

(論 文)

곡률 보요소에 의한 Timoshenko 보의 고유치 문제 해석

양승용* · 이재관* · 김식연** · 신호철***

(1993년 2월 12일 접수)

The Analysis of Eigenvalue Problems of Timoshenko Beams Using Curvature-based Beam Elements

Seung-Yong Yang, Jae-Kwan Lee, Sik-Yun Kim and Hyo-Chol Sin

Key Words : Curvature-based Beam Element(곡률 기저 보요소), Displacement-based Beam Element(변위기저 보요소), Shear Locking(전단 강성 과잉)

Abstract

In the vibration analysis of Timoshenko beams by the finite element method, it is necessary to use a large number of elements or higher-order elements in modeling thin beams. This is because the overestimated stiffness matrix due to the shear locking phenomenon when lower-order displacement-based elements are used yields poor eigensolutions. As a result, the total number of degrees of freedom becomes critical in view of computational efficiency. In this paper, the curvature-based formulation is applied to the vibration problem. It is shown that the curvature-based beam elements are free of shear locking and very efficient in the vibration analysis.

기 호 설 명

u : x방향 변위
 w : y방향 변위
 ψ : z방향 회전각
 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}$: 변형률
 τ_{xx}, τ_{xy} : 응력
 k : 전단응력 보정계수
 m, p : 단위길이당 작용하는 외력
 κ : 곡률
 \mathbf{k} : 곡률 벡터
 H_k : 곡률보간 벡터
 α : $\frac{EI}{GAk}$
 M : 모멘트
 V_s : 전단력

C_ψ, C_w : 적분상수
 U : 변위벡터
 V : $\{k C_\psi C_w\}^T$
 P : V 와 U 사이의 변환행렬
 C_ψ, C_w : P^{-1} 중의 C_ψ, C_w 와 관련된 행벡터

1. 서 론

보, 평판 또는 구각과 같은 구조요소를 사용하여 구조물을 해석하면 일반적인 2차 혹은 3차원 연속체요소를 사용하는 경우보다 경제적으로 해석을 수행할 수 있고 구조물이 대형화되면 그 장점은 더욱 커진다. 그러나 구조물이 얇아질 경우 강성과잉현상이 초래되어 해석이 곤란해지는 데 이는 강성행렬의 구성과정에 가성 변형률 에너지가 도입되어 강성이 과도하게 계산된 결과라고 볼 수 있다.

보의 경우 얇은 보에 대해 저차의 요소가 사용되

*서울대학교 기계설계학과 대학원

**기아자동차

***정회원, 서울대학교 기계설계학과

면 강성과잉현상^(1,2)이 초래되어 강성행렬의 상태가 좋지않게 되고 정적해석과 보의 진동문제를 해석함에 따른 고유치 문제를 풀 때 부정확한 결과를 얻게된다. 따라서 이런 문제를 해결하기 위하여 요소당 절점수를 늘린 고차의 요소를 사용하거나 요소의 수를 증가시켜 얇은 보를 두꺼운 보로 해석할 수 있도록 하는데 어느 경우에도 절점당 자유도를 증가시키게 되어 수치적 효율성을 저하시키게된다. 이러한 문제점의 근본 원인인 강성과잉현상을 해결하기 위하여 여러 연구가 있었으나 주로 정적문제 해석이 주로 다루어졌으며, 강성과잉현상의 동특성에 대한 영향을 고려한 논문이 국내에서 기계학회 논문집에 발표된 바 있다.⁽³⁾

한편, 전단효과와 회전관성을 고려한 Timoshenko보의 동특성 해석을 위한 요소도 꾸준히 개발되어 왔으며,⁽⁴⁻⁶⁾ 이 중에서도 특히 Dawe⁽⁶⁾의 6개의 자유도를 갖는 3절점 보 요소는 4차 모드까지 고유진동수를 정확하게 구하고 있다. 이 요소들은 횡변위와 회전각을 먼저 다항식으로 가정하고, 보의 정적 평형방정식을 만족시키는 다항식 계수들 간의 관계로부터 다항식의 차수와 보 요소의 절점 및 자유도 수를 결정하며, 정식화 과정은 전통적 방법을 따르고 있다.

본 논문에서는 주변수인 변위를 보간시킨 다음 다른 미지수들은 변위를 미분함으로써 얻었던 기존의 방법과 반대로 변위의 2계 미분계수인 곡률을 주변수로 보간하여 정식화하였고, 나머지 변수들은 이를 적분하여 얻었으며, 이 방법은 기존의 방법으로 구한 결과와의 비교를 통하여 진동해석이 보다 효율적으로 수행될 수 있음을 보였다.

2. Timoshenko보의 지배방정식⁽⁹⁾

전단효과와 회전관성을 고려한 Timoshenko보에 있어서 축방향의 하중을 받지않을 경우, Fig. 1의 보에 대한 x방향 성분 u, y방향 성분 w를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= u_1(x, y, z, t) = -y \cdot \psi(x, t) \\ w &= u_2(x, y, z, t) = w(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

따라서 변형률 성분은 다음과 같고

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -y \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \epsilon_{xy} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \end{aligned} \quad (2)$$

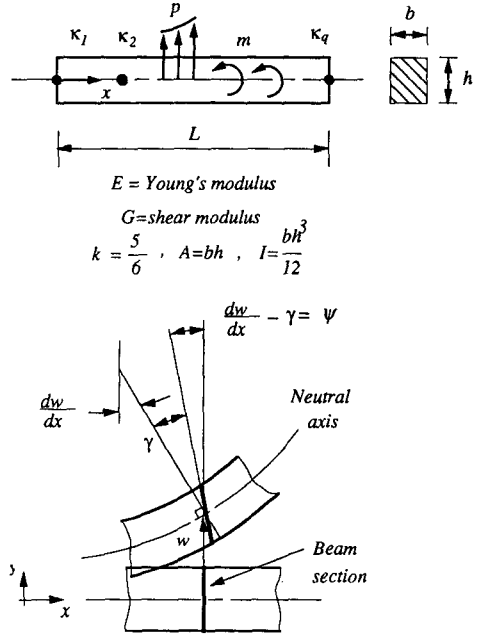


Fig. 1 Nodal curvatures and deformation of cross-section in a straight Timoshenko beam

이에 상응하는 응력성분들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= E\epsilon_{xx} \\ \tau_{xy} &= G\epsilon_{xy} \end{aligned} \quad (3)$$

한편, 보의 운동에너지는 아래와 같고

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^L \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^L \rho \left[z^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho I \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (4)$$

보의 총 포텐셜은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi = U + V &= \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{kGA}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)^2 - m\psi - pw \right] dx \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 k는 전단응력 보정계수이다.

식(4)와 (5)을 이용하여 Hamilton 정리를 적용한다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \left[\rho I \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \Big] - \frac{EI}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \frac{kGA}{2} \\
 & \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)^2 + m\psi + pw \Big\} dx dt = 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

곡률에 기초하여 이산화할 목적으로 식(6)의 첫
째항 및 둘째항만 t 에 대해서 부분 적분을 취한다.

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (\rho I \dot{\psi}) \delta \psi - \frac{\partial}{\partial t} (\rho A \dot{w}) \delta w \right. \\
 & - EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \\
 & + m \delta \psi + p \delta w \Big\} dx dt + \int_0^L \rho I \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \psi \Big|_{t_1}^{t_2} dx \\
 & + \int_0^L \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} dx = 0 \quad (7)
 \end{aligned}$$

상수계수를 가정하면, 식(7)이 시간구간에서 항상
성립되기 위해서 다음 조건을 만족해야한다.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \left\{ \rho I \dot{\psi} \delta \psi + \rho A \dot{w} \delta w + EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right. \\
 & + kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \Big\} dx \\
 & = \int_0^L [m \delta \psi + p \delta w] dx \quad (8)
 \end{aligned}$$

3. 곡률 보 유한요소의 정식화

식(8)이 곡률을 주변수로 이산화되어 적절한 행
렬식이 되기 위해서는 각 항의 변분량이 곡률로 표
시되어야 하며 다음과 같이 표현된다. 단, 본 절에
서는 공간좌표 상에서 x 만의 함수인 변수들에 대
하여 x 에 관한 미분을 전미분으로 나타내기로 한
다.

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \frac{d\psi}{dx} = \mathbf{H}_\kappa \mathbf{k} \\
 \psi &= \int \kappa dx = \int \kappa (\det J) dr = (\det J) \mathbf{H}_\psi \mathbf{k} + C_\psi \quad (9)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_\kappa &= \{h_1 h_2 \dots h_q\}; \quad \mathbf{k} = \{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_q\}^T; \\
 \mathbf{H}_\psi &= \left\{ \int^r h_1 dr \int^r h_2 dr \dots \int^r h_q dr \right\}
 \end{aligned}$$

윗 식에서 q 는 보요소의 절점수를 나타내고, r 은
Fig. 2(a)에 예시된 바와 같이 보요소의 국부좌표
계의 매개변수를 의미한다. 한편 보의 단면에 작용

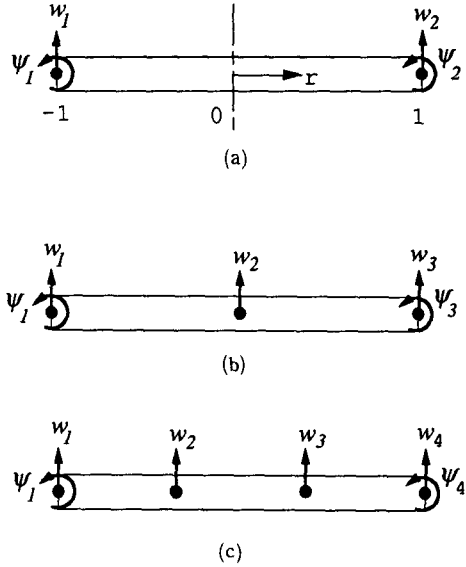


Fig. 2 Nodal displacements in the elements used

하는 모멘트와 전단력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 M &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xx} y b dy = EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
 V_s &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} b dy = kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \quad (10)
 \end{aligned}$$

위의 모멘트와 전단력은 정적하중 상태하에서 다음
의 평형방정식을 만족한다.

$$\frac{dM}{dx} + V_s = 0 \quad (11)$$

모멘트-곡률 및 전단력-전단변형을 관계식들을 이
평형방정식에 대입하여 전단변형을 구하면 아래
와 같다.

$$\frac{dw}{dx} - \psi = - \frac{EI}{GAk} \frac{d\kappa}{dx} = - \alpha \mathbf{B} \mathbf{k} \quad (12)$$

여기서,

4절점 보 요소의 경우 :

$$\alpha = \frac{EI}{GAk}$$

$$\mathbf{B} = (\det J)^{-1} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial r} \frac{\partial h_2}{\partial r} \dots \frac{\partial h_q}{\partial r} \right\}$$

식(12)로부터,

$$w = \int \left[\psi - \alpha \frac{dk}{dx} \right] dx + C_w \quad (13)$$

을 얻고, 식(9)의 ψ 를 대입하면,

$$w = \left[(\det J)^2 \mathbf{H}_w - \alpha \mathbf{H}_k \right] \mathbf{h} + (\det J) C_{\psi r} + C_w \quad (14)$$

여기서,

$$\mathbf{H}_w = \left\{ \iint^r h_1 dr \iint^r h_2 dr \cdots \iint^r h_n dr \right\}$$

위의 식(14)와 (9)에 나타나는 적분상수 C_w 및 C_{ψ} 는 절점의 w 및 ψ 값에 의해 결정된다. 이를 위하여 먼저 절점의 w 와 ψ 를 곡률과 적분상수로 표시한다. 이 관계식을 $\mathbf{U} = \mathbf{P}\mathbf{V}$ 형태로 표기하면 Fig. 2의 보 요소들에 대한 $\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{V}$ 는 다음과 같다.

2절점 보 요소의 경우 :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{120} - \alpha & \frac{69L^2}{640} & \frac{3L^2}{320} & -\frac{L^2}{1920} & -\frac{L}{2} & 1 \\ -\frac{15L}{128} & -\frac{51L}{128} & \frac{3L}{128} & -\frac{L}{128} & 1 & 0 \\ -\frac{41L^2}{51840} & \frac{11L^2}{1080} - \alpha & \frac{89L^2}{17280} & -\frac{17L^2}{2590} & -\frac{L}{6} & 1 \\ -\frac{17L^2}{25920} & \frac{89L^2}{17280} & \frac{11L^2}{1080} - \alpha & -\frac{41L^2}{51840} & \frac{L}{6} & 1 \\ -\frac{L^2}{1920} & \frac{3L^2}{320} & \frac{69L^2}{640} & \frac{L^2}{120} - \alpha & \frac{L}{2} & 1 \\ \frac{L}{128} & -\frac{3L}{128} & \frac{51L}{128} & \frac{15L}{128} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \kappa_4 \\ C_{\psi} \\ C_w \end{Bmatrix} \quad (15c)$$

이들 관계식으로부터 $\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}$ 가 되어 \mathbf{V} 벡터 중의 절점 곡률들로 이루어진 \mathbf{k} 벡터와 적분상수 C_{ψ} 와 C_w 를 각각 절점에서의 w 와 ψ 로 구성된 \mathbf{U} 벡터로 나타낼 수 있다.

$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}$, 즉,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{k} \\ C_{\psi} \\ C_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ C_{\psi} \\ C_w \end{Bmatrix} \mathbf{U} \quad (16)$$

로부터 다음의 관계식들을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{T}\mathbf{U} \\ C_{\psi} &= C_{\psi}\mathbf{U} \\ C_w &= C_w\mathbf{U} \end{aligned} \quad (17)$$

식(17)을 이용하여 변환된 곡률의 미분계수, 곡률,

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{12} - \alpha & \frac{L^2}{24} & -\frac{L}{2} & 1 \\ -\frac{3L}{8} & -\frac{L}{8} & 1 & 0 \\ \frac{L^2}{24} & \frac{L^2}{12} - \alpha & \frac{L}{2} & 1 \\ \frac{L}{8} & \frac{3L}{8} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ C_{\psi} \\ C_w \end{Bmatrix} \quad (15a)$$

3절점 보 요소의 경우 :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{32} - \alpha & \frac{5L^2}{48} & -\frac{L^2}{96} & -\frac{L}{2} & 1 \\ -\frac{5L}{24} & -\frac{L}{3} & -\frac{L}{24} & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{L^2}{96} & \frac{5L^2}{48} & \frac{L^2}{32} - \alpha & \frac{L}{2} & 1 \\ -\frac{L}{24} & \frac{L}{3} & \frac{5L}{24} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ C_{\psi} \\ C_w \end{Bmatrix} \quad (15b)$$

회전각 및 변위에 대한 보간행렬은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dx} &= \mathbf{S}_B \mathbf{U}; \quad \mathbf{S}_B = \mathbf{B}\mathbf{T} \\ \kappa &= \mathbf{S}_k \mathbf{U}; \quad \mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{T} \\ \psi &= \mathbf{S}_{\psi} \mathbf{U}; \quad \mathbf{S}_{\psi} = (\det J) \mathbf{H}_{\psi} \mathbf{T} + C_{\psi} \\ w &= \mathbf{S}_w \mathbf{U}; \quad \mathbf{S}_w = [(\det J)^2 \mathbf{H}_w - \alpha \mathbf{H}_k] \mathbf{T} \\ &\quad + (\det J) C_{\psi r} + C_w \end{aligned} \quad (18)$$

위의 관계를 이용하여 요소의 질량행렬, 강성행렬 및 하중벡터를 구하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \int_{-1}^1 (\rho I S_{\psi}^T S_{\psi} + \rho A S_w^T S_w) (\det J) dr \\ \mathbf{K}^e &= \int_{-1}^1 (E I S_k^T S_k + \alpha E I S_B^T S_B) (\det J) dr \end{aligned}$$

$$R^e = \int_{-1}^1 (S_{wb}^T + S_{\psi m}^T) (detJ) dr \quad (19)$$

$$K = \sum_i K_i^e$$

$$R = \sum_i R_i^e \quad (20)$$

따라서 식 (8)은 다음과 같은 행렬식으로 표현된다.

$$M\dot{U} + KU = R \quad (20)$$

4. 해석 결과 및 고찰

여기서,

$$M = \sum_i M_i^e$$

양단이 단순지지된 Timoshenko보의 길이가 20 in, 폭이 1 in로 일정하고, 두께가 2 in, 1 in, 0.1 in,

Table 1 Material properties and dimensions of the models

Model	Material property			Geometry				
	Young's modulus (psi)	Poisson's ratio	Density	Length (in)	Depth (in)	Width (in)	Area moment of inertia	Shear correction factor
1	30000000	0.3	0.28	20	2	1	0.6666	5/6
2					1	1	0.0833	
3					0.1	1	8.333×10^{-5}	
4					0.01	1	8.333×10^{-8}	

Table 2 The first and fifth natural frequencies of model 1 as a function of the number of elements (exact first frequency = 145.033 rad/sec, fifth frequency = 2768.78 rad/sec)

No. of elements	ADINA beam element	2 node curvature-based	3 node curvature-based	4 node curvature-based
1	163.03	162.986	145.159	145.110
	—	—	—	—
2	145.78	145.936	145.116	145.033
	—	—	—	—
3	145.22	145.307	145.107	145.033
	3995.00	4537.31	3196.44	2844.77
4	145.10	145.161	145.106	145.033
	3374.80	3656.62	2944.82	2788.98
5	145.05	145.107	145.095	145.033
	3722.20	3722.20	2811.82	2780.04
6	145.04	145.081	145.089	145.033
	2737.40	3041.24	2820.23	2773.34
7	145.03	145.067	145.082	145.033
	2723.30	2975.97	2803.20	2772.00
8	145.02	145.059	145.076	145.033
	2701.60	2927.58	2793.53	2771.26
9	145.02	145.053	145.033	145.033
	2684.20	2893.73	2787.54	2770.00
10	145.01	145.049	145.033	145.033
	2671.10	2869.51	2787.54	2769.00

0.01 in인 Table 1의 4가지 모델에 대해서 곡률보 유한요소에 의해 해석을 수행하였다. Table 2에서 Table 5에 제1, 제5 고유진동수에 대한 곡률보 요소의 수치해석 결과를 해석해 및 ADINA Hermitian 보요소의 결과와 함께 나타냈다. 4가지 모델의 제1 고유진동수의 경우 한 요소당 2개의 절점을 가진 2절점 곡률보요소는 ADINA Hermitian 보요소와 거의 일치하는 결과를 보여주며, 3절점 곡률보요소와 4절점 곡률보요소는 개선된 결과를 보여준다. 즉, 한개의 요소만 사용하여 고유진동수를 구하더라도 해석해와 일치하는 결과를 얻을 수 있다. Fig. 3과 Fig. 4에 두께가 얇은 모델 4의 결과인 Table 5의 값을 도시하였다. 그림 상에서는 3절점 곡률보요소의 결과와 4절점 곡률보요소의 결과가 해석해와 겹쳐 보이고 있는데, Table 5를 보면 5절점일 경우가 3절점일 경우보다 해석해에 더 가까운 값을 가짐을 알 수 있다.

한편, 두께가 상대적으로 얇은 모델 4에서 두께

에 따른 오차는 나타나지 않는다. 즉, Table 6을 보면 모델의 두께에 관계없이 제1 고유진동수의 오차는 비슷하며, 두께가 얇은 보가 두꺼운 보보다 오히려 작은 오차를 가짐을 알 수 있다. 이는 수직 변형률과 전단변형률이 곡률로 표현되어 평형방정식에 의해 정식화되는 과정에서 강성과잉현상이 해결되었음을 의미한다.

제5 고유진동수의 경우도 2절점곡률보요소의 결과는 ADINA Hermitian 보요소의 결과와 비슷하며, 3절점, 4절점 곡률보요소는 보다 좋은 결과를 보여준다. Table 7은 2절점, 3절점, 4절점 곡률보 요소를 사용하여 구한 제5 고유진동수의 결과를 해석해에 대한 백분율오차로 나타낸 것이다.

Fig. 5에서 Fig. 7은 한쪽 끝이 고정된 두께대 길이의 비가 1대 200인 얇은 Timoshenko보의 고유치 계산결과를 나타낸 그림이다. 3절점 곡률보 요소의 결과가 수정보간함수를 사용한 보요소의 결과보다 빨리 해석해에 수렴함을 볼 수 있다. 수정보

Table 3 The first and fifth natural frequencies of model 2 as a function of the number of elements (exact first frequency=73.417 rad/sec, fifth frequency=1679.15 rad/sec)

No. of elements	ADINA beam element	2 node curvature-based	3 node curvature-based	4 node curvature-based
1	81.7300	81.7464	73.4640	73.4400
	—	—	—	—
2	73.7310	81.7505	73.4280	73.4180
	—	—	—	—
3	73.4870	73.4974	73.4240	73.4170
	2310.80	2498.45	1833.63	1703.93
4	73.4430	73.4484	73.4200	73.4170
	1957.00	2003.80	1690.43	1682.00
5	73.4280	73.4331	73.4200	73.4170
	1994.50	1994.51	1690.43	1682.00
6	73.4240	73.4268	73.4200	73.4170
	1733.80	1769.25	1693.10	1679.76
7	73.4210	73.4236	73.4200	73.4170
	1714.20	1741.91	1688.90	1679.50
8	73.4200	73.4219	73.4200	73.4170
	1701.20	1724.64	1686.74	1679.34
9	73.4190	73.4208	73.4200	73.4170
	1692.80	1713.53	1685.47	1679.20
10	73.4180	73.4201	73.4200	73.4170
	1687.20	1706.04	1684.00	1679.19

Table 4 The first and fifth natural frequencies of model 3 as a function of the number of elements (exact first frequency=7.3724 rad/sec, fifth frequency=184.124 rad/sec)

No. of elements	ADINA beam element	2 node curvature-based	3 node curvature-based	4 node curvature-based
1	8.18310	8.18307	7.37655	7.37400
	—	—	—	—
2	7.40160	7.40159	7.37297	7.37200
	—	—	—	—
3	7.37830	7.37843	7.37249	7.37200
	244.880	244.989	194.800	185.330
4	7.37290	7.37437	7.37245	7.37200
	207.940	2008.028	186.580	184.280
5	7.37180	7.37324	7.37245	7.37200
	204.490	204.526	184.230	184.200
6	7.27270	7.37283	7.37200	7.37200
	189.040	189.073	184.390	184.130
7	7.27120	7.37265	7.27200	7.37200
	186.930	186.987	184.230	184.128
8	7.37240	7.37252	7.37200	7.37200
	185.850	185.871	184.180	184.125
9	7.37250	7.37252	7.37200	7.37200
	185.230	185.247	184.100	184.120
10	7.37250	7.37250	7.37200	7.37200
	184.870	184.878	184.000	184.120

간함수를 사용한 보요소는 절점당 자유도 수가 2개인 3절점 보요소인데 비해 3절점 곡률보요소는 Fig. 2의 (b)와 같이 요소당 자유도 수가 5개임을 고려할 때 더 효율적인 요소이다.

곡률보요소는 요소의 갯수를 증가시켜감에 따라 해석해에 단순수렴함을 볼 수 있다.

3절점 곡률보요소 2개를 사용할 때의 결과가 2절점 곡률보요소 4개를 사용할 때의 결과보다 좋음을 볼 수 있는데, 3절점 곡률보요소는 요소당 5개의 자유도를 가지고 2절점 곡률보요소는 요소당 4개의 자유도를 가짐을 고려할 때 3절점 곡률보요소가 2절점의 경우보다는 더 효율적임을 알 수 있다.

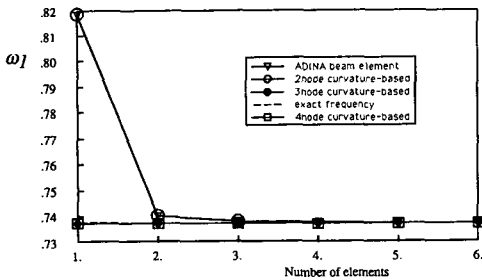


Fig. 3 The 1st natural frequency of model 4 as a function of the number of elements(exact frequency=0.737 rad/sec)

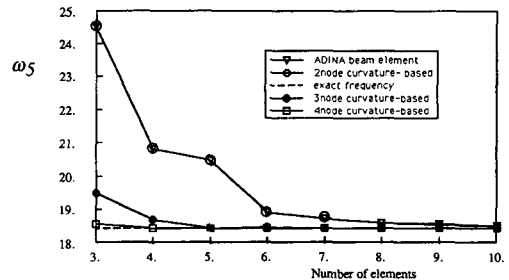


Fig. 4 The 5th natural frequency of model 4 as a function of the number of elements(exact frequency=18.431 rad/sec)

Table 5 The first and fifth natural frequencies of model 4 as a function of the number of elements (exact first frequency=0.73728 rad/sec, fifth frequency=18.431 rad/sec)

No. of elements	ADINA beam element	2 node curvature-based	3 node curvature-based	4 node curvature-based
1	.818150	.818320	.737690	.737280
	—	—	—	—
2	.740190	.740190	.737310	.737280
	—	—	—	—
3	.737870	.737870	.737280	.737280
	24.5030	24.5030	19.4900	18.5500
4	.737470	.737470	.737280	.737280
	20.8110	20.8110	18.6740	18.4400
5	.737350	.737350	.737280	.737280
	20.4580	20.4578	18.4420	18.4400
6	.737310	.737310	.737280	.737280
	18.9210	18.9210	18.4600	18.4320
7	.737300	.737300	.737280	.737280
	18.7130	18.7134	18.4400	18.4320
8	.737290	.737290	.737280	.737280
	18.6020	18.6026	18.4300	18.4310
9	.737280	.737280	.737280	.737280
	18.5410	18.5408	18.4300	18.4310
10	.737280	.737280	.737280	.737280
	18.5040	18.5045	18.4300	18.4310

Table 6 Errors in the first natural frequency

Model	No. of nodes per elem.	Values of % error in finite element frequencies for the following number of elements						Exact Timoshenko theory (rad/sec)
		1	2	3	4	6	8	
1	2	12.37	0.62	0.18	0.08	0.03	0.01	145.03
	3	0.11	0.05	0.05	0.05	0.04	0.03	
	4	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
2	2	11.34	0.45	0.10	0.04	0.01	0.00	73.42
	3	0.06	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	
	4	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
3	2	10.99	0.39	0.08	0.02	0.00	0.00	7.37
	3	0.06	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	
	4	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
4	2	10.99	0.39	0.08	0.02	0.00	0.00	0.74
	3	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
	4	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	

Table 7 Errors in the fifth natural frequency

Model	No. of nodes per elem.	Values of % error in finite element frequencies for the following number of elements						Exact Timoshenko theory (rad/sec)
		1	2	3	4	6	8	
1	2	-	-	63.87	32.06	9.84	5.73	2768.78
	3	-	96.14	15.44	6.35	1.85	0.89	
	4	-	20.47	2.74	0.72	0.16	0.08	
2	2	-	-	43.43	19.33	5.36	2.70	1679.16
	3	-	66.184	9.19	3.10	0.83	0.45	
	4	-	13.25	1.47	0.30	0.03	0.01	
3	2	-	-	33.06	12.98	2.68	0.94	184.12
	3	-	52.73	5.79	1.33	0.14	0.03	
	4	-	9.03	0.65	0.08	0.00	0.00	
4	2	-	-	32.94	12.90	2.65	0.92	18.54
	3	-	52.59	5.74	1.31	0.15	0.02	
	4	-	8.98	0.64	0.08	0.00	0.00	

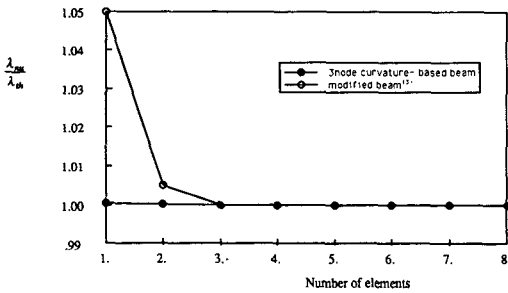


Fig. 5 The 1st eigenvalue of the cantilever as a function of the number of elements

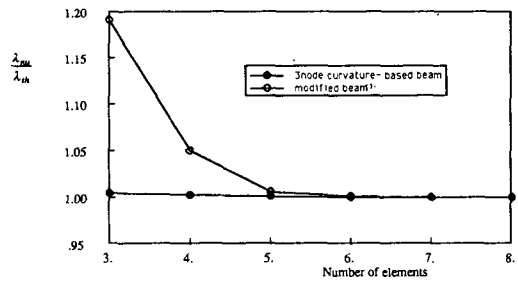


Fig. 7 The 3rd eigenvalue of the cantilever as a function of the number of elements

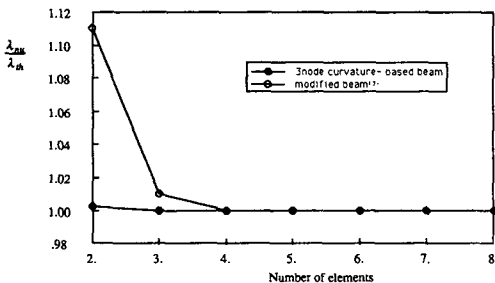


Fig. 6 The 2nd eigenvalue of the cantilever as a function of the number of elements

5. 결 론

본 논문에서는 요소당 2개, 3개, 4개의 절점을 갖는 곡률보요소에 대하여 곡률을 보간하고 보의 평형방정식을 고려하여 정식화하였다. 진동해석에서의 곡률보요소의 우월성을 보이기 위하여 Timoshenko보의 고유치를 해석하였고 다음의 결론을 얻었다.

(1) 곡률보요소를 이용할 경우 보의 두께가 얇아져도 오차의 증가현상이 더 이상 나타나지 않으며,

보의 두께에 관계없이 매우 정확한 결과를 얻을 수 있다.

(2) 요소당 자유도 수 및 해석결과를 고려할 때 2절점보다는 3절점, 3절점보다는 4절점 곡률보요소가 더 효율적이다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 장기 기초 연구과제 (90-5-007) 지원에 의해 수행되었으며, 관계자 여러분께 심심한 감사를 표한다.

참고문헌

- (1) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements," J. of Applied Mech., Vol. 49, pp. 172~178.
- (2) Prathap, G. and Bhashyam, G. R., 1982, "Reduced Integration and the Shear-flexible Beam Element," Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol. 18, pp. 195~210.
- (3) 민옥기, 김용우, 유동규, 1990, "곡선보의 강성과잉현상과 고유치에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제14권, 제2호, pp. 310~323.
- (4) Petyt, M. 1990, "Introduction to Finite Element Vibration Analysis," Cambridge University Press, Cambridge, pp. 86~136.
- (5) Davis, R., Henshell, R. D. and Warburton, G. B., 1972, "A Timoshenko Beam Element," J. of Sound and Vibration, Vol. 22, pp. 475~487.
- (6) Thomas, D. L., Wilson, J. M. and Wilson, R. R., 1973, "Timoshenko Beam Finite Elements," J. of Sound and Vibration, Vol. 31, pp. 315~330.
- (7) Thomas, J. and Abbas, B. A. H., 1975, "Finite Element Model for Dynamic Analysis of Timoshenko Beam," J. of Sound and Vibration, Vol. 41, pp. 291~299.
- (8) Dawe, D. J., 1978, "A Finite Element for the Vibration Analysis of Timoshenko Beams," J. of Sound and Vibration, Vol. 60, pp. 11~20.
- (9) Dym, C. L. and Shames, I. H., 1973, "Solid Mechanics : A Variational Approach," McGraw Hill, New York, pp. 370~377.