韓國經營科學會誌
第18卷 第1號
1993年 4月

通信網의 局間 容量 決定에 관한 發見的解法†

성창섭* · 손진현* · 이강배*

A Heuristic Method for Communication Network Design†

C.S. Sung*, J.H. Sohn* and K.B. Lee*

Abstract

This paper condisers a problem of determining arc capacities for a communication network with fixed-charged linear arc-cost functions, which is known to be NP-hard. For the problem, an efficient heuristic solution procedure is derived. The procedure is further shown working well for designing arc capacities of a network in a situation where the network needs to be extended by connecting its nodes to some new nodes or where the network needs to be extended by expanding its arc capacities.

1. 서 론

1.1 연구 배경

최근 전기통신분야에서 이루어진 비약적인 발전은 전화회선의 양적인 증가를 가져왔을 뿐만 아니라, 전기통신 서비스 및 통신시설의 질적인 면에서도 큰 향상을 이룩함으로써 종합정보 통신망과 같은 새로운 형태의 통신망에 대한 수요 또한 점차 확산되고 있는 추세이다. 한편, 시외전화 요금의 단계적 인하에 따라 시외 통신트래픽의 계속적인 증가로, 중심국 규모이상의 교환기 상호간의 망형화 추세가 계속 이어지고 있고 시외망의 안전성 제고를 위한 시외교환 시설의 이원화 계획이 추진되고 있는 등 장거리 교환망의 여건 또한 크게 변화하고 있다.

† 이 논문은 체신부, 한국통신의 1991년 연구비 지원에 의하여 이루어졌음
* 한국과학기술원 산업공학과

이와 같이 최근 통신망의 여러 여건들이 변화됨에 따라 기존 통신망의 용량확장문제 또는 새로운 통신망의 설계문제가 중요한 정책과제로 대두되고 있는 실정이다. 그런데 이러한 문제에는 막대한 투자비가 소요되므로 통신망의 기술적(용량, 예산 등) 제약조건을 고려한 수리적 모형을 통한 과학적 접근방법이 요구된다.

1.2 연구내용

전화통신망의 설계에 있어서 연구되어야 할 과제는 각각의 전화국(node pair)간의 주어진(예상되는) 수요(requirement flow)를 만족시키기 위한 통신망의 구성에 따른 총비용을 최소화 시키는 것과 구성된 통신망의 신뢰도에 관한 것들이다. 본 연구에서는 전화국들 사이에 설치할 수 있는 회선의 용량에 제약이 없는 경우, 여러 전화국 간의 수요들을 충족시키기 위한 최소비용의 회선 설치문제만을 고려하였다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 각각의 수요가 어떠한 경로(path)들을 통하여 충족되어야 하는가를 분석하고, 그에 따라 전화국간에 개설되어야 할 선로를 설정하고 각 선로의 필요 용량을 결정하여야만 한다.

여기에서 임의의 특정 두 전화국 간의 수요를 하나의 상품으로 취급하여야 하므로, 이 문제는 다종상품(multi-commodity)의 흐름으로 구성된 망설계(network design)문제이다. 망설계(network design)문제는 이론적으로 NP-hard의 complexity를 가지고 있음이 알려져 있다[8]. 그럼에도 불구하고 망설계의 다양한 응용성때문에 여러 각도의 연구가 진행되었다. 문제의 분류에 있어서는, 호에 부여되는 비용함수의 형태에 따라, 고정비용을 가지는 선형함수(linear function with fixed cost)의 경우와 비선형함수(nonlinear function)인 경우로 나눌 수 있는데, 이들 각 경우의 해결을 위한 실용적인 알고리즘으로는 heuristic 해법들을 이용하고 있다. 한편, 비용함수가 선형함수인 경우에는, 주어진 문제를 혼합 정수계획의 문제로 정립하여 정수계획법으로 해결해 나가는 방법들이 연구되었으나 그 이용방법과 연구대상 노드(전화국)의 수에 제한이 따른다. 이와 관련된 연구문헌들을 살펴보면 〈표 1〉과 같다.

〈표 1〉 문헌 종류

비용함수	접근방법	참고문헌
선형 함수	발견적 방법 (Heuristic)	Billheimer & Gray [3] Wong [16] Dionne & Florian [5] Boffey & Hinxman [4]
	정수계획법 (Integer Programming)	Murty [13] Magnanti *et al.*[11] Shetty [15] Khang & Fujiwara [10] Hochbaum & Segev [7]
비선형 함수	Minoux [12] Yaged [18] Dionne & Florian [5] Balakrishnan & Graves [2] Gallo *et al.* [6]	

이와 같이 많은 연구들이 진행되어 왔음에도 불구하고 망설계(network design)문제는 아주 작은 수의 전화국들로 구성된 경우들을 대상으로 하는 것을 제외하고는 최적해를 구한다는 것이 거의 불가능하다. 그러나 서울시의 전화망과 같은 경우 전화국의 수가 수십개가 되고 있다. 따라서 우리의 연구방향은, 실제적인 수(50여개)의 전화국을 대상으로 합리적인 해를 구하는 방법을 조사 연구하고자 한다. 우리의 연구에서 먼저, 호의 비용함수가 호에 흐르는 상품량에 따른 오목함수(concave function)인 경우로 주어질 때 최적해가 갖고 있는 기본적인 성질들을 살펴보고, 그 성질을 만족시키는 범위내에서 합리적인 해를 찾아 가도록 할 것이다. 해를 구하는 방법으로는, 비용함수가 오목함수인 경우를 대상으로 쉽게 부분최적해(local optimal solution)를 얻을 수 있는 Yaged [17]의 방법과, 전반적으로 Yaged의 방법보다 더 좋은 해를 제시하는 Minoux[12]의 방법을 살펴 보고, 특정 오목함수(비용함수가 고정비용을 가지는 선형함수 linear cost function with fixed cost)인 경우에 Minoux의 방법보다 좀 더 나은 해를 얻을 수 있는 heuristic 방법을 고려해 보고자 한다. 이와 같이 통신망의 각 호의 비용을 고정비용을 가지는 선형함수(linear cost function with fixed cost)로 모형화하여 분석을 할 경우, 선로의 개설 및 회선 절차에 따른 차후의 유지 보수비 등도 현재가치로 평가하여 분석자료에 넣을 수가 있다.

2. 문제 분석

2.1 수리적 모형화

통신망 설계에 있어서 기본적인 요소는 노드(전화국)의 집합(N)과 수요의 흐름을 충족시키기 위하여 설치되어지는 호(임의의 두 전화국 사이의 선로)들의 집합(A)이다. 여기에서 임의의 특정 두 전화국 간의 수요를 하나의 상품으로 취급하므로 N개의 전화국이 존재할 경우 모든 전화국 사이의 수요가 존재한다고 하면, N(N−1)/2개의 상품이 존재하게 된다. 이 문제의 수리적 모형화를 위하여 필요한 용어의 정의와 기호는 다음과 같다.

N : 노드(전화국)의 집합

A : 호의 집합

K : 상품의 집합(각 전화국들간의 수요의 집합)

R^k : k번째 상품의 수요량

O(k) : k번째 상품의 시작 노드

D(k) : k번째 상품의 도착 노드

δ_{ij} : 호 {i,j}가 통신망 설계에서 사용되어지는가 아닌가를 나타내는 0,1의 이항변수

X^k_{ij} : 호(i,j)를 흐르는 k번째 상품의 양

여기에서 (i,j)와 (j,i)는 무방향호 {i,j}에 대응하는 두 개의 방향을 가진 호를 나타낸다. 비록 망설계에서 사용되는 호들은 무방향이지만 수요의 흐름은 방향을 가지고 있으므로 우리는 이것을 방향을 가진 호들로 표현하였다.

이 모델은 두가지 변수를 포함하고 있다. 하나는 통신망의 구성에 있어서 사용되어지는 호를 나타내기 위한 것이고, 또 다른 것은 임의의 호에 흐르는 상품량을 나타내기 위한 것이다. 호의 비용은 상품의 종류에 관계없이 그 호에 흐르는 상품의 총량에 따라 결정된다고 하면 수리적 모델은 다음과 같이 구성된다.

목적함수 :

$$\text{Min} \sum_{\{i,j\}\in A} f_{ij} \ (\sum_{k\in k}(X_{ij}^k+X_{ji}^k)) \quad (2.1)$$

제약식 :

$$\sum_{i\in N}X_{ij}^k-\sum_{j\in N}X_{ji}^k= \begin{cases} -R^k & \text{if } j=0(k) \text{ all } k\in K \\ R^k & \text{if } j=D(k) \text{ all } k\in K \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$X_{ij}^k\le R^k\delta_{ij}, X_{ji}^k\le R^k\delta_{ij} \text{ all } \{i,j\}\in A, \text{ all } k\in K \quad (2.3)$$

$$X_{ij}^k\cdot X_{ji}^k\ge 0,\ \delta_{ij}=0 \text{ or } 1 \text{ all } \{i,j\}\in A, \text{ all } k\in K \quad (2.4)$$

목적함수에서 f_{ij}는 호 $\{i,j\}$를 통과하는 상품량에 따른 비용함수이다. 호의 비용이 고정비용을 갖는 선형함수로 주어질 경우, C_{ij}를 호 $\{i,j\}$를 통과하는 회선 단위당 비용이라고 하고 F_{ij}를 호 $\{i,j\}$의 사용시 부과되는 고정비용이라고 하면 식(2.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{Min} \sum_{k\in K}\sum_{\{i,j\}\in A} C_{ij}(X_{ij}^k+X_{ji}^k)+\Sigma\ F_{ij}\delta_{ij}$$

2.2 최적해의 성질 규명

호의 비용함수가 호에 흐르는 상품의 총량을 변수로 하여 순오목함수(strict concave function)로 주어지거나, 고정비용을 갖는 선형함수로 주어질 경우 최적해가 가지는 기본적인 성질들로 다음과 같은 것들을 알 수 있다.

[성질 1] 특정 두 전화국 간의 수요는 오직 하나의 경로만을 통하여 흐르는 최적해가 존재한다.

증명 : 두 전화국 i, j간의 수요 R_{ij}가 서로 다른 두 경로 P_1, P_2를 통하여 흐르고, P_1을 통하여 흐르는 양을 X_1, P_2을 통하여 흐르는 양을 X_2라 하자. 이때, $X_1+X_2=R_{ij}$. 이와 같은 네트워크에서, $\Phi_i(X)$, $i=1,2$를 각 경로의 비용함수라 할때, $F_1(t)=\{\Phi_1(X_1+t)-\Phi_1(X_1)\}/t$를 t 단위의 양이 i에서 j로 P_1의 경로를 따라 흐를때 비용의 단위당 증가량이라고 하고 $F_2(t)=\{\Phi_2(X_2+t)-\Phi_2(X_2)\}/t$를 t단위의 양이 P_2의 경로를 따라 흐를때 비용의 단위당 증가량이라고 하면, 호의 비용함수가 호에 흐르는 상품량의 오목함수(concave function)이므로, $F_1(t)$와 $F_2(t)$는 감소함수이다. 이때 $\Phi_1'(X_1)=C_1$, $\Phi_2'(X_2)=C_2$라고 하자. 만약 $C_1<C_2$이면, X_2를 Δt만큼 감소시킴으로써 최소한 $C_2\cdot\Delta t$만큼의 비용이 감소하고, X_1을 Δt만큼 증가시킴으로써 많아야 $C_1\cdot\Delta t$만큼의 비용이 증가한다. 이 경우 총비용은 감소하게 되고 C_1은 더욱 작아지며 C_2는 더욱 커지게 된다. 이렇게 X_2를 0으로 줄이고 X_1을 R_{ij}로 증가시키면 서로 다른 경로를 통하여 보내는 것보다 비용의 감소가 있게 된다. 만약 $C_1=C_2$이면, $X_1=0$, $X_2=R_{ij}$로 하거나 $X_1=R_{ij}$, $X_2=0$로 하면 총비용은 감소하거나 동일하게 된다. 따라서 오직 하나의 경로만을 통하여 흐르는 최적해가 존재한다. ■

[성질 2] 한 상품이 하나의 경로 만을 통하여 흐르는 최적해에서, 만약 임의의 상품 R^k가 최적 경로 P^k를 통하여 흐른다면 P^k의 경로상에 존재하는 두 전화국 i, j간의 수요를 충족시키는 경로는 i, j를 연결하는 P^k의 하위 경로(subpath), 즉 P^k에 포함된 호(arc)들로만 구성된 경로를 따라 흐른다.

증명 : R^k의 source를 O(k), destination을 D(k)라고 하자. 경로 P^k상의 두 전화국 i, j간

의 P^k의 하위경로를 P_1이라 하고, i, j의 수요를 충족시키는 다른 경로를 P_2라 하자. P^k중에서 O(k)로부터 i까지 경로를 P^{k1}, j에서 D(k)까지 경로를 P^{k2}라 할때, $\Phi_k(R^k)=\Phi_{k1}(R^k)+\Phi_{p1}(R^k)+\Phi_{k2}(R^k)$이고, R^k가 i와 j사이에 P_2를 사용할때 비용은 $\Phi_k(R^k)=\Phi_{k1}(R^k)+\Phi_{p2}(R^k)+\Phi_{k2}(R^k)$가 된다. R^k가 P^k를 선택했으므로 [성질 1]에 의하여 $\Phi_{p2}'(R^k)\geq\Phi_{p1}'(R^k)$가 성립된다. 또한, i와 j사이의 수요를 R_{ij}라면, $\Phi(X)$가 오목함수 이므로 $\Phi_{p2}'(R^k+R_{ij})\geq\Phi_{p1}'(R^k+R_{ij})$가 성립된다. 이 경우 i, j간의 흐르는 양 R^k+R_{ij}를 하나의 수요로 보면 [성질 1]에서 보였듯이 하나의 경로만을 택하여 흐르게 된다. ■

[성질 3] [성질 1]을 만족하는 최적해에서 한 전화국 i에서 다른 모든 전화국과의 수요의 흐름 경로의 집합은 트리(tree)형태를 갖게 된다.

증명 : [성질 2]에 의하여 한 전화국에서 다른 전화국 간의 경로의 집합은 circle을 만들 수 없으므로 트리형태를 갖게 된다. ■

3. 발견적 해법

위에서 살펴 본 바와 같이 최적해가 가지는 몇가지 성질들을 알아낼 수 있으나 아직도 여전히 그 문제는 NP-hard의 complexity를 가지게 되므로 이 문제의 해결 방안들 중 실용적인 것은 주로 주어진 임의의 해(초기해)에서 출발하여 점차 총비용을 감소시켜 나가는 방향으로 해를 개선하는 방법들이 고려되고 있다.

앞으로 설명할 알고리즘들에서, 고려대상이 되는 통신망(network)에서 개설할 수 있는 호(임의의 두 전화국 사이의 선로)의 총수를 M이라 하고, 각각의 호에 차례대로 1부터 숫자를 부여할 때, 호 m을 통과하는 상품의 양을 y_m이라 하고, 호 m에 관련된 비용을 $f_m(y_m)$이라 하자. 비용은 각 호에서 발생하게 되므로, 총비용은 이러한 호의 비용들의 총합으로 보면 된다.

위에서 언급한 문헌들중에서, 발견적 해법으로 제시된 Yaged 방법[17]과 Minoux방법[12]을 상세히 살펴보고, 아울러 우리의 방법과 비교분석하고자 한다.

3.1 Yaged 방법

Yaged[17]는 호의 비용함수가 그 호에 흐르는 용량의 순오목함수(strict concave function)인 경우에 대하여 망설계의 문제를 고려하였다. 그 방법은 주어진 초기해에서 연속적인 근사접근기법 (a successive approximation technique)을 유한번 사용하여 단계내에서 부분 최적해(local optimal solution)에 도달하는 것이다.

그 기본적인 내용을 살펴보면 다음과 같다. 각 상품의 경로가 정해졌을 경우 임의의 호의 용량이 정해지므로 그에 따라 각 호의 비용이 결정되게 된다. 여기서 각 상품이 흐르는 경로를 재조정함으로써 총비용의 개선을 고려할 수 있다. 여기에서 초기에 주어지는 해를 $Y^0=(y_1^0, y_2^0, \cdots, y_M^0)$라 하자. 이 초기해는 여러가지 방법으로 구할 수 있으나 Yaged의 경우 개설 가능한 모든 호를 연결시켜놓고 국간 거리를 호의 길이로 부여한 다음 각 상품의 경로를 최소거리경로를 이용하여 충족시키는 경우에 구성되는 해를 초기해로 사용하였다.

초기해에서 다음 단계로 나아가기 위해 각 호에 새로운 길이를 부여해야 하는데 Yaged는 현재의 해에서 흐름이 없는 호는 ∞의 값을 부여하고, $y_m>0$인 호는 그 호의 비용함수의 미분계수($f_m'(y_m)$) 즉 한계비용을 그 호의 길이로 부여하였다. 그렇게 현재의 해에서 새로운 길이를 호에 부여한 후, 이러한 길이가 주어진 망에서 각 상품의 경로를 최소거리 경로를 통하여 재배치하게 된다. 이렇게 할 경우 한번 흐름이 없던 호는 영원히 제거되며, 수요의 흐름이 재배치가 될 경우 총비용은 점차로 줄어들게 된다.

이렇게 하여 해를 개선시키고 더 이상 해가 개선되지 않을 때 알고리즘을 멈추고 현재의 해를 택하게 되는 것이다. 이 알고리즘의 가장 큰 문제점은 최종해가 초기해에 의존하는 경향이 너무 크다는 것이다. 즉 초기해에서 흐름이 적었던 호는 호가 제거될 가능성이 높고 최초의 해에서 흐름이 많았던 호는 계속 흐름이 증가할 가능성이 높아지게 된다.

더욱이, 호의 비용함수가 고정비율을 갖는 선형함수인 경우 한계비용이 일정한 상수로 주어지게 되므로 이 방법을 사용할 수 없게 되는 것인데, 만약, 주어진 해에서 새롭게 호에 부여되는 길이를 한계비용을 사용하지 않고 평균비용을 사용한다면 개선된 해를 찾아 나갈 수 있게 될 것이다.

3.2 Minoux 방법

Minoux[12]의 경우도 하나의 주어진 해에서 점차로 개선된 해로 나간다는 것에서는 동일하나, Yaged의 경우는 주어진 해에서 사용되고 있는 모든 호에 대한 비용계수를 계산한 후 그 비용계수 아래서 모든 상품의 경로를 재배치하는 것이고, Minoux의 방법은 주어진 해에서 임의의 호에 흐르고 있던 상품을 다른 경로를 통해 재배치할 경우의 총비용의 변화를 살펴보게 된다.

구체적인 내용을 살펴보면 다음과 같다. 먼저 현재의 해에서 흐름의 값이 양의 값을 갖는 임의의 호 $v(y_v>0)$를 생각하자. 만약 v를 제거한다고 가정하면 v를 통하여 흐르던 흐름은 다른 호를 통하여 흘러야 한다. 현재의 해에서 호 v에 흐르는 양을 다른 모든 호에 배정한다고 할 때, 다른 호에서 발생하는 비용의 증가량을 그 호의 길이로 부여하고 V에는 ∞의 길이를 부여한다. 이렇게 길이가 부여된 네트워크에서 호 v의 양 노드를 연결하는 최소거리 경로를 찾아 그 거리가 주어진 해의 호 v에서 발생하는 비용보다 작을 경우 호 v를 제거대상 호로 놓는다.

현재의 해에서 흐름이 양인 모든 호에 대해 이와 같은 것을 반복한 후 그 제거대상 호 중에서 비용감소효과가 가장 큰 호를 제거한다. 이 때 이 호를 흐르는 양은 위의 최소거리경로를 따라 재배치하여 새로운 해를 얻는다. 이와 같은 과정을 더이상 비용감소효과가 없을 때까지 반복한다. 이렇게 알고리즘의 반복단계마다 하나의 호가 제거되므로 단계의 반복회수의 한계는 호의 총수보다 작게 된다.

이것을 수식으로 표현하면 다음과 같다. 주어진 해 $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_M)$에서 호 v의 제거를 고려할 때, ℓ_m을 호 m에 배정되는 길이라하면 ℓ_m은 다음과 같이 주어진다.

$\ell_m=\infty$ 호 v에 대해서

$\ell_m=f_m(y_m+y_v)-f_m(y_m)$ 호 $m\neq v$에 대해서

그리고 $L(Y,v)$를 이렇게 호의 길이가 주어진 네트워크에서 호 v의 양끝점을 연결하는 최소거리경로의 길이라 하면, 이것은 호 v를 흐르고 있던 흐름 모두를 다른 경로를 통해 흐르게하는데 발생하는 비용을 의미한다. 반면에 호 v를 제거시킴으로써 발생하는 비용의 감소 효과는 $f_v(y_v)$ 이므로, v의 제거에 따른 총비용의 변화 $\Delta(v)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta(v) = L(Y,v) - f_v(y_v)$$

Minoux는 이러한 $\Delta(v)$의 음의 값 중 가장 작은 값을 갖는 v부터 제거시켜 개선된 해를 얻고 이와 같은 과정을 반복하다가 모든 호에 대한 $\Delta(v)$의 값이 음의 값을 갖지 않을 때 그 해를 선택하는 것이다.

특히 이것을 고정비용을 갖는 선형함수비용 모델에 적용할 경우 양의 흐름이 있는 각각의 호 m에 대한 길이를 변동비용계수 (C_m)로 놓고 v의 제거에 따른 v의 양쪽 노드를 연결하는 최소거리경로의 길이를 $L(Y,v)$라 하면 그에 따른 비용발생량을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta(v) = y_v\ L(Y,v) - f_v(y_v)$$

이 경우 Minoux는 임의의 호 v에 대한 $\Delta(v)$의 값이 다음과 같은 단순증가성질(monotonically increasing property)이 성립함을 보임으로써, 좀더 효율적인 알고리즘의 적용이 가능함을 파악하였다.

[단순 증가 성질] 위의 알고리즘에서 임의의 호 v에 대하여 : $\Delta^{t+1}(v) \geq \Delta^{t}(v)$이 성립된다(제거된 호는 ∞의 값 부여).

위의 성질을 이용한, 고정비용을 갖는 선형함수비용 모델에 적용되는 Minoux의 accelerated greedy 알고리즘을 요약하면 다음과 같다.

Step 1.

Y^0를 초기해라 하자. $t=0$

$y_u^0>0$인 모든 호 u에 대하여,

$\Delta(u) = y_u^0\ L(Y^0, u^0) - f_u(y_u^0)$를 계산한다.

Step 2.

현 단계 t에서 Y^t를 현재의 해라하고,

i) 다음과 같은 호 v를 결정한다.

$\Delta(v) = \underset{u}{\mathrm{Min}}\{\Delta(u)\}$, 모든 $y_u^t>0$인 호 u에 대하여, 그리고 이러한 호 v에 연결된 양 노드를 {i, j}라 하자.

ii) 노드 i, j를 연결하는 호 v를 제외한 노드 i에서 노드 j까지 최소거리경로를 P* 라 하고 P*의 길이를 $L(Y^t,v)$라 한다.

$\Delta' = y_v^t L(Y^t, v) - f_v(y_v^t)$로 놓고 $\Delta(v)$의 값을 Δ'의 값으로 바꾸어 준다.

만약 $\Delta' > \underset{u \neq v}{\mathrm{Min}}\ \{\Delta(u)\}$ 가 성립하면 i)로 되돌아간다.

Step 3.

$\Delta' \geq 0$이면 멈춘다.

현 단계에서 더 이상의 개선은 없다.

$\Delta' < 0$ 이면,

$y_v^{t+1} \leftarrow 0$

$y_u^{t+1} \leftarrow y_u^t$ if $u \notin P^*,\ u \neq v$

$y_u^{t+1} \leftarrow y_u^t + y_v^t$ if $u \in P^*$

$t \leftarrow t+1$로 고치고 Step 2로 돌아간다.

3.3 호의 비용함수가 특정오목함수(고정비용을 갖는 선형함수)인 경우

위에서 살펴본 바와 같이 Minoux의 방법은 주어진 하나의 해에서 임의의 호(선로)를 제거했을 때 총비용을 개선시키는 효과가 있는지를 살펴서, 총비용 개선의 효과가 있는 호를 제거시켜 나가는 것을 더이상 비용개선의 효과가 나타나지 않을 때까지 계속해 나가는 것이다. 여기서 하나의 호를 제거시킬 때 나타날 수 있는 비용감소효과를 살필 때, Minuox의 모델은 기본적으로 호의 비용함수가 오목함수 (concave function)인 경우에 대한 것이므로 하나의 호에 흐르고 있던 유량을 상품별로 분류하지 않고 제거되는 호에 연결된 양 노드에 모두 하나의 경로를 통하여 연결시킨 것만을 고려하게 된다.

그러나 호의 비용함수가 고정비용을 갖는 특정오목함수(선형함수 linear function with fixed cost)의 형태를 갖는 모델에 있어서는, 개설되어 있는 호에 대해서는 용량에 관계없이 일정한 비용계수가 유지된다. 따라서 제거되는 호에 흐르는 유량을 상품별로 분할하여 보내도 다른 호의 비용계수에 영향을 미치지는 않게 된다. 이러한 상황하에서는 제거되는 호에 흐르는 유량을 각 상품별로 분류하여 그 호를 제거한 뒤 상품 각각의 최소거리경로를 이용하여 보내는 분석이 가능하게 된다. 즉 노드 i, j에 연결된 호 v의 제거시 비용감소효과를 분석할 때, 호 v에 흐르던 상품을 하나의 유량으로 취급하여 i, j를 연결하는 다른 하나의 최소거리 경로를 통하여 모두 흘려 보내는 것이 아니라, v에 흐르던 각 상품을 각 상품의 시작 노드와 도착 노드에 따라 호 V제거 후의 최소거리경로를 따라 흐른 경우의 비용감소효과를 고려할 수 있게 되는 것이다.

그 내용을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 먼저 임의의 두 전화국 간의 수요를 상품이라 하고 K를 이러한 상품의 집합이라고 하자. 여기에서 하나의 해 S가 주어졌다 함은 각각의 호 m에 흐르는 상품이 주어진 것이다. 그리고 하나의 상품은 오직 하나의 경로만을 통하여 흐르므로 호 m에 상품 k가 흐른다면 그 호에 흐르는 상품 k의 양은 상품 k의 수요량 R^k가 된다. 임의의 호 m에 흐르는 상품의 집합을 K_m이라 하자. 따라서 해 S가 주어졌다 함은 각 호 m에 K_m이 주어진다는 것이고, 그 호에 흐르는 유량 y_m과 호 m에서 발생하는 비용은 다음과 같이 주어진다.

$$y_m = \sum_{k \in K_m} R^k$$

$$f_m(y_m) = 0 \qquad \text{if } y_m = 0$$

$$f_m(y_m) = F_m + C_m y_m \quad \text{if } y_m > 0$$

F_m : 호 m을 개설하는데 들어가는 고정 비용

C_m : 호 m을 통과하는 상품 1 단위 증가시 호 m에서 증가되는 비용

그에 따라 총비용은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Z = \sum_{m=1,M} f_m(y_m)$$

또한 각 호마다 통과하는 상품의 종류가 주어지면, 임의의 상품 k에 대하여 k가 흐르는 경로를 알 수 있으므로 그 경로를 P_k라 하고 각 호의 길이에 그 호에 변동비용계수(C_m)를 부여할 때 그 경로의 총 길이를 LP_k라 하면, k 상품의 경로비용 PC_k를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$PC_k = R^k \cdot LP_k$$

이제 임의의 호 v를 제거할 경우 호 v를 흐르던 상품 k의 새로운 최단거리경로를 $P_k{}'$라 하면, 총비용의 변화량 Δ(v)를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\Delta(v)=\sum_{k\in K_v} R^k(LP_k{}'-LP_k)-F_v$$

모든 호 중에서 총비용을 가장 많이 감소시키는 호를 제거시킨 후 다음 단계의 해를 구한다. 이와 같은 과정을 반복한 후 더이상 Δ(v)의 값이 음이 되는 것이 없을 때 주어진 해를 선택하게 된다. 다음 알고리즘은 Δ(v)의 계산량을 고려하여 Minoux의 Accelerated Greedy 개념을 적용한 것이다. 물론 이 경우 Δ(v)의 단순증가성질이 그대로 성립되지는 않지만, 호의 비용함수가 선형함수인 경우 앞의 Minoux 알고리즘보다 좀더 나은 결과를 얻을 수 있음을 보일 수 있다.

Step 1.

S^0를 초기해라 하자. t=0

$y_u^0>0$인 모든 호 u에 대하여

$\Delta(u)=\sum_{k\in K_u} R^k(LP_k{}'-LP_k)-F_u$를 계산한다.

Step 2.

현 단계 t에서 S^t를 현재의 해라 하고

i) 다음과 같은 호 v를 결정한다.

$\Delta(v)=\mathrm{Min}_u\{\Delta(u)\}$, 모든 $y_u^t>0$인 호 u에 대하여.

ii) i)에서의 v에 대해

$\Delta'=\sum_{k\in K_v} R^k(LP_k{}'-LP_k)-F_v$로 두고 Δ(v)의 값을 Δ′의 값으로 바꾸어 준다.

만약 $\Delta'>\mathrm{Min}_{u\neq v}\{\Delta(u)\}$가 성립하면 i)로 되돌아간다.

Step 3.

Δ′≥0이면 멈춘다.

현 단계에서 더 이상의 개선은 없다.

Δ′<0이면 v를 제거시키고 새로운 해를 구성한다.

t←t+1, Step 2.로 돌아간다.

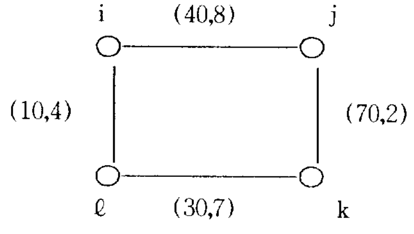
다음 예제에서 Minoux 방법을 사용했을 경우 더 이상의 개선의 여지가 없는 해도, 이 알고리즘을 적용했을 때 개선이 되는 경우를 살펴볼 수 있다.

예제

4개의 노드 {i, j, k, l}와 각 노드간의 수요(6개의 상품) 및 4개의 호와 각 호에서 발생하는 변동비용의 계수가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

호의 비용계수	각 상품의 수요량
(i, j)=8	① : (i, j)=10
(j, k)=2	② : (i, ℓ)=10
(k, ℓ)=7	③ : (i, k)=30
(ℓ, i)=4	④ : (j, k)=20
	⑤ : (j, ℓ)=20
	⑥ : (k, ℓ)=10

이때 모든 수요를 비용계수를 길이로 하는 네트워크에서의 최소거리경로를 따라 충족시켜 주면 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.



(a,b) : a=유량 b=비용계수

각 호에 흐르는 상품의 종류

(i, j)={①, ③}

(j, k)={③, ④, ⑤}

(k, ℓ)={⑤, ⑥}

(i, ℓ)={②}

이 경우 호 (i, j)의 제거를 고려해보자.

Minoux 방법에서는 (i, j)에 흐르고 있는 유량 40을 모두 같은 경로(여기서는 i－ℓ－k－ℓ)를 통하여 보내므로 Δ의 값을 계산하면 $\Delta_{ij}=(40\times13)-(40\times8+F_{ij})=200-F_{ij}$가 된다.

개선된 알고리즘에서는 상품 ①은 i－ℓ－k－ℓ를 통해 보내고 상품 ③은 i－ℓ－k를 통하여 흐르는 것을 따로 계산하므로 $\Delta_{ij}'=(10\times13+30\times11)-(40\times8+F_{ij})=140-F_{ij}$가 된다.

이 경우 F_{ij}의 값이 140과 200 사이에 있게 되면 Minoux 방법에서는 호 (i, j)의 제거를 고려하지 않게 되고 개선된 알고리즘에서는 호 (i, j)를 제거하게 된다.

그러나, 이 알고리즘을 적용할 경우에 Δ의 계산에 있어서 그 호에 흐르는 모든 상품에 대해 최소거리경로를 찾아야 하므로 계산량이 증가되는 것이 필연적이다. Minoux의 경우는 비용함수가 오목함수(concave function)인 경우에 대한 해를 개선해 나가는 알고리즘을 만든 후 이것을 선형함수에 적용한 것이고, 개선된 알고리즘은 비용이 선형함수인 경우에만 적용할 수 있는 것이므로 우리의 것이 알고리즘의 효과는 높으나, 이것을 일반적인 호의 비용이 오목함수(strict concave function)인 경우에 직접 적용할 수는 없다.

4. 효과 비교

4.1 초기해에 따른 효과비교

앞에서 설명한 바와 같이 제시된 알고리즘들은 모두 임의의 주어진 해에서 점차로 개선된 해를 찾아나가는 방법들이다. 따라서 최종해의 결과가 초기해의 영향을 받게된다. 여기에서는 여러 초기해에서 우리가 제안한 알고리즘을 적용하여 얻은 최종해에서 총비용의 차이를 살펴보았다.

다음에서 방법 (1)은 각 호의 고정비용과 변동비 중에서 고정비용만을 호의 거리 값으로 부여한 뒤에 각 수요를 최소거리경로를 따라 보내는 초기해의 구성을 나타낸다. 이러한 것은 일반적으로 호의 고정비용 값이 거리에 비례한다고 생각할 경우 두 전화국 사이의 수요는 다른 전화국을 통하지 않고 직접가는 경로를 택할 것이므로 결과적으로 complete network으로 볼 수 있다. 방법 (2)는 큰 수요를 갖고 있는 상품(임의의 두 전화국 사이의 통화 수요)부터 차례대로 최소거리경로를 따라 흘려 보내는 방법이다. 이의 거리값 결정방법은 앞 절에 설명되었다. 방법 (3)은 각 호의 거리값에 해당하는 비용을 상품에 따라 독립적(고정비용+단위 변동비×그 상품의 수요량)으로 산출한 경우이다. 이것은 수요량이 많을 경우 변동비의 비중을 크게 한 것이다.

다음 표 (〈표 2〉 및 〈표 3〉)들의 값은 임의의 한 전화국에서 다른 한 전화국으로의 통화 수요의 크기를 1과 10사이의 균일분포에서 부여하고, 호에 부여되는 변동비를 1과 5사이의 균일분포에서 임의로 부여하고 고정 비용을 변동비의 10배로 했을 때, 전화국의 수가 10개인 경우와 20개인 경우의 최종해에서의 총비용을 나타낸다. 첫 행의 숫자는 실험순차횟수를 나타낸다.

〈표 2〉 초기해에 따른 최종해의 결과 1

수 요 : 균일분포 [1, 10]
변동비 : 균일분포 [1, 5]
고정비 : 변동비×10
노드수 : 10

Num	1	2	3	4
(1)	1374	1594	980	1423
(2)	1361	1589	970	1431
(3)	1389	1594	980	1423
Num	5	6	7	8
(1)	1650	1882	1234	1323
(2)	1719	1912	1232	1342
(3)	1650	1888	1888	1323

〈표 3〉 초기해에 따른 최종해의 결과 2

수 요 : 균일분포 [1, 10]
변동비 : 균일분포 [1, 5]
고정비 : 변동비×10
노드수 : 20

Num	1	2	3	4
(1)	4732	4769	4917	4916
(2)	4773	4775	5085	4914
(3)	4805	4780	4916	4866
Num	5	6	7	8
(1)	5117	4836	4536	4808
(2)	5158	4852	4570	4830
(3)	5134	4884	4552	4812

<표 2>에서 알 수 있듯이 전화국의 수가 10개인 경우 전반적으로 초기해를 방법 (1)에 의해 구하는 것이 좋은 결과를 얻게됨을 알 수 있다. 종종 (2)의 방법에 의해 더 나은 결과가 얻어지기도 하였으나 그 값의 차이는 미미한 편이다.

<표 3>에서 보듯이 전화국이 20개인 경우에도 초기해를 방법 (1)에 의해 구하는 것이 더 나은 최종해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 앞의 <표 2>와의 차이점은, (2)의 방법보다 (3)의 방법이 더 좋은 결과를 얻는 경우가 많다는 것인데 이러한 것은 전화국의 수가 많아질수록 한 선로를 통과하는 수요가 많아짐으로써 (한 선로에는 두 전화국간의 통화 수요만 흐르는 것이 아니라 다른 전화국 간의 통화 수요가 그곳을 통하여 흐를 수가 있는 것이다) 점차로 총비용에서 차지하는 변동비용의 비중이 커짐에 따른 것으로 해석할 수 있다.

이와 같은 결과에 따라 다음의 알고리즘들의 효과 분석에서는 초기해로 complete network을 사용할 것이다.

4.2 제안된 알고리즘의 효과비교

앞의 세 알고리즘 중 일반적으로 Yaged의 방법보다 Minoux의 방법이 더 좋은 결과가 나옴은 이미 알려져 있으므로, 여기에서는 호의 비용함수가 선형함수로 주어진 경우, 두 전화국간의 통신수요를 다른 전화국을 통하지 않고 직접 보내는 것(complete network)을 초기해로 하여 Minoux의 알고리즘과 3.3절의 알고리즘을 적용한 최종해에서 총비용의 차이를 살펴보았다.

전화국의 수가 30개, 50개인 경우를 분석 하였다. 임의의 한 전화국에서 다른 한 전화국으로의 통화수요의 크기는 0과 20사이의 값을 갖는 균일분포에서 임의로 부여하였다. 또한 각 호에 발생하는 변동비의 크기는 1에서 30사이의 균일분포에서 임의로 부여하고 고정비용은 변동비의 10배인 경우를 고려하였다. 이러한 상황은 변동비와 고정비가 모두 거리와의 상관관계를 갖는 경우 합리적인 가정이 될 것이다. 이러한 조건에서 각각 5번의 실험을 실행하였다. 다음 표들에서 M은 Minoux방법을 사용한 경우이고, O은 3.3절의 알고리즘을 사용하여 얻은 최종해의 총비용을 나타낸다.

<표 4>에서 전화국의 수가 30개인 것을 살펴보았을 때, 항상 O의 방법이 M의 방법보다 더 나은 해를 얻은 것을 볼 수 있다.

<표 4> 알고리즘의 결과비교 1

수 요 : 균일분포 [0, 20]
변동비 : 균일분포 [1, 30]
고정비 : 변동비×10
노드수 : 30

	1	2	3	4	5
M	60055	46281	52867	58938	45214
O	59948	46157	52757	58876	45201

<표 5>에서 전화국의 수가 30개인 것을 살펴보았을 때도, 항상 O의 방법이 M의 방법보다 더 나은 해를 얻은 것을 볼 수 있다. 특히 고려하는 전화국의 수가 많을수록 O의 방법이 더 나은 해를 제시하고 있다.

만약 고정비의 변동비에 대한 상대적 크기가 커지면, 제안된 발견적 해법이 Minoux것에 비해 더 큰 효과가 있음도 알 수 있었다. 예를 들어, 고정비가 변동비의 20배이고 전화국 수가 30개일때, 개선된 방법(3.3절)이 Minoux방법보다 총비용면에서 평균 2.0%의 개선효과를 가져왔다 (<표 6>참조). 이는 본 연구 결과 제시한 3.3절의 방법이 Minoux방법보다 고려하는 대안경로(alternative path)의 수가 많으므로, 상대적으로 적은 수의 호를 이용하여, 보다 효율적인 routing을 할 수 있기 때문이다. 즉, 적은 수의 호를 설치하여 고정비 부담을 줄이는 결과임을 알 수 있다. 그러나, 50개의 노드수를 가진 상당히 큰 네트워크들 까지를 대상으로 평가한 결과, 계산시간면에서 3.3절에 제시한 방법이 평균 17~23% 정도 더 많은 계산시간을 요한다. 이에 관련된 결과는 다음 <표 7>과 같다.

<표 5> 알고리즘의 결과비교 2

수 요 : 균일분포 [0, 20]
변동비 : 균일분포 [1, 30]
고정비 : 변동비×10
노드수 : 50

	1	2	3	4	5
M	104902	111864	106347	109409	96089
O	104794	111725	106222	109327	95983

<표 6> 알고리즘의 결과비교 3

수 요 : 균일분포 [0, 10]
변동비 : 균일분포 [1, 30]
고정비 : 변동비×20
노드수 : 30

	1	2	3	4	5
M	23041	24297	26040	34014	24907
O	22517	23761	25593	33341	24534

<표 7> 계산시간 비교

노드수		30개	50개
평 균 계산시간	3.3절	2.1초	17.5초
	Minoux	1.8초	14.7초
차이/Minoux time		17%	23%

5. 결 론

본 연구에서는 각호의 용량제한을 두지 않고 호의 비용함수가 오목함수나 선형함수인 경우에 다품종으로 구성된 망설계 문제를 고려하였다. 이러한 문제는 일반적으로 NP-hard의 complexity를 가지고 있으므로 대상 전화국의 수가 많을 경우 이론적으로 최적해를 구하기 매우 어려운 과제로 알려져있다. 문제의 해결방법으로 우리는 사용상의 용이도를 고려하여 발견적 접근방법 등을 연구하였다. 우리의 모형에 적용가능한 Yaged와 Minoux의 알고리즘을 살펴보았으며, 호의 비용함수가 선형함수인 경우에 좀더 효과적인 해를 구할 수 있는 근사적 알고리즘을 제시하였다. 자료에 따른 결과의 특성을 알기 위하여 몇가지 자료에 대하여 알고리즘을 실행에 보았고 4절에 알고리즘의 효과를 살펴 본 결과 호의 비용함수가 고정비용을 가진 선형함수(linear cost function with fixed cost)인 경우의 모델에서는 우리가 제시한 알고리즘이 우수함을 살펴 보았다.

한편, 호의 비용함수가 고정비용을 갖는 선형함수이고 다종상품의 흐름으로 구성된 네트워크 설계문제의 다른 해결 접근 방안으로는 주어진 문제를 혼합정수계획의 문제로 정식화하여 정수계획법을 사용하여 해결해 나가는 방법도 있으나 이러한 것들은 각 문제의 구조에 따라 서로 다른 제약식들의 변형이나 조합의 특성을 분석해야 하므로 일반적인 문제로 그대로 적용하여 사용하기가 쉽지 않다.

제안된 알고리즘을 바탕으로 새로운 네트워크의 구성문제뿐만 아니라, 새로운 전화국의 신설시 기존 통신망과의 연결방법이나, 수요의 증가로 말미암은 회선의 확장 등에 이러한 해법들이 응용 적용될 수 있다. 아울러, 회선의 운용비나 유지보수비 등을 호의 비용에 반영함으로써, 기존 통신망의 운용을 재평가할 수 있고 이를 이용하여 더 효율적인 통신망의 관리를 기대할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Assad, A., "Multicommodity Network Flows－A Survey," *Networks*, Vol.8 (1978), pp.313－360.

[2] Balakrishnan, A. and. S. C. Graves, "A Composite Algorithm for a Concave－Cost Network Flow Problem," *Networks*, Vol.19(1989), pp.175－202.

[3] Billheimer, J. and P. Gray, "Network Design with Fixed and Variable Cost Elements," *Transportation Science*, Vol.7(1973), pp.49－74.

[4] Bottey, T.B. and A.I. Hinxman, "Solving the Optimal Network Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol.3(1979), pp.386－393.

[5] Dionne, R. and M. Florian, "Exact and Approximate Algorithms for Optimal Network Design," *Networks*, Vol.9 (1979), pp.37－59.

[6] Gallo, G., C. Sandi and C. Sodini, "An Algorithm for the Minimum Concave Cost Flow Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol.4 (1980), pp.248－255.

[7] Hochbaum, D. and A. Segev, "Analysis of a Flow Problem with Fixed Charges," *Networks*, Vol.19(1989), pp. 291-312.

[8] Johnson, D.S., J.K. Lenstra and A.H.G. Rinooy Kan, "The Complexity of the Network Design Problem," *Networks*, Vol.8(1978), pp.279-285.

[9] Kennington, J.L., "A Survey of Linear Cost Multicommodity Network Flows," *Operations Research*, Vol.26(1978), pp. 209-236.

[10] Khang, D.B. and O. Fujiwara, "Approximate Solutions of Capacitated Fixed Charge Minimum Cost Network Flow Problems," *Networks*, Vol.21 (1991), pp.689-704.

[11] Magnanti, T.L., P. Mireault and R.T. Wong, "Tailoring Benders Decomposition for Uncapacitated Network Design," *Mathematical Programming Study*, Vol.26(1986), pp.112-154.

[12] Minoux, M., "Network Synthesis and Optimum Network Design Problems : Models, Solution Methods and Approximations," *Networks*, Vol.19 (1989), pp.313-360.

[13] Murty, K.G., "Solving the Fixed Charge Problem by Ranking the Extreme Points," *Operations Research*, Vol.16 (1968), pp.268-279.

[14] Nagamochi, H., M. Fukushima and T. Ibaraki, "Relaxation Methods for the Strictly Convex Multicommodity Flow Problem with Capacity Constraints of Individual Commodities," *Networks*, Vol.20(1990), pp.409-426.

[15] Shetty, B., "A Relaxation/Decomposition Algorithm for the Fixed Charged Network Problem," *Naval Research Logistics*, Vol.37(1990), pp. 327-340.

[16] Wong, R.T., "A Dual Ascent Approach for Steiner Tree Problems on a Directed Graph," *Mathematical Programming*, Vol.28(1984), pp.271-287.

[17] Yaged, B., "Minimum Cost Routing for Static Network Models," *Networks*, Vol.1(1971), pp.139-172.

[18] Yaged, B., "Minimum Cost Routing for Dynamic Network Models," *Networks*, Vol.3(1973), pp.193-224.

[19] Yaged, B., "Traffic Flow Information for Minimum Cost Routing Procedures," *Automatica*, Vol.5(1969), pp. 167-173.

[20] Zadeh, N., "On Building Minimum Cost Communication Networks," *Networks*, Vol.3(1973), pp.315-331.