

〈論 文〉

압전재료를 이용한 복합적층판의 구조제어에 관한 모델링

황우석* · 황운봉** · 한경섭** · 박현철**

(1992년 6월 23일 접수)

Modeling on Structural Control of a Laminated Composite Plate with Piezoelectric Sensor/Actuators

Woo-Seok Hwang, Woonbong Hwang, Kyung Sup Han and Hyun Chul Park

Key Words : Vibration Control(진동제어), Piezoelectric Material(압전재료), Laminated Composite Plate(복합재료적층판), Finite Element Method(유한요소법), Sensor(감지기), Actuator(작동기)

Abstract

A finite element formulation of vibration control of a laminated plate with piezoelectric sensor/actuators is presented. Classical lamination theory with the induced strain actuation and Hamilton's principle are used to formulate the equations of motion of the system. The total charge developed on the sensor layer is calculated from the direct piezoelectric equation. The equations of motion and the total charge are discretized with 4 node, 12 degrees of freedom quadrilateral plate bending elements with one electrical degree of freedom. The mass and stiffness of the piezoelectric layer are introduced by treating them as another layer in laminated plate. Piezoelectric sensor/actuators are distributed, but discrete due to the geometry of electrodes. By defining an i.d. number of electrode for each element, modelling of electrodes with variable geometry can be achieved. The static response of a piezoelectric bimorph beam to electrical loading and sensor voltage to given displacement are calculated. For a laminated plate under the negative velocity feedback control, the direct time response by the Newmark- β method and damped frequencies and modal damping ratios by modal state space analysis are derived.

기 호 설 명

B : 전기적 변위

D : 비등방성평판의 굽힘강성

E : 전기장벡터

e : 압전상수 행렬

F : 힘벡터

f : 외력

G : 이득

H^x : β_x 에 대한 보간함수

H^y : β_y 에 대한 보간함수

i : 전류

J : Jacobian 행렬

K : 강성행렬

M : 질량행렬

M^A : 단위길이당 작동모멘트

N : w 에 대한 보간함수

*정회원, 포항공과대학 기계공학과 대학원

**정회원, 포항공과대학 기계공학과

- P : 전환행렬
- Q : 단층강성도
- \overline{Q} : 변환 단층강성도
- q : 전하
- R : 관성행렬
- r^e : 절점변위벡터
- T : 운동에너지
- t : 판의 두께
- U : 변형에너지
- u : 변형벡터
- V : 전압
- W : 외력에 의한 일
- w : 횡방향변위
- x : 상대변수벡터
- ε : 변형률벡터
- ε^s : 유전상수행렬
- β_x : x - z 평면 중립면의 수직선의 회전
- β_y : y - z 평면 중립면의 수직선의 회전
- θ_x : x 축에 대한 회전변위
- θ_y : y 축에 대한 회전변위
- κ : 곡률(curvature)행렬
- Ψ_u : 변위에 대한 보간함수
- Ψ_κ : 곡률에 대한 보간함수
- ω : 진동주파수
- Φ : 모드벡터
- η : 모달변위(modal displacement)
- ξ : 감쇠계수

1. 서 론

우주구조물, 항공기 등은 제작비용, 운송비용의 절감을 위하여 경량화가 필수적이다. 또한 이들은 대체적으로 사용된 재료들의 고유감쇠가 작아 감쇠 특성이 나쁘고, 경량화에 의한 유연성의 증가로 인하여 과도한 진동을 유발하여 구조물이 불안정 상태에 이르게 되거나 정밀도가 급격히 감소하기도 한다. 그러므로 과도한 진동이나 변형의 제어가 바람직하다.^(1~3)

구조물은 일반적으로 분포계(distributed system)이므로 분포측정과 제어가 요구된다. 그러나, 제어 기구의 한계에 의해 현재 사용되고 있는 제어계는 대부분 이산계(discrete system)로써 제어 및 관측 spillover 등의 단점이 있다. 또한 이산 감지기/작동기(sensor/actuator)가 진동모드의 정지선(nodal

line)에 위치할 경우 그 모드를 감지/제어할 수가 없다. 여러 모드를 동시에 감지하고 제어하며 spillover 등도 극복할 수 있는 분포 감지기/작동기는 이러한 이산 감지기/제어기의 단점을 극복할 수 있다. 분포된 압전 감지기/작동기를 이용한 능동제어계는 분포된 탄성계의 진동제어에 유용함이 밝혀지고 있다.^(4~10)

최근 복합재료 구조물 설계 및 제작에 대한 기술 향상에 기인하여 항공기나 우주구조물에 복합재료의 사용이 증대되고 있다. 복합재료는 높은 종량비강도, 강성은 물론이고 부수적인 기구없이 구조물의 물성을 제어할 수 있는 장점도 있다.^(11,12) 구조 응답제어에서 강성 및 감쇠 그리고 진동모드제어는 그 제어효과를 극대화시킬 수 있으며 그 결과 얻어진 제어계 및 구조설계는 항공기 및 우주구조물의 성능을 향상시킬 수 있다.

분포된 능동 진동제어계로서 PZT 및 PVDF의 사용은 많은 사람들이 연구해 오고 있다.^(4,5) 판형 압전재료에 대한 탄성모델도 개발되었다.⁽⁶⁾ 압전 능동제어계를 가진 구조물의 응답을 구하기 위하여 해석적 혹은 수치적 모델들이 제시되었다.^(7,8) 그러나 대부분의 연구는 Rayleigh-Ritz 방법⁽⁹⁾을 사용하고 있으며 유한요소해석법이 개발되기는 하였으나 압전재료 자체의 진동에 대한 연구가 대부분이었다.^(13,14) 최근들어 Tzou와 Ha 등^(15~17)의 연구에서 압전재료를 이용한 구조물의 진동제어에 관한 유한요소해석이 시도되었다. 일반적으로 판형 감지기/작동기가 사용되나 앞선 연구에서는 8-절점, 3차원 요소를 사용하였다. 이로 인하여 많은 기억용량과 계산시간을 필요로 하게 되고 판의 특성을 잘 살리지 못하여 이를 극복하기 위하여 Guyan reduction이나 incompatible node 등의 특별한 기법을 도입하였다.

본 논문의 목적은 압전 감지기/작동기를 이용한 복합적층판의 진동제어해석을 위하여 판요소를 사용한 능률적인 유한요소코드 개발에 있다. 운동방정식은 고전 적층판이론과 Hamilton의 법칙을 이용하여 유도하며 압전방정식으로부터 전기적-기계적 연계를 고려한 감지식과 작동식을 구한다. 각 식들은 유한요소 보간함수에 의하여 절점변위에 대한 행렬방정식으로 변환된다. 요소마다 하나의 전기적 자유도를 가진 4-절점 12-자유도 판요소를 사용하여 효율적인 계산을 가능하게 하였다. 압전 감지기/작동기를 도입함에 있어 하나의 전극에 대해

압전 감지기/작동기는 하나의 감지/작동전압을 갖는다. 각 요소에 전극번호를 부가함으로써 다양한 형상의 전극을 쉽게 모델링하였으며 전극의 특성도 충분히 고려하였다. 전기적 하중에 의한 압전보의 변형과 변형에 대한 감지전압에 대한 계산을 수행하여 기존의 연구와 비교함으로써 본 프로그램의 타당성을 확인하였다. 나아가 여러가지 전극형상에 대한 복합재료 평판의 시간영역과 주파수영역에서 응답을 계산하였다.

2. 지배방정식의 유도

2.1 복합적층판의 운동방정식

Fig. 1과 같이 상하면에 감지기와 작동기를 부착한 복합적층판의 운동방정식을 구하기 위하여 Hamilton's principle을 사용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - U + W] dt = 0 \quad (1)$$

여기서 T 는 운동에너지, U 는 변형에너지, W 는 외력에 의한 일이다. 운동에너지와 변형에너지를 구할 때 압전재료층은 전체 시스템에서 다른 물성치를 가진 하나의 층으로 간주한다.

판의 굽힘진동만을 고려할 때 면내 변위는 무시되므로 변형과 변형률은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\beta_x \\ z\beta_y \\ w \end{bmatrix} \quad (2)$$

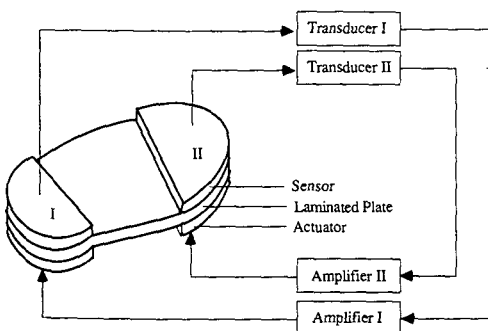


Fig. 1 Configuration of a laminated plate with piezoelectric sensor/actuator

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ z \frac{\partial \beta_y}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \end{bmatrix} = z\kappa \quad (3)$$

여기서 w 는 횡방향 변위 그리고 $\beta_x (= -\partial w / \partial x)$ 와 $\beta_y (= -\partial w / \partial y)$ 는 x - z , y - z 평면에서 변형전 중립면에 수직인 선의 회전을 나타낸다.

운동에너지 T 는 다음과 같이 정의된다.

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}^T \dot{u} dv = \int_A \frac{1}{2} \dot{v}^T R \dot{v} dA \quad (4)$$

여기서 $v = \{w, \beta_x, \beta_y\}^T$ 이며 R 은 관성행렬로서 t 를 판의 두께라고 하면 $\text{diag}\{t, t^3/12, t^3/12\}$ 이다.

복합적층판의 k 번째 층의 변형에너지 U_k 는 다음과 같다.⁽¹⁸⁾

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \{ \epsilon_1 \epsilon_2 \gamma_{12} \} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} dV_k \quad (5)$$

여기서 V_k 는 k 번째 층의 부피이다. 재료주축에 대한 응력과 변형률을 기하적 형상주축에 대한 값들로 변환시키면 식(6)과 같다.

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \epsilon^T \bar{Q} \epsilon dV_k \quad (6)$$

여기서 변환 단층강성도 \bar{Q} 는 단층강성도 Q 와 변환행렬 P 로 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{Q} = P^{-1} Q P \quad (7)$$

식(3)의 변형률을 식(6)에 대입하고 각 층의 변형에너지를 두께방향으로 적분하면 총 변형에너지 U 는 식(8)과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_A \kappa^T D \kappa dA \quad (8)$$

여기서 D 는 비등방성 평판의 휨강성이며 식(9)와 같이 표현된다.

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (9)$$

이다. f 를 외력이라 하면, 외력에 의한 일은 다음과 같다.

$$W = \int_A v^T f dA \quad (10)$$

여기서 G^c 는 전류변환기의 이득(gain)이다.

2.2 압전방정식

탄성장과 전기장을 연계하는 선형관계식은 순방향, 역방향 압전식으로 각각 나타낼 수 있다.⁽¹⁹⁾ 이 식들을 판형재료에 대해 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^s & \epsilon_{12}^s & \epsilon_{13}^s \\ \epsilon_{21}^s & \epsilon_{22}^s & \epsilon_{23}^s \\ \epsilon_{31}^s & \epsilon_{32}^s & \epsilon_{33}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{32} & C_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서 B 는 전기적 변위(전하/면적), E 는 전기장(전압/거리), e 는 압전상수이며 ϵ^s 는 유전상수이다.

2.3 감지식

식(11)의 순방향 압전식을 이용하여 변형률에 의해 판형 압전 감지기에 발생하는 출력전하를 계산한다. 감지기에는 외부 전기장을 가하지 않으므로 감지기에 발생하는 전기적 변위는 가해진 변형률에 비례한다. 감지기의 극화방향을 z 방향이라 하면 감지기상의 한 점에서 전기적 변위는

$$B_z = e_{31}\epsilon_x + e_{32}\epsilon_y + e_{36}\gamma_{xy} \quad (13)$$

이며 감지기에서 발생한 총 전하는 감지기 각 점에서 발생한 전기적 변위의 면적 합이다. 즉,

$$q(t) = \int_x \int_y (e_{31}\epsilon_x + e_{32}\epsilon_y + e_{36}\gamma_{xy}) dx dy \quad (14)$$

압전 감지기는 다음과 같이 속도변형률 감지기로 사용할 수 있다. 감지기 표면에서 발생하는 전류는 전하의 시간변화 값이므로

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (15)$$

이며 감지기 전류는 다음 식에 의해 감지기 전압 V^s 로 변환된다.

$$V^s(t) = G^c i(t) = G^c \frac{dq(t)}{dt} \quad (16)$$

2.4 작동식

압전 작동기에 전기장이 가해졌을 때 작동기에 발생하는 작동 변형률은 식(12)의 역방향 압전식에 의해 구할 수 있다. 작동기에 가해진 응력은 없으므로 작동변형률은 다음의 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon^A = c^{-1} e^T E = dE \quad (17)$$

응력-변형률 관계가 식(18)과 같으므로

$$\sigma = \bar{Q} \epsilon \quad (18)$$

평판에 가해진 단위길이당 등가 작동모멘트, M^A 는, 식(18)을 식(17)에 대입하여 두께방향으로 적분함으로써 다음과 같이 구한다.

$$M^A = \int_t \bar{Q} \epsilon^A z dz \quad (19)$$

전압 V^A 가 두께 t^A 인 작동기에 두께방향으로 가해지면 이에 의한 전기장은

$$E = [0 \ 0 \ V^A/t^A]^T \quad (20)$$

이고, 식(20)을 식(17)과 (19)에 대입하면 M^A 를 V^A 의 함수형태로 구할 수 있다.

$$M^A = L V^A \quad (21)$$

여기서 $L_i = \bar{Q}_i d_{3j} \bar{z}$ (22)

이고 \bar{z} 는 압전 작동기의 중립면의 z 좌표이며 L_i 는 작동기가 작동하는 영역밖에서는 0이다.

3. 유한요소 이산화

3.1 전기적 자유도를 가진 판요소

Fig. 2의 DKQ(discrete kirchhoff quadrilateral) 요소는 discrete Kirchhoff technique을 사용한 4-절점 12-자유도 사각평판요소이다. 절점변위 r^e 은 다음과 같이 정의된다.

$$r^e = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}\}^T \quad (23)$$

여기서 w 는 횡방향 변위이고 $\theta_x (= \partial w / \partial y)$ 와 $\theta_y (= -\partial w / \partial x)$ 는 각각 x 와 y 축에 대한 회전변위이다.

변위벡터 $v = \{w \ \beta_x \ \beta_y\}^T$ 는 유한요소 보간함수에 의해 다음과 같이 표현된다.

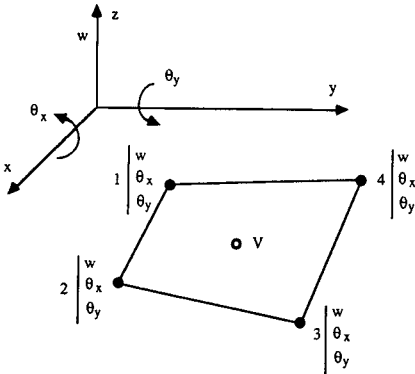


Fig. 2 Plate bending element with electrical degree of freedom

$$\begin{bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(\xi, \eta) \\ H^x(\xi, \eta) \\ H^y(\xi, \eta) \end{bmatrix} r^e \quad (24)$$

여기서 N , H^x 는 H^y 각각 w , β_x 와 β_y 에 대한 보간 함수이다.⁽²¹⁾ 그리고 전기적 자유도 V 가 기계적 변위에 더해진다. 하나의 전극에 대해 전압은 일정하므로 각 요소에 대하여 하나의 전기적 자유도만 가지면 충분하다. 전압은 독립적인 변수로 사용되지만 감지나 작동의 매개변수이므로 기계적 변위의 항으로 표현된다. 판에 부착된 압전재료가 감지기나 작동기로 사용됨에 따라 전기적 자유도는 감지 전압 혹은 작동전압의 역할을 한다.

3.2 운동방정식

2절에서 구한 각 에너지항들을 식(1)에 대입하고 변분을 취한다. 계의 이산화된 운동방정식을 구하기 위해 v 와 κ 를 판요소의 보간함수를 이용하여 절점변위에 대하여 표현하면 다음과 같다.⁽²⁰⁾

$$v = \Psi_u r^e \quad (25)$$

$$\kappa = \Psi_\kappa r^e \quad (26)$$

여기서 Ψ_u 와 Ψ_κ 는 각각 v 와 κ 에 대한 보간함수이다. 식(25-26)을 변분식에 대입하여 정리하여 절점변위에 대해 표현된 행렬 운동방정식을 구하면 식(27)과 같다.

$$(M_s + M_p) \ddot{r} + (K_s + K_p) r = F_{EXT} \quad (27)$$

여기서

$$M_s = \sum_{elem} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_u^T R_s \Psi_u J |d\xi d\eta \quad (28a)$$

$$M_p = \sum_{elem} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_u^T R_p \Psi_u J |d\xi d\eta \quad (28b)$$

$$K_s = \sum_{elem} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_\kappa^T D_s \Psi_\kappa J |d\xi d\eta \quad (28c)$$

$$K_p = \sum_{elem} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_\kappa^T D_p \Psi_\kappa J |d\xi d\eta \quad (28d)$$

$$F_{EXT} = \sum_{elem} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_u^T f J |d\xi d\eta \quad (28e)$$

이고 J 는 Jacobian 행렬이다. 첨자 s 와 p 는 기본 구조물(structure)과 압전재료(piezoelectric material)를 각각 표시한다.

3.3 감지식

j -번째 감지기에 발생하는 총 전하는 식(3)을 식(14)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_j(t) &= \int A_j^s [e_{31}(z\kappa_x) + e_{32}(z\kappa_y) + e_{36}(z\kappa_{xy})] dA \\ &= \bar{z} \int A_j^s \epsilon \kappa dA \end{aligned} \quad (29)$$

그리고 식(26)을 식(29)에 대입하여 절점변위에 대하여 표현할 수 있다.

$$q_j(t) = \Theta_j r \quad (30)$$

$$\text{여기서 } \Theta_j = \sum_{elem} \bar{z} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e \Psi_\kappa J |d\xi d\eta$$

이고 단위행렬은 요소가 j -번째 감지기인 경우 즉 전극번호가 j 인 경우에 한하여 조립(assembly)한다. 이를 이용하여 j -번째 감지기에 발생한 전압 V_j^s 는 다음과 같이 표현된다.

$$V_j^s = G_j^s \Theta_j \dot{r} \quad (31)$$

3.4 작동식

m 개의 작동기에서 발생하는 능동 제어력에 의한 일 W_{CTRL} 은 다음과 같다.

$$W_{CTRL} = \sum_j^m \int A_j^s \kappa M_j^s dA = \sum_j^m \int A_j^s \kappa L dA V_j^s \quad (32)$$

이를 식(1)에 도입하여 변분을 취하면 j -번째 작동기에 의한 제어력은 식(33)과 같다.

$$F_{CTRL_j} = \int A_j^s \Psi_\kappa^T L dA V_j^s = \mathcal{E}_j V_j^s \quad (33)$$

$$\text{여기서 } \mathcal{E}_j = \sum_{elem} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi_\kappa^T L J |d\xi d\eta$$

이고 단위행렬은 요소가 j -번째 작동기인 경우 즉 전극번호가 j 인 경우에 한하여 조립한다. 식(33)의

제어력은 식(27)의 운동방정식의 우변에 더해진다.

4. 응답 계산방법

4.1 시간영역해법

시간영역에서 초기변위나 외력에 대한 계의 응답은 Newmark- β 방법을 사용하여 운동방정식을 직접적분함으로써 구할 수 있다.⁽²¹⁾ 구한 속도를 감지식에 대입하여 감지전압을 구하고 이에 되먹임이득을 곱하여 작동식에 대입한다. 새로운 작동전압에 대한 제어력을 계산하여 이를 운동방정식에 대입하고 시간을 증가시켜 해를 구한다. 이러한 계산을 되풀이하여 원하는 시간까지의 응답을 구한다.

4.2 상태 운동방정식

비감쇠 자유진동에 대한 응답은 다음의 고유치 문제를 풀어 구할 수 있다.

$$[-\omega^2(M_s + M_p) + (K_s + K_p)]\{\phi\} = 0 \quad (34)$$

여기서 ω 는 자유진동의 주파수이며 $\{\phi\}$ 는 모드벡터이다. 모드벡터의 직교성을 이용하여 다음과 같은 모달변위(modal displacement)를 도입한다.

$$r = \Phi \eta \quad (35)$$

여기서 Φ 는 모달행렬(modal matrix)이다. 모달 상태변수(modal state variable)를 $x = \text{col} \{\eta \ \dot{\eta}\}$ 이라 두면 제어를 고려한 모달상태 운동방정식(modal state space equation)은 다음과 같다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (36)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -[\omega^2] & -C_{MOD} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Phi^T \mathcal{E}_1 & \Phi^T \mathcal{E}_2 & \dots & \Phi^T \mathcal{E}_m \end{bmatrix},$$

$$u = [V_1^A V_2^A \dots V_m^A]^T$$

이며 m 은 감지기/작동기의 개수이다. 모달구조 감쇠행렬(modal structural damping matrix) C_{MOD} 은 Adams 등이 제안한 비감쇠용량(specific damping capacity)⁽²²⁾ 개념을 도입하여 구하였다. 모달상태 공간(modal state space)에서의 감지식은 식(37)과 같다.

$$y = Cx \quad (37)$$

여기서

$$y = [V_1^s V_2^s \dots V_m^s]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ (G_1^c \Theta_1 \Phi)^T & (G_2^c \Theta_2 \Phi)^T & \dots & (G_m^c \Theta_m \Phi)^T \end{bmatrix}$$

선형 되먹임제어법칙(feedback control law)은 다음과 같다.

$$u = -Gy = GCx \quad (38)$$

$$G = \text{diag}\{G_1 G_2 \dots G_m\} \quad (39)$$

여기서 되먹임행렬 G 의 요소들은 일정한 값을 가지므로 일정이득제어이며, 감지 전압이 속도정보를 가지므로 식(38)에 의하여 반속도되먹임제어(negative velocity feedback control)가 가능하다.

4.3 주파수영역해법

식(38)의 되먹임제어법칙을 식(36)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ &= Ax + BGCx \\ &= (A + BGC)x \end{aligned} \quad (40)$$

식(40)은 다음과 같은 전형적인 고유치 문제이다.

$$[\lambda I - (A + BGC)]\{\phi\} = 0 \quad (41)$$

식(41)의 고유치는

$$\lambda = \sigma + i\omega_d \quad (42)$$

이며, 이로부터 계의 동적응답과 안정성을 나타내는 두 계수를 구할 수 있다. 즉 식(43)에서와 같이 허수부로부터 감쇠 고유진동수를 구하고, 실수부로부터 감쇠계수를 구할 수 있다.

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} \quad \zeta = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}} \quad (43)$$

5. 예 제

두 가지 경우의 문제에 대하여 분포감지와 작동에 대한 예제를 들었다. 첫번째 경우는 극성이 반대인 두 층의 PVDF판이 부착된 압전보이고, 두번째 경우는 적층자이 $[\pm \theta/0_2]_s$ 인 복합재료 적층판의 상하면에 압전 감지기/작동기가 부착된 경우이다.

5.1 압전외팔보의 정적문제^(15,16)

Fig. 3과 같이 극성이 반대인 두 층의 PVDF판이 부착된 압전외팔보를 5개의 보요소로 모델링하였다. 각 요소는 20×5×1 mm이며 PVDF의 물성은 Table 1에 있다.

외부전압이 가해지면 압전재료의 변형이 발생하고 이에 의한 제어력이 보를 굽힌다. 단위전압(1 Volt)이 두께방향으로 가해졌을 때 보의 처짐을 계산하여 Fig. 4에 나타내었다. 또한 작동전압을 0부터 200 볼트로 증가시키면서 보의 처짐을 Fig. 5와 같이 구하였다. 구한 처짐은 Tseng⁽¹⁵⁾의 결과와 비교하였으며 Fig. 4, 5에서와 같이 잘 일치한다. Table 2에서는 Tseng의 계산에 사용된 총 자유도와 본 논문에서의 총 자유도를 비교하였다. 그 결과 본 논문의 방법이 많은 기억용량과 계산시간을 줄일 수 있음을 알 수 있다.

그 다음 압전보의 변형을 감지하는 계산을 수행하였다. 압전보가 변형을 감지기로 사용되면 j -번

째 감지기에서 발생하는 전압 V_j^s 는 다음과 같다.

$$V_j^s = \frac{q_j}{C} \tag{44}$$

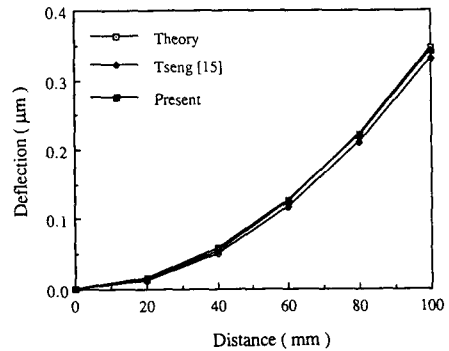


Fig. 4 Deflection of the piezoelectric PVDF bimorph beam (Input voltage=1 Volt.)

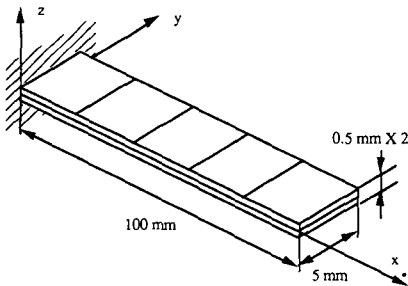


Fig. 3 A piezoelectric polymeric PVDF bimorph beam

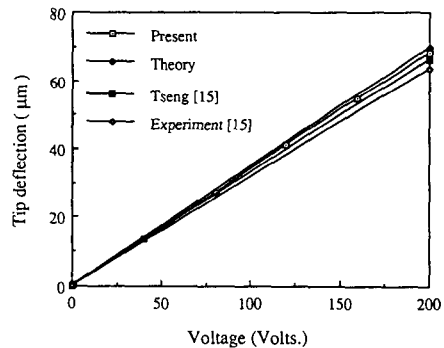


Fig. 5 Tip deflection of the piezoelectric PVDF bimorph beam vs. input voltage

Table 1 Material properties of composite materials and piezoelectric materials

Graphite/Epoxy			PZT			PVDF		
E_1	98.E9	N/m ²	s_{11}	16.4E-12	m ² /N	E_1	2.0E9	N/m ²
E_2	7.9E9	N/m ²	s_{12}	-5.7E-12	m ² /N	E_2	2.0E9	N/m ²
G_{12}	5.6E9	N/m ²	s_{33}	18.8E-12	m ² /N	G_{12}	7.75E8	N/m ²
t	0.125E-3	m	s_{55}	47.5E-12	m ² /N	t	0.5E-3	m
ν_{12}	0.28		d_{31}	-171E-12	C/N	ν	0.29	
ρ	1520	kg/m ³	d_{33}	374E-12	C/N	ρ	1800	kg/m ³
ϕ_1	0.0045		d_{15}	584E-12	C/N	d_{31}	2.2E-11	C/N
ϕ_2	0.0420		$\epsilon_{11}/\epsilon_0^a$	1730		ϵ_{11}	1.062E-10	F/m
ϕ_{12}	0.0706		ϵ_{33}/ϵ_0	1700		ϵ_{33}	1.062E-10	F/m
			ρ	7700	kg/m ³	ϵ_{33}	1.062E-10	F/m

$a : \epsilon_0$ is the permittivity of free space ($\epsilon_0 = 1 / (36\pi \cdot 10^9) \text{ Fm}^{-1}$)

Table 2 Comparison of problem size and computation time

Method	Node No.	No. of D.O.F.			n ³ /3 ^a
		Structure	Electric	Total	
Tseng ⁽¹⁵⁾	36	108	36	144	419904
Present	12	36	5	41	15552
Ratio (%) ^b	33.3	33.3	13.9	28.5	3.7

a : computation time is dependent on the operation number n³/3 when a linear matrix equation of order n is solved by LU method

b : Ratio = (Quantity in Present low) / (Quantity in Tseng low)

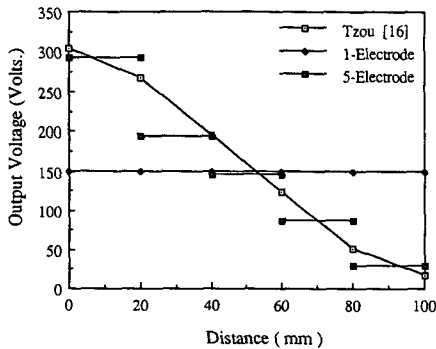


Fig. 6 Sensor voltage distribution for the bending deflection

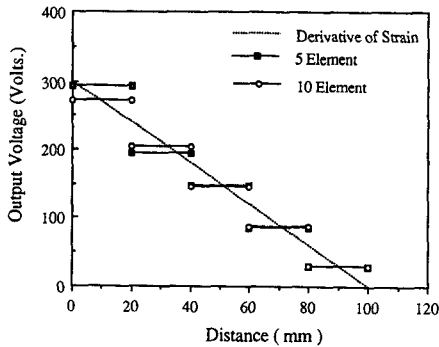


Fig. 7 Convergence of sensor voltage distribution for the bending deflection

여기서 $C = \epsilon_0 S / t^3$, ϵ_0 는 절대유전률, S 는 전극의 면적, 그리고 t^3 는 감지기의 두께이다. 감지전압은 식(30)의 총 전하를 각 감지기의 C 로 나누어 구할 수 있다.

끝단 변위를 1 cm 발생시키도록 외력을 가하고 이 때 보에서 발생하는 전압을 계산하였다. Tzou

와 Tseng⁽¹⁶⁾은 전극면적의 유한성을 고려하지 않아 보의 길이방향으로 분포된 감지전압을 구하였으나 실제로 그러한 전극은 존재하지 않는다. 본 논문에서는 2가지의 전극모델을 사용하였다. 전체 보가 하나의 전극을 갖는 경우와 각 유한요소가 한 전극을 갖는 경우, 즉 보의 길이방향으로 같은 크기의 5개의 전극을 갖는 경우에 대하여 각각 감지전압을 구하여 Tzou and Tseng⁽¹⁶⁾의 결과와 Fig. 6에서 비교하였다. 보의 굽힘으로 인하여 발생하는 감지전압은 굽힘 변형률의 미분값, 즉 횡방향변위의 이차미분값에 비례한다.⁽¹⁰⁾ Fig. 7에서 외팔보의 이론적 횡방향변위의 이차미분값과 감지전압을 비교하였다. 동일한 5개의 감지전극에 대하여 5개 요소 (5×1) 또는 10개 요소 (10×1)를 사용하여 계산하였다. 감지전압을 비교해 본 결과 후자가 더 정확한 것을 알 수 있으며 이는 유한요소법에서 더 조밀한 요소를 사용하면 더 정확한 결과를 얻는 일반적인 수렴성에 기인한다. 즉, 변화가 심한 고정단 부근의 변형과 변형률을 더욱 정확히 구할 수 있기 때문이다. 본 논문에 사용된 판요소는 굽힘에 의한 변형률의 연속성을 보장하므로 변위의 연속성만 보장하는 3차원 요소보다 감지의 정확도가 높을 것으로 판단된다.

5.2 복합적층판의 진동제어

적층각이 $[\pm \theta / 0_2]$ 인 복합적층판에 Fig. 8과 같이 감지기/작동기가 부착되어 있다. 판의 한변만 고정되고 나머지 세변은 자유단이며 감지기는 판의 윗면 전체에, 작동기는 아랫면 전체에 부착되었다. 감지기/작동기의 전극은 임의로 분할할 수 있으나 감지기와 작동기가 똑같은 형상이어야 한다. Graphite/Epoxy 단층판(Hercules AS1/3501-6)과

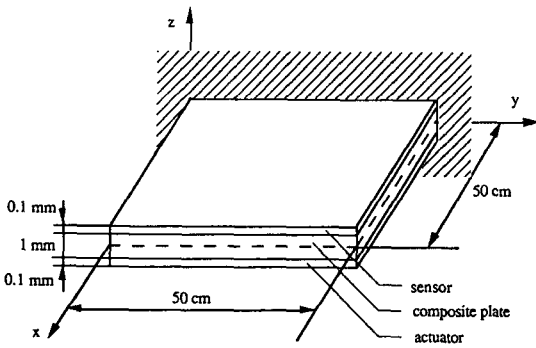


Fig. 8 A laminated plate with piezoelectric sensor/actuator

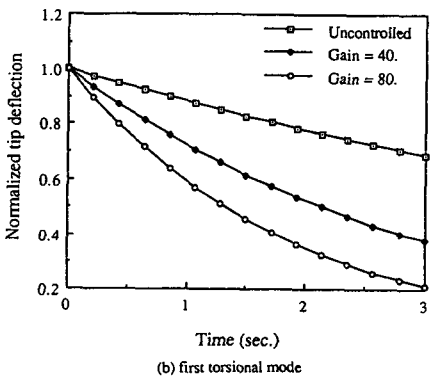
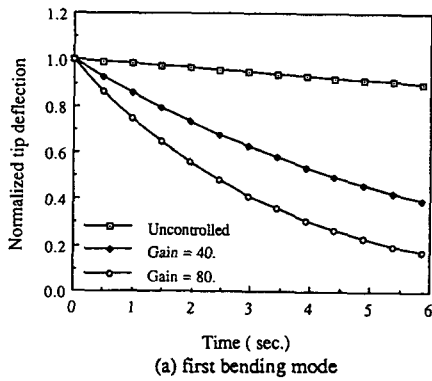


Fig. 9 Decay envelopes for bending and torsional test when $\theta = 90^\circ$

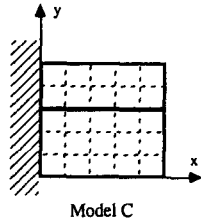
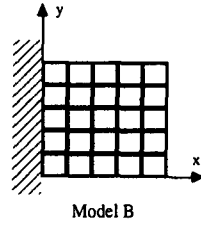
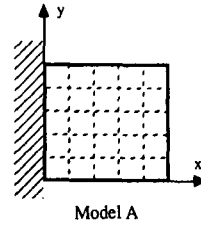


Fig. 10 Models with one sensor/actuator pair(model A), 25 pairs(model B) and two pairs (model C)

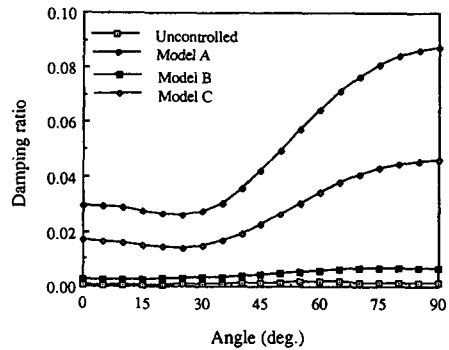


Fig. 11 Damping ratio vs. layer angle θ for the first bending mode

PZT(Clevite Corp.)의 물성은 Table 1에 있다. 판의 모델링에 25요소(5×5)가 사용되었으며 모달공간해석을 위해 6개의 모드가 사용되었고 GG^c 는 $1/z$ 로 단위화(normalization)하였다.

먼저 25개의 감지기/작동기를 가진, 즉 각 요소마다 각각의 전극을 가진 보에 대한 시간영역해석

을 수행하였다. $\theta = 90^\circ$ 의 경우에 대하여 0.00025초의 시간간격으로 직접적분을 하여 0, 40과 80의 되먹임이득(feedback gain)에 대하여 해를 구하였다. Fig. 9는 굽힘과 비틀림에 대한 초기변위에 대한 변위-시간선도인데 되먹임이득이 증가함에 따라 초기변위가 빨리 소멸함을 알 수 있다. 그리고 비

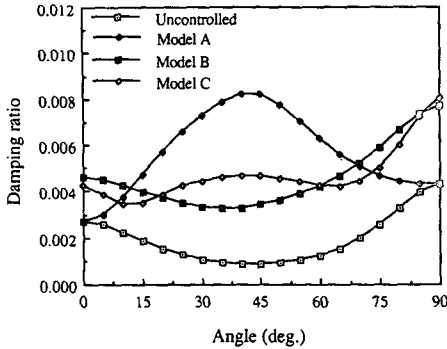


Fig. 12 Damping ratio vs. layer angle θ for the first torsional mode

틀림변위가 굽힘변위에 비하여 빨리 소멸하였다.

다음으로 주파수영역해석에서 감쇠진동수와 감쇠계수를 구하였다. 감지기/작동기 전극 분할의 영향을 보기 위하여 Fig. 10에서와 같이 하나의 전극을 가진 모델 A, 25개의 전극을 가진 모델 B 그리고 두 개의 전극을 가진 모델 C에 대한 계산을 수행하였다.

θ 를 변화시키며 되먹임이득은 20인 경우에 대하여 감쇠진동수와 감쇠계수를 Fig. 11, 12에 나타내었다. 굽힘모드에 있어서는 어떤 적층각에 대해서도 모든 모델은 증가된 감쇠계수를 갖는다. 특히 모델 A에서 $\theta=90^\circ$ 의 경우 최대증가를 보인다. 비틀림모드의 경우 모델 A는 $\theta=45^\circ$ 에서, 모델 B는 90° 에서 최대 감쇠계수를 보인다. 모델 B의 경우 적층각에 관계없이 고른 감쇠증가를 보이나 모델 A의 $\theta=0, 90^\circ$ 에서 비틀림 모드에 대하여 감쇠증가가 없다. 이것은 분포된 압전 감지기가 대칭변형을 감지할 수 없는 특성때문이다. 이를 극복하기 위한 하나의 방법은 모델 A가 비대칭 비틀림모드를 갖도록 $\theta=45^\circ$ 와 같은 경사진 적층각을 갖는 것이다. 25개의 감지기/작동기를 갖는 모델 B는 $\theta=0^\circ$ 와 90° 에서 비틀림모드에 대한 최대의 감쇠를 보인다. 그러나 하나의 감지기/작동기는 하나의 되먹임장치를 필요로 하므로 가능하면 그 수를 줄이는 것이 좋다. 하나의 전극은 좋은 감쇠성능을 보이나 $\theta=0^\circ$ 와 90° 에서 감쇠성능을 개선할 수 없으므로 2개의 전극을 가진 모델 C를 제안하였다. Fig. 11, 12에서 모델 C는 모델 A와 유사한 감쇠특성을 보이며 $\theta=0^\circ$ 와 90° 에서 모델 A의 단점을 극복하였다. 즉, 모델 C는 모델 A와 B의 장점을 가진 혼합형이다.

6. 결론

압전재료를 가진 복합재료 적층판의 전기적, 기계적 연계응답을 해석하기 위한 판요소는 기존 연구에 비해 많은 기억용량과 계산시간을 줄인다. 그리고 각 요소마다 부가한 전기적 자유도는 전극을 효율적으로 모델링할 수 있었다.

능동진동제어계를 설계함에 있어 감지기/작동기의 총 면적은 같더라도 수와 크기는 반드시 고려되어야한다. 즉 임의의 적층각에 대하여 감지기/작동기를 잘 설계함으로써 높은 능동제어효과를 얻을 수 있다. 또한 동일한 능동제어계에 대하여 적층각을 바꿈으로써 감쇠계수를 높일 수 있다.

이와같이 능동제어와 수동제어는 서로 영향을 미치며 제어-구조 연계해석에서 이들을 동시에 고려하여야 한다. 본 논문에서 개발된 유한요소 코드는 감지기/작동기의 설계와 구조적 변화를 쉽게 반영할 수 있는 효율적인 방법을 제공하여 준다.

참고문헌

- (1) Atluri, S.N. and Amos, A.K., 1988, Large Space Structures: Dynamics and Control, SpringerVerlag, Berlin, Heidelberg.
- (2) Wada, B.K., Fanson, J.L. and Crawley, E.F., 1989, "Adaptive Structures," Adaptive Structures, edited by B.K. Wada, American Society of Mechanical Engineers, pp. 1-8.
- (3) Rogers, C.A., 1990, "Intelligent Material Systems and Structures," U.S. -Japan Workshop on Smart/Intelligent Materials and Systems, Technomic Publishing Co., pp. 11-33.
- (4) Bailey, T. and Hubbard, J.E., Jr., 1985, "Distributed Piezoelectric Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam," Journal of Guidance and Control, Vol. 8, No. 5, pp. 606-610.
- (5) Crawley, E.F. and de Luis, J., 1987, "Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures," AIAA Journal, Vol.25, No. 10, pp. 1373-1385.
- (6) Wang, B.T. and Rogers, C.A., 1991, "Modeling of Finite-Length Spatially-Distributed Induced Strain Actuators for Laminate Beams and

- Plates," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 2, pp. 38~58.
- (7) Crawley, E.F. and Lazarus, K.B., "Induced Strain Actuation of Isotropic and Anisotropic Plates," *AIAA Journal*, Vol. 29, pp. 944~951.
- (8) Wang, B.T. and Rogers, C.A., "Laminate Plate Theory for Spatially Distributed Induced Strain Actuators," *Journal of Composite Materials*, Vol.25, pp. 433~452.
- (9) Im, S. and Atluri, S.N., 1989, "Effects of a Piezo-Actuator on a Finitely Deformed Beam Subject to General Loading," *AIAA Journal*, Vol.27, pp. 1801~1807.
- (10) Lee, C.-K., O'Sullivan, T.C. and Chiang, W.-W., 1991, "Piezoelectric Strain Sensor and Actuator Designs for Active Vibration Control," *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS 32nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA, New York, AIAA Paper No. 91-1064-CP.
- (11) Schmit, L.A. and Farshi, B., 1973, "Optimum Laminate Design for Strength and Stiffness," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, pp. 519~536.
- (12) Haftka, R.T., Gurdal, G. and Kamat, M.P., 1990, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- (13) Allik, H. and Hughes, T.J.R., 1970, "Finite Element Method for Piezoelectric Vibration," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.2, pp. 151~157.
- (14) Naillon, M., Coursant, R. and Besnier, F., 1983, "Analysis of Piezoelectric Structure by a Finite Element Method," *Acta Electronica*, Vol. 25, No. 4, pp. 341~362.
- (15) Tseng, C.-L., 1989, *Electromechanical Dynamics of a Coupled Piezoelectric/Mechanical System Applied to Vibration Control and Distributed Sensing*, Ph.D. Thesis, University of Kentucky.
- (16) Tzou, H.S. and Tseng, C.-I., 1991, "Distributed Vibration Control and Identification of Coupled Elastic/Piezoelectric Systems: Finite Element Formulation and Application," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.5, No.3, pp. 215~231.
- (17) Ha, S.K., Keilers, C. and Chang, F.K., 1992, "Finite Element Analysis of Composite Structures Containing Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators," *AIAA Journal*, Vol.30, No. 3, pp. 772~780.
- (18) Jones, R.M., 1975, *Mechanics of Composite Materials*, Scripta Book Company, Washington D.C.
- (19) Parton, V.Z. and Kudryavtsev, B.A., 1988, *Electromagnetoelasticity Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam.
- (20) Batoz, J.-L. and Tahar, M.B., 1982, "Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 1655~1677.
- (21) D'Souza, A.F. and Garg, V.K., 1984, *Advanced Dynamics*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N.J.
- (22) Lin, D.X., Ni, R.G. and Adams, R.D., 1984, "Prediction and Measurement of the Vibrational Damping Parameters of Carbon and Glass Fiber-Reinforced Plastic Plates," *Journal of Composite Materials*, Vol. 18, pp. 132~152.