

〈論 文〉

## 에너지법에 의한 축대칭 디프드로잉의 해석

양동열\* · 이항수\*\*

(1992년 5월 23일 접수)

### An Analysis of Axisymmetric Deep Drawing by the Energy Method

Dong-Yol Yang and Hang Soo Lee

**Key Words :** Energy Method(에너지법), Deep Drawing(디프드로잉), Layer(층), Normal Anisotropy(수직이방성)

#### Abstract

A systematic approach of the energy method is proposed for analysis of axisymmetric deep drawing in which the total deforming region is divided into five sections by the geometric characteristic. The corresponding solution is found through optimization of the total energy dissipation with respect to some parameters assumed in the kinematically admissible velocity field defined over each region. The sheet blank is divided into three- or five-layers to consider the bending effect. For the evaluation of frictional energy, it is assumed that the blank holding force acts on the the outer rim of the flange and that the contact pressure acting on punch shoulder or die shoulder has uniform distributions, respectively. The computed results by the present method are compared with the experiment and the computed results by the elastic-plastic finite element method for the distribution of thickness strain and the relation between the punch stroke and punch load. The results for the case of multi-layers show better agreements than for the case of a single layer in load vs. stroke relation and strain distribution. It is thus shown that the multi-layer technique can be effectively employed in analyzing axisymmetric deep drawing in connection with the energy method.

#### 기 호 설 명

$A_i, B_{ki}$  : 속도장에 도입되는 최적화변수  
 $n_k$  :  $B_{ki}$ 의 개수  
 $K, \epsilon_0, n$  : 응력과 변형률의 관계를 나타내는 재료 상수  
 $h$  : 편치행정  
 $L$  : 편치하중  
 $p, \tau$  : 접촉압력 및 이에 의한 전단력  
 $R_D, R_P$  : 편치와 다이의 반경  
 $R_{CP}, R_{CD}$  : 편치목과 다이목에서 코너부의 곡률반경

$r_0$  : 소재의 초기직경  
 $v^*$  : 동적가용 속도장  
 $\Delta\epsilon_1, \Delta\epsilon_2, \Delta\epsilon_3$  : 변형률 증분의 주성분  
 $\Delta\bar{\epsilon}$  : 유효변형률 증분  
 $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$  : 변형률 속도의 주성분  
 $\dot{\bar{\epsilon}}, \bar{\epsilon}$  : 유효변형률속도 및 유효변형률  
 $\bar{\sigma}$  : 유동응력  
 $\mu$  : Coulomb마찰계수

#### 1. 서 론

\*정회원, 한국과학기술원 정밀공학과

\*\*정회원, 기아자동차(주) 생기연구팀

판성형 공정중 가장 널리 사용되고 있는 공정이며 특히 축대칭 컵드로잉은 박판소재의 성형성(drawability)을 평가하는 데 매우 중요한 공정이다. 그러나 디프드로잉 공정은 인장성형, 정수압 벌징 등 타 공정에 비해 매우 복잡한 변형기구를 가지고 있으며 공정변수 또한 매우 많다. 디프드로잉 공정의 성형기구는 크게 다섯가지로 구분된다. 굽힘(bending), 펴짐(straightening), 미끄러짐(sliding), 인장(tension) 그리고 압축(compression) 등이 그것이며, 축대칭 컵드로잉의 경우 편치가 진행함에 따라 플랜지 부분에서 종방향으로의 인장 및 원주방향으로의 압축이 지배적인 변형이다. 또한 다이목(die shoulder) 부분에서는 인장, 압축과 아울러 굽힘 및 펴짐이 발생하게 되고, 플랜지 외곽 및 다이목(die shoulder)과 펀치목(punch shoulder) 부분에서의 마찰에 의한 영향도 매우 크다.

이와같이 복잡한 성형기구 때문에 실험적 경험을 바탕으로 한 기술발전이 많이 이루어져 왔으며, 공정해석을 통한 이론적 연구도 꾸준히 진전되었다. 이론적인 방법을 통하여 박판성형 공정을 해석하는 데에는 유한차분법(finite difference method) 및 유한요소법(finite element method) 등과 같은 수치적방법이나, 상계해석(upper bound method) 등과 같은 에너지방법 등이 이용되고 있다. 유한요소법은 많은 정보를 제공할 수 있어서 다양하게 이용되고 있으나, 계산시간이 많이 걸리고 계산시의 강성행렬을 구성하지 않으므로 적은 기억용량으로도 적용이 가능하여 공정의 설계단계에서 공정변수를 결정하는데 간단히 이용할 수 있다.

초기의 이론적인 연구는 유한차분법(finite difference method)에 의한 것이 많이 보고 되었으며,<sup>(1~3)</sup> 근래에는 강소성 또는 탄소성 모델의 유한요소법에 의한 연구가 활발히 진행되고 있다. Woo<sup>(1)</sup>는 유한차분법으로 반구형 편치에 의한 디프드로잉을 해석하였으며 Chiang과 Kobayashi<sup>(2)</sup> 및 Yamada<sup>(3)</sup>도 유한차분법으로 축대칭 디프드로잉을 해석하였다. Karima와 Sowerby<sup>(4)</sup>는 힘의 평형에 기초하여 개인용 컴퓨터를 이용하여 축대칭 디프드로잉을 해석하는 방법을 제시했다. 유한요소해석에 의한 연구로서 Gotoh와 Ishise<sup>(5)</sup> 및 Yang 등<sup>(6)</sup>은 3차원 형상의 디프드로잉에 있어서 플랜지의 변형을 유한요소 해석하였으며, Nakamachi<sup>(7)</sup> 및 Vogel과 Lee<sup>(8)</sup>는 사각형 편치에 의한 디프드로잉 공정을 유한요소 해석했다. 또한 Yang 등<sup>(9)</sup>은 평면이방성을 고려한

유한요소해석으로 3차원 형상의 디프드로잉을 강소성 유한요소해석하였다. Odell과 Clausen<sup>(10)</sup>은 두께방향으로의 응력변화에 의한 굽힘효과를 고려하여 디프드로잉을 해석하였으며, Tatenami 등<sup>(11)</sup>은 두께방향으로의 층을 나눔으로써 굽힘효과를 고려했다. Wang과 Tang<sup>(12)</sup>은 적층 셀을 이용하여 굽힘을 고려한 유한요소해석을 하였다.

에너지법을 통한 디프드로잉 공정의 해석에는 별로 보고된 바 없으며 박판성형에 대한 에너지법의 적용은 하이드로포밍 공정이나 정수압벌징 공정 등의 해석을 통하여 이루어져 왔다. Tirosh 등<sup>(14)</sup>은 축대칭 하이드로포밍에서 편치의 행정에 따른 적절한 압력을 찾기 위하여 상계해법을 적용하였으며 Noh와 Yang<sup>(15,16)</sup>은 비축대칭 용기를 제작하기 위한 하이드로포밍 공정에서 균일한 두께의 제품을 얻기 위한 편치행정과 유체 압력의 관계를 상계해석을 통하여 구하였다. Yang과 Noh<sup>(17)</sup>는 상계해법을 적용시켜 간단하면서도 적당한 속도장으로 축대칭 정수압벌징을 해석하였으며 실험과 비교하여 좋은 일치율을 보였다. 이러한 보고들은 모두 플랜지 부분의 평면변형이나 비교적 간단한 형상의 축대칭 문제를 해석한 예이며 복잡한 형상에 대한 박판성형 공정을 에너지법으로 해석하기 위해서는 다음과 같은 문제점이 해결되어야 한다.

첫째, 기하학적 형상의 해석적인 표현이고,

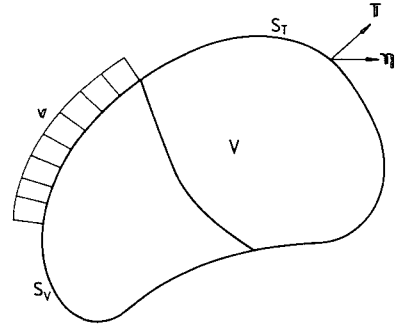
둘째, 전체 변형영역에 만족되는 적합한 동적가속도장(kinematically admissible velocity field; KAVF)의 구성이며,

셋째, 변형영역 내에서 속도장의 미분을 통한 변형률속도의 계산이다.

그러므로 박판성형 공정의 해석을 위한 경제적이면서도 유용한 새로운 접근방법이 요구된다. 근래에 Lee와 Yang<sup>(18)</sup>이 축대칭 박판성형 공정을 해석하는데 있어서 이러한 문제를 해결하기에 효율적인 방법을 제안하였다. 그들은 전체 변형영역을 네가지 형태로 분류되는 몇개의 작은 영역으로 분할한 뒤 각 영역에서 각각 정의된 속도장을 조합하여 전체 변형영역에서의 속도장을 구성하여 에너지법으로 해석하는 방법을 제안하였으며 반구형 편치에 의한 인장성형을 해석하여 좋은 결과를 보였다.

본 논문에서는 에너지법으로 축대칭 박판성형 공정을 해석할 때, Lee와 Yang<sup>(18)</sup>이 제안한 방법을 적용함에 있어 굽힘효과를 효과적으로 고려할 수 있는 방법을 제안하고 축대칭 컵드로잉 공정을 해

석하여 본 이론의 타당성을 입증하고자 한다. 굽힘 효과는 박판소재를 몇개의 층(layer)으로 나눈 뒤, 각 층에서 소비되는 변형에너지를 합하여 전체 에너지를 최소화시킴으로써 고려하였다. 해석시 펀치 목부분과 다이목부분에서의 접촉압력은 각각 균일한 분포를 갖는 것으로 가정하였다. 본 이론의 타당성을 입증하기 위하여 계산결과를 실험치 및 탄소성 유한요소해석 결과와 비교하였다.



V : Total volume  
 S : Total surface area  
 S<sub>V</sub> : Velocity-prescribed boundary  
 S<sub>T</sub> : Traction-prescribed boundary

Fig.1 Schematic diagram of a deforming body

## 2. 축대칭 박판성형 공정의 해석

### 2.1 기본가정

금속성형 공정에서 재료를 성형시키기 위한 금형이나 소재의 가공경화 그리고 마찰력 등은 성형 하중이나 유동특성에 큰 영향을 미친다. 일반적으로 금속성형 공정을 해석하는 데 있어서 경계조건을 만족하는 범위 내에서 적당한 가정을 하여 간단하면서도 실제 현상과 유사한 모델을 선정하면 보다 쉽게 근사해를 얻을 수 있다. 축대칭 박판성형 공정을 해석하는 데 있어서 본 논문에서는 다음과 같은 가정을 도입하였다.

- (i) 평면응력 조건이 고려된다.
- (ii) 이방성은 두께방향에 대하여서만 고려된다 (수직이방성).
- (iii) 유동응력은 유효변형률만의 함수이다. 즉,

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon}) \quad (1)$$

- (iv) 박판소재는 비압축성이다. 즉,

$$\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon} = 0 \quad (2)$$

- (v) 마찰은 Coulomb마찰계수에 의해 고려된다. 즉,

$$\tau = \mu p \quad (3)$$

### 2.2 상계해법

Fig. 1은 소성변형을 받는 피가공물을 모식화시킨 그림이다. 소성변형을 받는 물체가 동적가용속도장의 조건을 만족시키기 위해서는 첫째, 비압축성 조건이 만족되어야 하고, 둘째, 속도경계면에서의 수직방향성분이 연속이어야 한다. 이와같은 피가공물의 소성변형 영역에 대하여 유도된 동적가용속도장,  $v^*$ ,으로부터 이에 따르는 동적가용변형률 속도장,  $\dot{\epsilon}^*$ ,이 결정된다. 이때 이 변형률 속도장,  $\dot{\epsilon}^*$ ,에 의한 항복응력장,  $\sigma^*$ ,은 실제의 응력

장,  $\sigma_{ij}$ ,과 최소일원리(complementary minimum energy principle)에 의해 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \leq \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* \quad (4)$$

식(4)를 적분하고 발산 정리를 적용하면 다음과 같은 상계식이 얻어 지게 된다.

$$\int_{S_v} T_i v_i^* dS \leq \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV - \int_{S_T} T_i v_i^* dS \quad (5)$$

여기서  $S_v$ 는 속도가 정의된 경계면이고,  $S_T$ 는 표면력(traction force)이 정의된 경계면을 나타낸다.  $V$ 는 피가공물의 변형되는 내부체적(internal body volume)을 나타내며 '\*'는 동적가용속도장에서 유래된 양임을 표시한다.

식(5)에서 왼쪽 항은 속도가 정의된 경계면에 작용하는 표면력에 의해 외부에서 가해진 외부일률(external work rate)이며 오른쪽 첫번째 항은 내부변형에너지율(internal deformation energy rate)을 나타낸다. 표면력이 정의되는 경계면  $S_T$ 에서 면적분의 형태로 정의되는 두번째 항은 금형과 소재 사이의 마찰력에 의해 소비되는 마찰 에너지율(energy rate due to friction)을 나타낸다.

### 2.3 축대칭 박판성형에서의 기하학적 형상

축대칭 박판 성형공정을 해석하는데 있어서 전체 영역은 Fig. 2에서 보이는 네가지 형태(type)의 작은 영역으로 분할이 가능하다. 각각의 영역에서 축대칭 곡면 위의 한 점에서 좌표간의 관계는 다음과

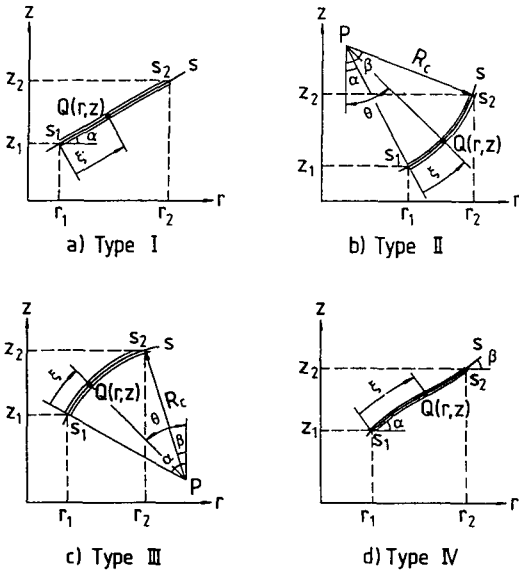


Fig. 2 Four types of sections to construct the total deforming region of axisymmetric sheet metal forming

같이 결정된다.

type I은 종방향으로 직선의 단면을 갖는 영역으로  $r$ 과  $z$ 의 관계는 다음과 같다.

$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{r_2 - r_1} (r - r_1) \quad (6a)$$

type II는 종방향으로 원호의 일부인 단면을 갖고 있으며 좌표간의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r &= r_p + R_c \sin \alpha \\ z &= z_p - R_c (1 - \cos \alpha) \end{aligned} \quad (6b)$$

type III는 type II와 마찬가지로 종방향으로 원호의 일부인 단면을 갖고 있으며 좌표간의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r &= r_p - R_c \sin \alpha \\ z &= z_p + R_c (1 - \cos \alpha) \end{aligned} \quad (6c)$$

type IV는 축대칭 곡면에서 임의의 형상을 표현하기 위한 것으로 양쪽 경계에서의 좌표 및 기울기에 의해 표현된다. 즉, 각 좌표간의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z &= z_1 + \frac{z_2 - z_1}{r_2 - r_1} (r - r_1) + (a(r - r_1) + b) \\ &\quad \sin\left(\pi \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right) \end{aligned} \quad (6d)$$

식(6.d)에서  $a$ 와  $b$ 는 다음 관계에 의해 결정된다.

$$\frac{dz}{dr}\Big|_{r=r_1} = \tan \alpha_1, \quad \frac{dz}{dr}\Big|_{r=r_2} = \tan \alpha_2$$

### 2.4 속도장

축대칭 박판성형에서 속도장은 두개의 성분으로 표현된다. 예를 들면, 축대칭 문제의 경우 원통좌표계에서의 반경방향 성분과 축방향 성분으로 속도를 표현할 수 있다. 두개의 속도성분 중 에너지 최소화를 위하여 도입되는 최적화 변수는 하나의 속도성분에만 가정된다. 그리고 이에 의한 변위와 각 좌표간의 관계로부터 기하학적 상태(geometric configuration)가 결정된다. Fig. 3(a)에  $k$ -번째 영역에서의 반경방향의 속도를 나타내었는데, 선형부분과 비선형 부분을 분리하여 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$v_r = (v_r)^k + (v_r)_{nl}^k \quad (7a)$$

$$(v_r)^k = (v_r)^k (1 - \xi) + (v_1)^k \xi \quad (7b)$$

$$(v_r)_{nl}^k = \left(\sum_{i=1}^{n_k} a_{ki} \xi^{i-1}\right) \sin(\pi \xi) \quad (7c)$$

여기서,  $\xi = \frac{r - r_{k-1}}{r_k - r_{k-1}}, 0 \leq \xi \leq 1$

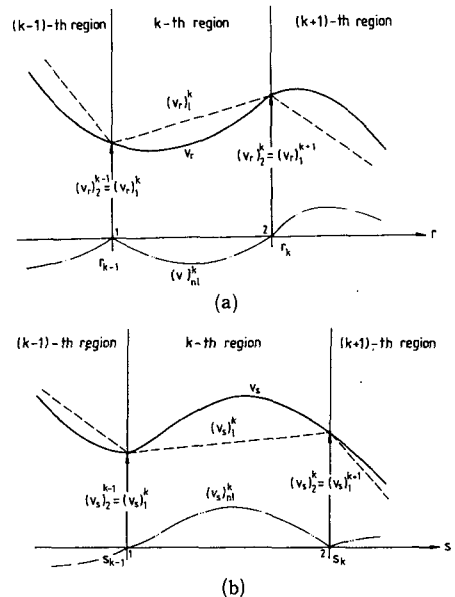


Fig. 3 Velocity components in axisymmetric sheet metal forming process: a) for radial component and b) for longitudinal component

식(7)에서  $(v_r)^k$ 은 한 영역의 양쪽 경계에서 각각  $(v_r)^k_1$ ,  $(v_r)^k_2$ 의 크기를 갖고 영역 내부에서는  $\xi$ 에 대하여 선형인 속도장을 구성한다.  $(v_r)^k_{n_i}$ 은 한 영역의 양쪽 경계에서는 모두 '0'의 크기를 갖고 영역의 내부에서  $\xi$ 에 대하여 비선형인 속도장을 구성한다. 여기서 비선형 속도장  $(v_r)^k_{n_i}$ 은  $n_k$ 에 따라 복잡성 정도가 표현된다. 실제의 박판성형 공정에서는 속도 불연속면이 존재하지 않으므로 동적가용 속도장의 조건이 만족되기 위해서는 첫째, 각 영역의 내부에서 또는 영역의 경계에서 속도가 연속이어야 하며 둘째, 박판소재가 변형할 때 비압축성 조건을 만족시켜야 한다. 첫번째 조건이 만족되기 위해서는 인접하는 영역과의 경계에서 속도가 연속이어야 한다. 즉,

$$(v_r)^{k-1}_2 = (v_r)^k_1, \quad (v_r)^k_2 = (v_r)^{k+1}_1 \quad (8)$$

반경방향의 속도장에 의해 한 시간단계에서의 변형 후의 반경은 식(9)와 같이 결정되며  $z$ -좌표는 기하학적 관계에 의해 반경의 함수로 구해진다.

$$r^{i+1} = r^i + v_r \Delta t \quad (9)$$

$$z = z(r) \quad (10)$$

여기서  $\Delta t$ 는 한 시간단계 동안의 시간증분을 표시한다.

디프드로잉과 같은 공정의 경우 편치 벽면에서는 거의 수직에 가까우므로 반경방향의 변위의 변화에 대하여 축방향 변위의 변화가 매우 크다. 그러므로 원통좌표계 내에서 속도를 정의하는 것은 비효율적일 수가 있다. 이런 경우 종방향에서의 길이의 변화를 속도로 정의하여 이로부터 기하학적 상태를 정의하는 것이 이를 해결하는 하나의 방법이다. Fig. 3(b)에  $k$ -번째 영역에서 종방향 길이에 따르는 종방향 길이의 변화율(본 논문에서는  $v_s$ 로 표시했음)을 나타내었다. 이를 식으로 표현하면 반경방향 속도를 정의할 때와 마찬가지로 다음 식과 같이 정의할 수 있다.

$$v_s = (v_s)^k_1 + (v_s)^k_{n_i} \quad (11a)$$

$$(v_s)^k_1 = (v_s)^k_1(1 - \xi) + (v_s)^k_2 \xi \quad (11b)$$

$$(v_s)^k_{n_i} = \left( \sum_{i=1}^{n_k} a_{ki} \xi^{i-1} \right) \sin(\pi \xi) \quad (11c)$$

여기서,

$$\xi = (s - s_1) / (s_2 - s_1), \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

반경방향속도를 정의할 때와 마찬가지로  $(v_s)^k_1$ ,  $(v_s)^k_2$ 의

크기를 갖고 그 영역 내부에서는 선형이다. 그리고  $(v_s)^k_{n_i}$ 는 한 영역의 양쪽 경계에서는 모두 '0'의 값을 갖고 영역의 내부에서는 비선형이다. 그리고  $(v_s)^k_{n_i}$ 는  $n_k$ 에 따라 복잡성 정도가 달라지게 된다. 인접한 영역과의 경계에서 속도가 연속이어야 하므로 다음과 같은 관계가 얻어진다.

$$(v_s)^{k-1}_2 = (v_s)^k_1, \quad (v_s)^k_2 = (v_s)^{k+1}_1 \quad (12)$$

변형동안의 종방향의 길이의 변화율이 식(11) 및 식(12)에서와 같이 결정되면 변형후의 변위의 반경방향 성분과 축방향 성분은 아래와 같이 정의된다.

$$s^{i+1} = s^i + v_s \Delta t \quad (13)$$

$$r = r(s), \quad z = z(s) \quad (14)$$

## 2.5 내부 변형에너지의 계산

변형후의 상태(subsequent configuration)가 결정되면 변형전 상태(reference configuration)와 함께 기하학적형상으로부터 변형에 따르는 변형률 증분이 구해진다. 축대칭 박판성형 공정에서 변형의 주방향은 종방향(longitudinal direction), 원주방향(circumferential direction) 그리고 두께방향(thickness direction)이다. Fig. 4로부터 종방향의 변형률 증분(longitudinal strain increment),  $\Delta \epsilon_1$ , 및 원주방향의 변형률 증분(circumferential strain increment),  $\Delta \epsilon_2$ ,는 기하학적 형상으로부터 식(15.a) 및 식(15.b)와 같이 직접 구해지게 된다. 두께반향의 변형률 증분(thickness strain increment),  $\Delta \epsilon_3$ , 비압축성 조건으로부터 식(15.c)와 같이 나타내어진다.

$$\Delta \epsilon_1 = \ln \left( \frac{S'_{k2} - S'_{k1}}{S_{k2} - S_{k1}} \right) \quad (15 a)$$

$$\Delta \epsilon_2 = \ln \left( \frac{r'_k}{r_k} \right) \quad (15 b)$$

$$\Delta \epsilon_3 = -\Delta \epsilon_1 - \Delta \epsilon_2 \quad (15 c)$$

수직이방성 재료에 대하여 유효변형률 증분은 주 변형률 증분으로부터 식(16)에 의해 결정되며 유효 변형률은 유효변형률 증분을 시간으로 적분하여 계산하는데 식(17)에서와같이 각 시간단계에서의 유효변형률 증분을 누적시킨 것으로 가정했다. 유효응력은 유효변형률만의 함수이므로 식(18)과 같이 표현된다.

$$\Delta \bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2(1+R)(2+R)}{3(1+2R)}}$$

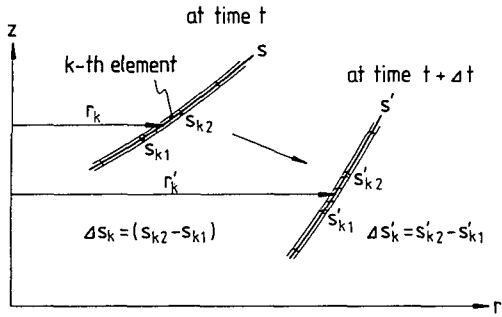


Fig. 4 Coordinate system of an axisymmetric sheet metal forming process for calculation of strain components

$$\left( \Delta \epsilon_1^2 + \Delta \epsilon_2^2 + \frac{2R}{1+R} \Delta \epsilon_1 \Delta \epsilon_2 \right)^{1/2} \quad (16)$$

$$\bar{\epsilon} = \int \bar{\epsilon} dt = \sum_{i=1}^{k_B} (\Delta \bar{\epsilon})_i \quad (17)$$

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon}) \quad (18)$$

여기서  $R$ 은 수직이방성에 대한 이방성계수 (landford value; r-value)를 나타내며  $k_B$ 는 현재까지의 시간증분의 수를 나타낸다. 그리고  $(\Delta \bar{\epsilon})_i$ 는  $i$ -번째 시간증분 동안의 유효변형률 증분을 나타낸다.

한 단계동안 변형하는 박판소재의 내부 변형에너지는 다음식과 같이 얻어진다.

$$\Delta W_i = \int_V (\bar{\sigma} \Delta \bar{\epsilon}) dV \quad (19)$$

### 3. 축대칭 컵드로잉 공정의 해석.

#### 3.1 기하학적 형상

Fig. 5에 축대칭 디프로딩의 공정 모식도가 나타나 있다. 기하학적인형상 및 펀치 또는 다이와의 접촉여부에 따라 전체 변형영역을 다섯개의 작은 영역으로 분할할 수 있다. 영역 1은 펀치의 바닥과 접촉하고 있는 부분으로 Fig. 2에서의 type I과 같은 것으로 구분되어 지며, 영역 2는 펀치 바닥과 펀치벽 사이를 연결시키는 부분 (punch shoulder)으로 type II와 같다. 영역 3은 자유곡면으로 type IV와 같은 것으로 구분되어지나, 펀치와 다이 사이의 간극이 작으므로 본 연구에서는 type I과 같은 것으로 분류했다. 영역4는 다이목 (die shoulder)부분으로서 Fig. 2에서의 type III와 같은 것으로 분류되며 영역5는 type I과 같은 것으로 분류된다.

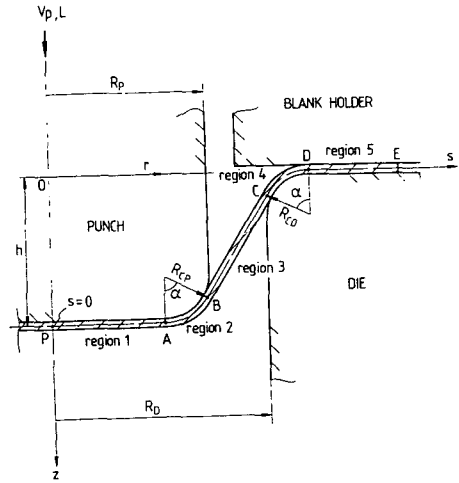


Fig. 5 Schematic diagram of axisymmetric cup drawing

Fig. 5의 기하학적 형상으로부터 각 영역의 경계에서의 좌표는 아래와 같다.

점 A(영역1과 영역 2의 경계)에서,

$$r_A = R_p - R_{CP}, z_A = h, s_A = r_A \quad (20a)$$

점 B(영역2와 영역3의 경계)에서,

$$\begin{aligned} r_B &= R_p - R_{CP}(1 - \sin \alpha_B) \\ z_B &= h - R_{CP}(1 - \cos \alpha_B) \\ s_B &= s_A + R_{CP} \alpha_B \end{aligned} \quad (20b)$$

점 C(영역3과 영역4의 경계)에서,

$$\begin{aligned} r_C &= R_D + R_{CD}(1 - \sin \alpha_C) \\ z_C &= R_{CD}(1 - \cos \alpha_C) \\ s_C &= s_B + (z_B - z_C) / \sin \alpha_C \end{aligned} \quad (20c)$$

점D(영역4와 영역5의 경계)에서,

$$\begin{aligned} r_D &= R_D + R_{CD} \\ z_D &= 0, \\ s_D &= s_C + R_{CD} \alpha_C \end{aligned} \quad (20d)$$

점 E(플랜지의 외곽)에서,

$$r_E = r_0, z_E = 0, s_E = s_D + r_0 - r_E \quad (20e)$$

각각의 영역에서  $r, z, \alpha$  그리고  $s$ 의 관계는 아래 식과 같다.

영역 1(type I)에서,

$$r = s, z = z_A = h \quad (21a)$$

영역 2(type II)에서,

$$\begin{aligned} r &= r_A + R_{CP} \sin \alpha, \quad z = h - R_{CP}(1 - \cos \alpha) \\ s &= s_A + R_{CP} \alpha \end{aligned} \quad (21b)$$

영역 3(type I)에서,

$$\begin{aligned} s &= s_B + \sqrt{(r - r_B)^2 + (z - z_B)^2} \\ r &= r_B + (s - s_B) \cos \alpha \\ z &= z_B - (s - s_B) \sin \alpha \end{aligned} \quad (21c)$$

영역 4(type III)에서,

$$\begin{aligned} s &= s_C + R_{CD}(\alpha - \alpha) \\ r &= r_D + R_{CD}(1 - \sin \alpha) \\ z &= R_{CD}(1 - \cos \alpha) \end{aligned} \quad (21d)$$

영역 5(type I)에서,

$$r = r_D + (s - s_D), \quad z = 0 \quad (21e)$$

여기서,  $\alpha$ 는 면의 수직벡터와  $z$ -축이 이루는 각이다.

### 3.2 속도장

속도장은 종방향의 길이의 변화율( $v_s$ )로 표현하였으며 선형성분과 비선형 부분으로 분리하여 각각의 영역에서 각각 가정하여 조합하였다.  $k$ -번째 영역에 대하여는 다음과 같이 표현된다.

$$v_s = (v_s)^k + (v_s)^{nl} \quad (22a)$$

$$(v_s)^k = (v_s)^k(1 - \xi) + (v_s)^k(\xi) \quad (22b)$$

$$(v_s)^{nl} = \left( \sum_{i=1}^{n_k} a_{ki} \xi^{i-1} \right) \sin(\pi \xi) \quad (22c)$$

여기서,  $k$ 는 영역번호를 나타내며  $\xi$ 는 무차원화된 좌표로서 다음과 같이 정의된다.

$$\xi = \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

### 3.3 마찰에너지의 고려

마찰에 의한 에너지의 소비는 펀치목 부분(영역 2)에서와 다이목 부분(영역 4), 그리고 블랭크 홀더와 접촉하는 부분에서 발생한다. 블랭크 홀더와 접촉하는 부분은 플랜지 부분중에서 가장 두께가 두꺼운 부분이며 이에 의한 마찰에너지는 아래 식과 같다.

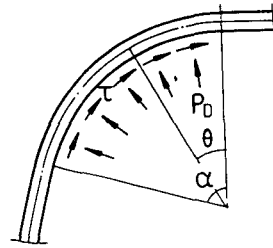
$$\Delta W_b = (\mu_{upper} + \mu_{lower}) v_b F_b \quad (23)$$

여기서,  $v_b$ 는 가장 두꺼운 부분의 마찰속도이며  $F_b$ 는 블랭크 홀딩력을 나타내고 있다.  $\mu_{upper}$ 와

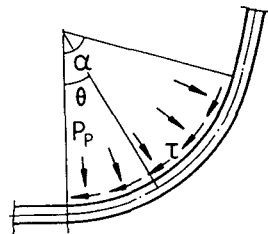
$\mu_{lower}$ 는 각각 소재판의 윗면과 아랫면에 작용하는 Coulomb 마찰계수를 나타내고 있다.

펀치목 부분에서와 다이목 부분에서 소비되는 마찰에너지를 계산하기 위해서는 영역 2 및 영역 4에서의 접촉압력 및 마찰속도 그리고 마찰계수가 고려되어야 하는데 마찰속도는 강제인 금형에 대한 상대속도로써 고려하였으며, 마찰계수는 Coulomb 마찰계수를 사용하였다. 반구형 펀치에 의한 인장성형의 경우, 두께방향의 응력을 무시한 평면응력의 가정하에 유동법칙과 평형 방정식에 의해 접촉압력이 구해졌으나, 디프드로잉의 경우 펀치목 부분과 다이목 부분의 면적이 다른 영역에 비해 매우 좁아서 펀치목과 다이목에서 각각 균일한 분포를 갖는 것으로 가정하였다. 이 균일한 압력분포는 힘의 평형으로부터 구해지며, 다음에 압력을 구하는 과정을 기술하였다. 이 균일한 압력분포는 힘의 평형으로부터 구해지며, 다음에 압력을 구하는 과정을 기술하였다. 영역 2 및 영역 4에서 접촉압력 및 마찰력에 의한 축방향 힘의 성분은 각각 펀치하중과 평형을 이루어야 하므로 Fig. 6으로부터 다음의 평형관계를 얻을 수 있다.

펀치목에서,



(a) at die shoulder



(b) at punch shoulder

Fig. 6 Contact pressure and frictional shear force at the punch and die shoulder in axisymmetric deep drawing

$$L = \int_{\theta=0}^{a_B} 2\pi r (p_P \cos \alpha + \mu p_P \sin \alpha) d\alpha \quad (24)$$

다이목에서

$$L = \int_{\theta=0}^{a_C} 2\pi r (p_D \cos \alpha + \mu p_D \sin \alpha) d\alpha \quad (25)$$

여기서  $p_P$  와  $p_D$  는 각각 펀치목과 다이목에서의 접촉압력을 나타낸다.

위의 식으로부터 다이목과 펀치목에서의 접촉압력은 아래식과 같이 표현된다. 영역 2에서,

$$p_P = \frac{L}{2\pi R_{CP}} \left[ r_A (\mu + \sin a_B - \mu \cos a_B) + \frac{1}{2} R_{CP} (\mu a_B + \sin^2 a_B - \mu \cos a_B \sin a_B) \right]^{-1} \quad (26)$$

영역 4에서,

$$p_D = \frac{L}{2\pi R_{CD}} \left[ r_E (\mu + \sin a_C - \mu \cos a_C) + \frac{1}{2} R_{CD} (-\mu a_C - \sin^2 a_C + \mu \cos a_C \sin a_C) \right]^{-1} \quad (27)$$

### 3.4 굽힘에너지의 고려

축대칭 박판성형 공정을 해석할 때 굽힘의 효과를 고려하기 위해 Fig. 7에서와 같이 소재판을 몇 개의 층으로 나누었다. 각 층에서의 면에 수직인 단위 벡터는 서로 같은 것으로 가정하였다. Fig. 7로부터  $k$ 번째 층의 종방향의 변형률 증분은 다음과 같이 계산된다.

$$\Delta \epsilon_1^k = \ln(\Delta s'_k / \Delta s_k) = \Delta \epsilon_1^0 + \ln((1+y/\rho'_1)/(1+y/\rho_1)) \quad (28)$$

여기서,  $\Delta \epsilon_1^0$  및  $\Delta \epsilon_1^k$  는 중립면 및  $k$ 번째 층에서의 종방향의 변형률 증분을 나타낸다. 그리고  $\rho_1$  및  $\rho'_1$  는 변형전후의 종방향의 곡률반경을 나타낸다.

$k$ -번째 층의 원주방향의 변형률 증분은 다음 식과 같다.

$$\Delta \epsilon_2^k = \Delta \epsilon_2^0 + \ln((1+y/\rho'_2)/(1+y/\rho_2)) \quad (29)$$

여기서  $\Delta \epsilon_2^0$  및  $\Delta \epsilon_2^k$  는 중립면 및  $k$ 번째 층에서의 원주방향의 변형률 증분을 나타낸다. 그리고  $\rho_2$  및  $\rho'_2$  는 변형전후의 원주방향의 곡률반경을 나타낸다. 축대칭 문제에서  $\rho_2$  와  $\rho'_2$  는 다음과 같이 정의된다.

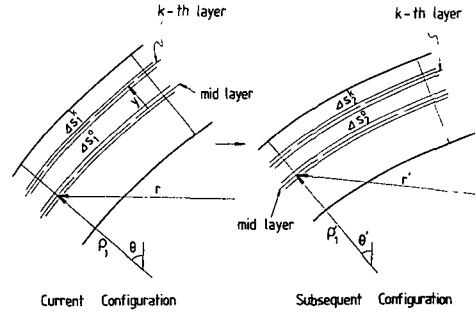


Fig. 7 Deformation of multi-layered membrane shell for the axisymmetric sheet metal forming

$$\rho_2 = r / \sin \theta, \quad \rho'_2 = r' / \sin \theta' \quad (30)$$

축대칭 박판성형 공정의 해석에서 굽힘효과는 각 층에서의 변형에너지를 전체 변형에너지에 각각 포함시킴으로써 고려된다.

각각의 층에서 두께방향의 변형률 증분은 비압축성 조건으로부터 구해지며,  $k$ -번째 층에 대하여 두께방향의 변형률 증분은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \epsilon_3^k = -\Delta \epsilon_1^k - \Delta \epsilon_2^k \quad (31)$$

## 4. 결과 및 토론

축대칭 컵드로잉을 해석하는데 있어서 사용된 최적화기법은 Unconstrained Fletcher-Powell Method 이며 최적화변수는 모두 11개이다. 이중 다섯개는 각 영역의 경계에서의 속도  $(v_s)_A, (v_s)_B, (v_s)_C, (v_s)_D, (v_s)_E$  이며 이들은 각각의 영역에서의 선형 속도장을 구성한다. 그리고 비선형 속도장에 있어서 각 영역에서의 최적화변수는 영역 5에서는 세개가 취해졌으며 영역 2, 영역 3 및 영역 4에서는 각각 한 개씩 취해졌다. 그리고 영역 1에서는 비선형 속도장의 변수가 취해지지 않았다. Table 1에 식 (22)에 도입된 변수들을 각 영역별로 표시하였다. 비선형 속도장에 도입된 최적화변수는 기하학적 형상의 복잡성이나 변형에너지의 비중을 고려하여 취해진 것이다. 영역 1은 단순한 원판이므로 균일한 변형이라고 생각하여 선형속도장만으로 속도장을 구성하였으며 영역 5는 플랜지 부분으로 대부분의 변형이 여기에서 발생하므로 변형의 복잡성을 표현하기 위하여 비선형 부분에 세개의 변수를 취하였다.



**Table 1** Optimization parameter used in each region

region (K)	$(v_s)_1^k$	$(v_s)_2^k$	$n_h$	$a_{hi}$
1	0	$(v_s)_A$	0	
2	$(v_s)_A$	$(v_s)_B$	1	$a_{21}$
3	$(v_s)_B$	$(v_s)_C$	1	$a_{31}$
4	$(v_s)_C$	$(v_s)_D$	1	$a_{41}$
5	$(v_s)_D$	$(v_s)_E$	3	$a_{51}, a_{52}, a_{53}$

계산시 마찰계수는 wrapping인장시험<sup>(19)</sup>을 통해 구한 Coulomb 마찰계수를 사용하였다.

본 이론의 효율성을 고찰하기 위하여 실험과 적층셀 모델에 대한 탄소성 유한요소해석<sup>(13)</sup>과 비교하였다.

계산 및 실험에 사용된 소재의 성질 및 금형의 형상치수는 다음과 같다.

시편의 재료 : aluminum-killed steel

응력-변형도관계 :  $\bar{\sigma} = 51.92 \bar{\epsilon}^{0.247}$  (kgf/mm<sup>2</sup>)

수직이방성 계수 :  $R = 1.867$

시편의 초기두께 :  $t_0 = 0.8$  mm

펀치반경 :  $R_p = 30.3$  mm

펀치목에서의 코너반경 :  $R_{cp} = 5.0$  mm

다이의 내부반경 :  $R_D = 31.25$  mm

다이목에서의 코너반경 :  $R_{CD} = 5.0$  mm

소재판의 초기반경 :  $r_0 = 60.0$  mm

소재판의 한쪽면(다이의와의 접촉면)에는 윤활재(grease)를 사용하여 마찰계수를 감소시켰으며 다른 한쪽면(펀치와의 접촉면)에는 건조마찰상태로 유지시켰다. 이에 대한 마찰계수는 다음과 같다.<sup>(19)</sup>

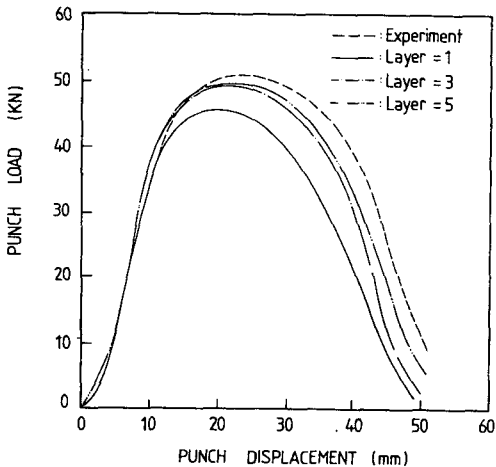
건조마찰상태 :  $\mu_{lower} = 0.24$

grease윤활상태 :  $\mu_{upper} = 0.12$

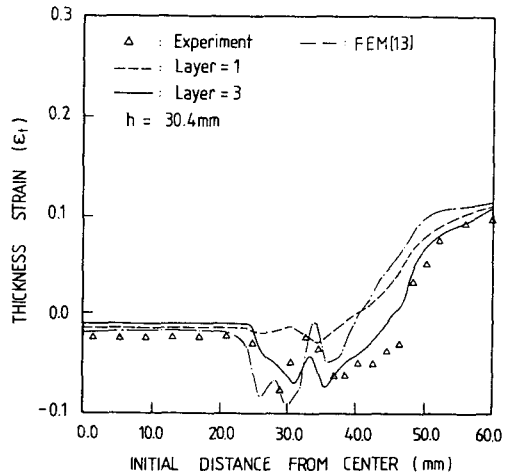
블랭크 홀딩력은 1000 Kgf로 가하였다.

Fig. 8은 펀치행정과 하중의 관계에 대하여 본 이론에 의한 결과를 실험치 및 유한요소해석 결과<sup>(13)</sup>와 비교한 것이다. 전반적으로 실험치와 이론치가 비슷한 경향을 보이고 있으며, 층의 개수가 많을수록 굽힘효과를 효과적으로 고려하여 실험치와 근사한 해를 보여주고 있다. 층의 개수가 한개일 때와 세개일 때는 하중의 차이가 많이 나고 있으며, 세개일 때와 다섯개일 때는 약간의 차이만이 보인다. 그러므로 세개 정도의 층만으로도 굽힘효과를 고려할 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 9와 Fig. 10은 펀치행정의 30.4 mm 및 46.0 mm일 때 두께변형도 분포에 대하여 각각 본 이론에 의한 결과를 실험치 및 유한요소해석 결과<sup>(13)</sup>와 비교하여 보여주고 있다. 탄소성 유한요소 해석에서는 적층셀 모델을 사용한 것이며 본 이론에 의한



**Fig. 8** Punch load vs. stroke relationship for axisymmetric deep drawing : Comparison of the result by the present method with the corresponding experiment



**Fig. 9** Thickness strain distribution in the radial direction when the punch stroke is 30.4 mm : Comparison of the present method with the corresponding experiment

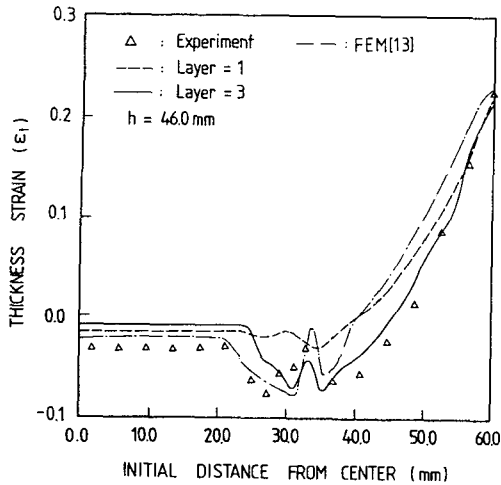


Fig. 10 Thickness strain distribution in the radial direction when the punch stroke is 46.0 mm : Comparison of the present method with the corresponding experiment

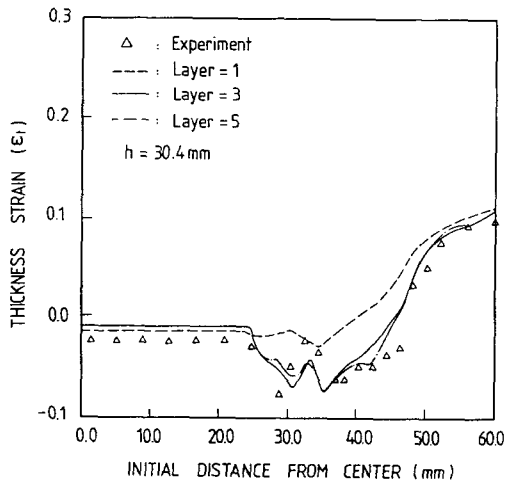


Fig. 11 Thickness strain distribution in the radial direction when the punch stroke is 30.4 mm : Comparison for three cases of the number of layers

결과는 층을 세개로 나누는 경우이다. 실험치와 비교하여 유한요소해석 결과와 본 이론에 의한 결과가 모두 전반적으로 비슷한 경향을 보이고 있다. 본 이론에 의한 결과에서 단층인 경우에는 굽힘의 효과를 고려하지 못하므로 다이목이나 펀치목에서의 변형상태를 합리적으로 표현하지 못함을 알 수 있다. 반면에 층을 3개로 나누었을 때는 굽힘의 효과

가 고려되어 실험치와 보다 근사한 해를 얻을 수 있었다. 본 이론에 의한 결과와 탄소성 유한요소해석의 결과를 비교하면 소재판의 안쪽 부분에서는 유한요소해석 결과가 실험치와 좀 더 잘 일치하고 있으며, 바깥쪽 부분에서는 본 이론에 의한 결과가 좀 더 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 본 이론에 의한 해석에서는 에너지 최소화기법에 의하여 변형에너지가 큰 부분에서 더 많은 비중이 주어지게 되므로, 변형에너지의 대부분을 차지하는 플랜지 영역에서 해석결과가 실험치와 잘 일치하는 것은 당연하다고 사료된다.

Fig. 11은 본 이론에서 층의 개수에 대한 영향을 살펴보기 위한 그림으로 펀치행정이 30.4 mm일 때의 두께변형도 분포를 보여주고 있다. 전반적으로 비슷한 경향을 보이고 있으며 단층인 경우에는 굽힘의 효과를 고려하지 못하여 실험치와 비교하여 큰 오차를 보여주고 있다. 반면에 층을 3개로 나누었을 때는 굽힘의 효과가 고려되어 다이목이나 펀치목에서의 변형상태를 합리적으로 표현하고 있다. 층이 다섯개인 경우에는 층이 세개인 경우와 큰 차이가 없음을 보여주고 있는데 이로써 세개의 층만으로 충분히 굽힘의 영향을 고려할 수 있음을 알 수 있다.

## 5. 결 론

축대칭 박판성형 공정을 에너지법으로 해석함에 있어 굽힘효과를 고려하는 한 방법을 제안하였다. 본 이론의 타당성을 고찰하기 위하여 축대칭 컵드로잉 공정을 해석하였다. 펀치행정에 따른 하중곡선에 대하여 본 이론에 의한 결과를 실험치와 비교하여 비교적 좋은 일치를 보였으며 층의 개수가 많을수록 실험치와 가까운 결과를 얻었다. 변형도 분포에 대하여 실험치 및 탄소성 유한요소해석 결과와 비교하여 좋은 일치를 보였으며 층을 나누어 해석하는 것이 굽힘효과를 효과적으로 고려할 수 있음을 보였다. 따라서 본 이론을 축대칭 박판성형 문제에 적용하면 효과적으로 굽힘효과를 고려하여 공정의 설계에 좋은 자료를 제공할 수 있으리라 사료된다.

## 참고문헌

- (1) Woo, D.M., 1968, "On the Complete Solution of

- the Deep-Drawing Problem," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 10, pp. 83~94.
- (2) Chiang, D.C. and Kobayashi, S., 1966, "The Effect of Anisotropy and Work-Hardening Characteristics on the Stress and Strain Distribution in Deep Drawing," *J. Engng. Ind., Trans. ASME*, 443~448.
- (3) Yamada, Y., 1961, *Studies on Formability of Sheet Metals*, Report of the Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol. 11, No. 5.
- (4) Karima, M. and Sowerby, R., 1988, "A PC Based Computer Aided Analysis System for the Cup Drawing Process," *J. Mater. Shaping Technol.*, Vol. 6, 113~124.
- (5) Gotoh, M. and Ishise, F., 1978, "A Finite Element Analysis of Rigid Plastic Deformation of the Flange in a Deep-Drawing Process Based on a Fourth-Degree Yield Function," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 20, pp. 423~435.
- (6) Yang, D. Y., Chung, W.J., Cha, Y.Y. and Kim, Y.J., 1987, "Analysis and Design of Flange Deformation in Deep Drawing of General Noncircular Cups," *Advanced Technology of Plasticity 87(Proc. 2nd ICTP)*, pp. 641~648.
- (7) Nakamachi, E., 1988, "A Finite Element Simulation of the Sheet Metal Forming Process," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 25, pp. 283~292.
- (8) Vogel, J.H. and Lee, D., 1990, "An Analysis Method for Deep Drawing Process Design," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 32, pp. 891~907.
- (9) Yang, D. Y., Chung, W. J. and Shim, H.B., 1990, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Processes with Initial Guess Generation," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 32, pp. 687~708.
- (10) Odell, E.I. and Clausen, W.E., 1977, "Numerical Solution of a Deep Drawing Problem," *J. Engng. Ind., Trans. ASME*, pp. 206~209.
- (11) Tatenami, T., Nakamura, Y. and Saito, K., 1982, "An Analysis of Deep-Drawing Process Combined with Bending," *NUMIFORM 82*, pp. 687~696.
- (12) Wang, N.M. and Tang, S.C., 1988, "Analysis of Bending Effects in Sheet Forming Operations," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 25, pp. 253~267.
- (13) Yang, D.Y., Shim H.B. and Chung, W.J., 1990, "Comparative Investigation of Sheet Metal Forming Processes by the Elastic-Plastic Finite Element Method with Emphasis on the Effect of Bending," *Engng. Computations*, Vol. 7, pp. 274~283.
- (14) Tirosh, J., Yosifon, Y., Eshel, R. and Betser, A.A., 1977, "Hydroforming Process for Uniform wall Thickness Products," *J. of Engineering for Industry, Trans. ASME*, pp. 685~690.
- (15) Noh, T. S. and Yang, D. Y., 1987, "An Analysis of Hydroforming of Regular Polygonal Boxes," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 29, pp. 139~148.
- (16) Yang, D. Y. and Noh, T. S., 1990, "An Analysis of Hydroforming of Longitudinally Curved Boxes with Regular Polygonal Cross-Section," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 32, pp. 877~890.
- (17) Yang, D. Y. and Noh, T. S., 1988, "An Analysis of Axisymmetric Hydrostatic Bulging by the Upper-Bound Method," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 30, pp. 43~49.
- (18) Lee, H. S. and Yang, D. Y., 1991, "An Analysis of Hemispherical Punch Stretching by the Energy Method," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 33, pp. 435~447.
- (19) Lee, C. H., Shim, H. B. and Yang, D. Y., 1988, "Determination of Frictional Coefficient for Sheet Metal Working and its Application to Stretch Forming," *Proc. 6th Int. Congress on Experimental Mech.*, Portland Oregon, pp. 71~76.