마친후 봉쇄되어 서버를 점유하고 있으면 1 그렇지 않으면 0을 나타내며, Pull 시스템의 경우에는 $(a,b) = \{(a_1,\cdots,a_M),(b_1,\cdots,b_M)\}$으로 단계 i에서 a_i는 작업을 기다리는 작업물의 수, b_i는 작업을 완료한 작업물의 수를 나타낸다. 주어진 상태에서 상태의 변이를 유발하는 사상은 각 단계에서의 작업 완료이며 단계 i에서 작업 완료를 사상 $\alpha_i, i=1,\cdots,M$,로 나타내면 주어진 특정한 상태 s에서 고려될 수 있는 사상의 집합, $\mathcal{E}(s)$는 이전 봉쇄의 경우에는 $\mathcal{E}(s)=[\{\alpha_i \cdot 1\{a_i(1-b_i)\}\}_{i=1}^{M}]$이며 Pull 시스템의 경우에는 $\mathcal{E}(s)=[\{\alpha_i \cdot 1(a_i > 0)\}_{i=1}^{M}]$으로 표시될 수 있다. 여기에서 $1(\cdot)$은 지정(indicator) 함수를 의미한다. $\Phi(s,\alpha_i)$를 주어진 단계 s에서 사상 α_i가 일어날 경우 도달되는 상태로서 $\alpha_i \in \mathcal{E}(s)$이다. s_0를 초기 상태, α^i를 i번째 일어나는 사상, $\sigma=\alpha^1\cdots\alpha^2\cdots\alpha^{k-1}$을 하나의 실행 가능한 사상들의 순서(string)라고하면 초기 상태 s_0로 부터 일련의 상태 $s_1,s_2,\cdots,s_k$가 주어진다.

4.1 작업 소요 시간

본 절에서는 주어진 제조 시스템의 설계와 관련지어서 확률적 요소로서의 작업 소요 시간에 대한 작업 완료 시점의 단조성을 보이고자 한다. 이러한 단조성은 주어진 GSMP의 모형화에 있어서 GSMS의 비중단성(noninterruption)과 대체성(permutability)등의 특성들과 관련이 있으며 이러한 특성은 종합되어 교환조건(commuting condition)으로 대체될 수 있다. 교환 조건이란 하나의 상태로 부터 동일한 수의 사상들의 발생에 의하여 도달되는 상태는 사상 발생 순서와 무관하다는 조건으로

$$(\alpha_i,\alpha_j) \subseteq \mathcal{E}(s) \Rightarrow \Phi(s,\alpha_i\alpha_j) = \Phi(s,\alpha_j\alpha_i)$$

로 표시될 수 있다.

주어진 제조 시스템들에 있어서 단계 i에서의 작업 완료 시점 C_n^i, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3,\cdots$, 은 작업 소요 시간 S_k^i, $i=1,\cdots,M$, $k=1,2,3,\cdots,n$, 에 대하여 추계적으로 증가 함수이다. 그러므로 단계 M에서 주어진 작업을 모두 완료하는 시점(makespan)도 작업 소요 시간에 대한 단조성이 성립된다. 여기에서 증가는 비감소를 나타내는 엄격하지 않는 의미로 사용된다.

위의 단조성은 주어진 제조 시스템에 있어서 교환 조건이 만족됨을 보임으로서 증명될 수 있다(Glasserman과 Yao[5]). 예를들어 이전 봉쇄의 경우 $\alpha_i \in \mathcal{E}\{(a,b)\}$라고하면 $\Phi\{(a,b),\alpha_i\} = (a',b')$는 다음과 같이 정의된다.

$$a' = a + 1(a_{i+1} < K_{i+1})\sum_{j=1}^{i}(e_{i+1} - e_j)\prod_{k=j}^{i} b_k,$$

$$b' = b - 1(a_{i+1} < K_{i+1})\sum_{j=1}^{i} e_j \prod_{k=j}^{i} b_k + 1(a_{i+1} = K_{i+1})e_i.$$

그러므로 $(\alpha_j,\alpha_k) \in \mathcal{E}(a,b)$인 경우 $1(a_{j+1} < K_{j+1}) = 0,1$, $1(a_{k+1} < K_{k+1}) = 0,1$인 경우를 고려하여 $\Phi\{(a,b),\alpha_j\alpha_k\} = \Phi\{(a,b),\alpha_k\alpha_j\}$임을 증명할 수 있다. 또한 Pull 시스템의 경우를 보면

$$a' = a - e_i + 1(a_{i+1} + b_{i+1} < K_{i+1}) \cdot \{e_{i+1} + \sum_{j=1}^{i-1} e_{j+1} \prod_{k=j}^{i-1} 1(b_k > 0)\},$$

$$b' = b + 1(a_{i+1} + b_{i+1} = K_{i+1}) e_i - 1(a_{i+1} + b_{i+1} < K_{i+1}) \cdot \{\sum_{j=1}^{i-1} e_j \prod_{k=j}^{i-1} 1(b_k > 0)\}$$

이며 $b_{i-1}=0$인 경우와 $b_{i-1} b_{i-2} \cdots b_{i-r} > 0$인 경우에 대하여 각각 $a_{i+1}+b_{i+1}<K_{i+1}$인 경우와 $a_{i+1}+b_{i+1}=K_{i+1}$인 경우를 고려함으로써 위의 교환 조건은 증명될 수 있다. 다른 형태의 제조 시스템에 있어서도 위와 같은 방법으로 교환 조건은 증명될 수 있으며 따라서 작업 소요 시간에 대한 단조성은 언급된 모든 제조 시스템에 대하여 성립된다.

4.2 대기 능력 / 칸반

대기 능력이나 칸반의 수에 따른 제조 시스템의 단조성은 대기 능력이나 칸반의 수가 증가된 제조 시스템에 있어서 작업 완료 시점은 원래의 제조 시스템에 있어서의 작업 완료 시점보다 빠르다고 언급될 수 있다. 대기 능력이나 칸반의 수(또는 Conwip 시스템에 있어서 시스템내의 총 작업물의 수)의 증가에 따른 작업 완료 시점의 감소는 DEDS에 의한 반복적 관계에서 쉽게 보여질 수 있으나 여기에서는 GSMP의 구조하에서 위의 단조성을 보이고자 하며 제시된 수행도의 작업 소요 시간에 대한 단조성은 주어진 과정에서 중요한 역활을 한다. 적용될 증명과정은 모든 제조 시스템에서 동일하므로 여기에서는 이전 봉쇄의 경우만을 다루기로 한다.

주어진 제조 시스템과 단계 j에서 대기 공간이 하나 증가된, 즉 K_j+1의 대기 능력을 갖는 제조 시스템을 고려하여 δ_n^i를 증가된 대기 공간을 갖는 제조 시스템에 있어서 단계 i에서 n번째 작업물의 작업 소요 시간, ξ_n^i를 작업 완료 시점이라고하면 $S_n^i \le \delta_n^i$일때 $C_n^i = \xi_n^i$인 δ_n^i가 존재한다. 이는 원래의 제조 시스템이 단계 j에 의하여 단계 j−1의 공정 수행이 봉쇄되었을때 대기 공간이 증가된 제조 시스템의 작업 소요 시간을 연장하여 원래의 제조 시스템과 사상 발생 시간을 동일하게 구성하므로서 성립될 수 있다. 그러므로 전술된 작업 소요 시간에 대한 단조성에 의하여 동일한 작업 소요 시간에 대하여는 $C_n^i \ge \xi_n^i$, $i=1,\cdots,M$, $n=1,2,3,\cdots,$가 성립된다.

4.3 서　버

서버의 수에대한 단조성은 지금까지 고려되온 하나의 서버로 구성된 제조 시스템으로서의 제약 조건에서 벗어나 각 단계가 복수의 서버를 갖는 경우를 의미하며 주어진 제조 시스템에 있어서 어느 단계에 있어서의 서버의 수의 증가는 작업 완료 시점의 감소를 의미한다. 서버의 수에 대한 단조성도 작업 소요 시간에 대한 단조성에 의하여 쉽게 증명될 수 있다.

위의 단조성은 당연한 결과로 여겨질수도 있으나 간단한 예로서 지금까지의 확정적 경로 변환에 반하여 확률적 경로 변환(probabilistic routing)을 갖는 Jobshop(Solberg[16]) 형태의 칸반 시스템을 고려하면 주어진 결과가 성립되지 않음을 쉽게 보일수 있다. 만약 주어진 Jobshop 내의 작업장(station) i와 작업장 j에서 모두 작업장 k로의 경로 변환이 가능하다고 하면 작업장 i에서의 작업 소요 시간의 감소는

작업장 j에서 작업장 k에의한 더욱 빈번한 봉쇄 현상을 경험할 수 있으며 작업장 j의 작업 완료를 지연시킬 수 있다. 전반적인 단조성에 대한 내용은 김성철[2]에 기술되어 있다.

5. 최적화

본장에서는 주어진 제조 시스템들에 있어서 각 단계에서의 최적 작업 소요 시간을 구하는 문제를 다루고자 한다. 이러한 문제로서는 만약 주어진 제조 시스템에 있어서 단계 i, i=1,…,M,에서의 작업 소요 시간, $S_i(\theta_i)$,가 모수(parameter) θ_i를 가지며 $S^i(\theta_i)=\gamma^i(\theta_i,\omega_i)$로서 θ_i는 설계 모수, ω_i는 θ_i에 독립적인 확률 변수인 경우를 들 수 있다. 이러한 종류의 작업 소요 시간의 예로서는 $S^i(\theta_i)=\xi_i+\phi^i(\theta_i)$ 또는 $S^i(\theta^i)=\xi_i\phi^i(\theta_i)$등이 있으며 $\phi^i(\theta_i)$는 θ_i에 대한 확정적(deterministic) 함수이다. $\underline{\theta}=(\theta_i)_{i=1}^{M}$이라 하고 $\mathcal{G}$를 비용 함수라고하면 언급된 최적화 문제는 주어진 N개의 작업물이 모든 작업을 단계 M에서 완료하는 시점(makespan)에 대한 비용 함수의 기대치, $E\mathcal{G}\{D_N^M(\underline{\theta})\}$ (부호의 간략화를 위하여 앞으로는 $E\mathcal{G}(\underline{\theta})$로 표기)를 최소화 하고자하는 문제로서 최적 설계 모수 벡터 $\underline{\theta}^*$를 구하고자하는 문제로 설명될 수 있다.

이러한 최적화 문제는 기본적으로 주어진 비용, $E\mathcal{G}(\underline{\theta})$의 convexity와 편도함수 $\partial/\partial\theta_i E\mathcal{G}(\underline{\theta})$의 산정 방법의 두가지 조건을 필요로 한다. 주어진 조건이 만족되면 다루려고하는 최적화 문제의 해 $\underline{\theta}^*$은 Robbins-Monro 알고리즘으로 불리우는 추계적 최적화 과정(Glynn[6], Kushner와 Clark[9])등에 의하여 모수를 반복적으로 개선하므로서 구하여질 수 있다. 이는

$$\theta_i^{r+1}=\theta_i^r-a^r\,\partial/\partial\theta_i\,E\mathcal{G}(\underline{\theta}^r)$$

로서 r, r=1,2,3,…,은 r번째 단계의 개선된 해의 절차를 의미하며 $\partial/\partial\theta_i E\mathcal{G}(\underline{\theta}^r)$은 r번째 단계에서의 모수 θ_i에 대한 기대 비용의 편도함수 그리고 a^r은 r번째 단계에서의 스탭 크기를 의미한다. 그러므로 모든 i에 대하여 $\partial/\partial\theta_i E\mathcal{G}(\underline{\theta}^*)=0$인 최적해 $\underline{\theta}^*$에 도달할 수 있다.

먼저 $E\mathcal{G}(\underline{\theta})$의 convexity는 만약 $S^i(\theta_i)$가 strong stochastic convexity(SSCX)(M. Shaked와 J. G. Shanthikumar[11])를 만족시키면 $E\{D_N^M(\underline{\theta})\}$도 DEDS의 반복적 관계에 의하여 SSCX를 만족시키며 (D.D. Yao와 D. Cheng(18), 김성철[1]) 만약 함수 $\mathcal{G}(\cdot)$가 증가하는 convex 함수이면 $E\{\mathcal{G}(\underline{\theta})\}$도 SSCX를 만족시킨다. 또한 추계적 편도함수의 산정은 DEDS의 반복적 관계에 의하여 하나의 표본 경로(sample path) 또는 시뮬레이션에 의하여 주어진 시스템의 모든 모수에 대한 수행도의 도함수를 얻을수 있는 Perturbation Analysis (PA)(Ho[8])에 의한다. PA에 의한 시스템 수행도의 모수에 대한 도함수가 불편 추정량(unbiased estimator)이 되기위하여는, 즉

$E\{\partial/\partial\theta_i\mathcal{G}(\underline{\theta})\}=\partial/\partial\theta_i E\{\mathcal{G}(\underline{\theta})\}$, i=1,…,M,

이 성립하기 위하여는 단조성에서 증명된 교환 조건이 요구되며 편도함수 산정을 위한 propagation 법칙(Cao와 Ho[4])에 의하여 한번의 시뮬레이션으로 부터 $E\{D_N^M(\underline{\theta})\}$과 $E\{\partial/\partial\theta_i D_N^M(\underline{\theta})\}$을 모두 산정할 수 있다.

제시된 최적화 절차는 고려되고 있는 모든 제조 시스템에 있어서 전술된 DEDS의 반복적 관계를 이용 적용될 수 있으며 이해를 위한 좀더 자세한 내용은 김성철[1]에서 참조할 수 있으므로 여기에서는 생략하기로 한다.

6. 결 론

본 논문에서는 봉쇄 현상과 관련지어 고려될 수 있는 제조 시스템의 다양한 운영 형태에 있어서 이의 분석과 설계에 관한 문제를 다루었다. 이러한 운영 형태로는 Push 시스템, Pull 시스템, Push와 Pull이 혼용된 Conwip 시스템, 그리고 특수한 경우로서 Infinite Buffer 시스템을 들 수 있으며 주어진 시스템들의 수행도 측정을 위한 분석적 방법이 제시되어 주어진 시스템의 수행도가 서로 비교되었다. 또한 시스템의 설계 모수로서 확률적 요소와 구조적 요소인 각 작업장에서의 작업 소요 시간과 대기 능력및 서버의 수에 대한 수행도의 일계 특성으로서의 단조성이 증명되었다. 주어진 시스템들의 최적화는 기본적인 추계적 최적화 과정인 Robbins-Monro 알고리즘에 의하며 이를 위한 조건으로서 추계적 Convexity와 추계적 도함수의 산정 방법등이 모형화되었으며 제시된 분석과 설계에 관련된 모형은 제조 시스템의 효율적인 운영및 설계와 관련지어서 매우 유용한 정보를 제공할 수 있으리라 생각된다.

참 고 문 헌

[1] 김성철, "칸반 시스템의 분석과 설계," 「경영 과학」, 제9권, 제1호(1992), pp.3~15.

[2] 김성철, "칸반 시스템의 추계적 비교," 제출중(1993).

[3] Buzen, J.P., "Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers," *Comm. ACM*, Vol.16(1973), pp.527-531.

[4] Cao, X.R. and Y.C. Ho, "Sensitivity Analysis and Optimization of Throughput in a Production Line with Blocking," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol. 32(1987), pp.959-967.

[5] Glasserman, P. and D.D. Yao, "Monotonicity in Generalized Semi-Markov Processes," *Math. of Oper. Res.*, Vol. 17(1992), pp.1-21.

[6] Glynn, P.W., "Optimization of Stochastic Systems,"*Proc. of 1986 Winter Simu. Conf.*(1986).

[7] Glynn, P.W., "A GSMP Formalism for Discrete Event Systems," *Proc. of IEEE 77*(1989), pp.14-23.

[8] Ho, Y.C., "Performance Evaluation and Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, Vol.32(1987), pp.563-572.

[9] Kushner, H.J. and D. Clark, *Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems*, Spring-Verlag, New York, 1978.

[10] Mitra, D. and I. Mitrani, "Analysis of Kanban Discipline for Cell Coordination in Production Lines. I," *Magt. Sci.*, Vol.36(1990). pp.1548-1566.

[11] Shaked, M. and J.G. Shanthikumar, "Stochastic Convexity and its Application," *Adv. Appl. Prob.*, Vol.20 (1988), pp.427-446.

[12] Shanthikumar, J.G. and D.D. Yao, "Stochastic Monotonicity of The Queue

Lengths in Closed Queueing Networks," *Oper. Res.*, Vol.35(1987), pp. 583-588.

[13] Shanthikumar, J.G. and D.D. Yao, "Second-Order Properties of the Throughput of a Closed Queueing Network," *Math. Oper. Res.*, Vol.13(1988), pp.524-534.

[14] Shanthikumar, J.G. and D.D. Yao, *Monotonoicity and Concavity Properties in Cyclic Queueing Networks with Finite Buffers*, H.G. Perrors and T. Altiok(Ed.), North Holland, 1989.

[15] Shanthikumar, J.G. and D.D. Yao, "Second-Order Stochastic Properties in Queueing Systems," *Proc. of IEEE*, Vol.77(1989), pp.162-170.

[16] Solberg, J.J., "A Mathematical Model of Computerized Manufacturing Systems," *Proc. of 4th Int. Conf. of Prod. Res.*, Tokyo, Japan(1977).

[17] Spearman, M.L. and M.A. Zazanis, "Push and Pull Production Systems : Issues and Comparisons," *Oper. Res.*, Vol.40(1992), pp.521-532.

[18] Yao, D.D. and D.W. Cheng, "New Wave Manufacturing System Modeling," Research Report, Columbia University, New York, 1989.