

〈論 文〉

## 탐색기의 주사루프 모델링과 LQG/LTR 보상기 설계

황흥연\* · 이호평\*

(1993년 3월 4일 접수)

### Modelling and LQG/LTR Compensator Design of the Seeker Scan-Loop

Hong Yeon Hwang and Ho Pyeong Lee

**Key Words :** Scan-Loop(주사루프), LQG/LTR Compensator(LQG/LTR 보상기), P-Control(비례제어), Stability-Robustness(안정도 강인성), Internally Balanced Realization(내적균형)

#### Abstract

A mathematical model of the seeker scan-loop which is composed of a spin-stabilized gyroscope and its driving signal processors is derived. The derived model has a transmission zero pair on the imaginary axis near to the required bandwidth. The LQG/LTR design methodology is evolved for the derived scan-loop model. To implement the designed LQG/LTR compensator to the actual plant, the compensator order is reduced using the internally balanced realization method. The performances of the LQG/LTR compensator are tested and compared with those of the P-control. Especially, stability-robustness experiments for model uncertainties represented in the form of time-delays are performed. It is demonstrated that the LQG/LTR compensator is actually very robust to model uncertainties.

### 1. 서 론

자전안정화된 자이로 (spin-stabilized gyroscope) 를 구동하여 표적을 주사하는 탐색기의 주사계는 전형적인 2입력 2출력계로서 비행중 표적포착확률과 밀접한 연관이 있고, 표적포착확률을 높이기 위해서는 주사계의 보다 우수한 제어성능이 요구되고 있다. 이러한 목적을 달성하기 위해서는 탐색기의 주사계에 대한 정확한 수학적 모델링, 루프해석 및 강인한 제어기의 설계가 필수적이다. 그러나 주사계는 2입력 2출력의 다변수 시스템이므로 루프해석 및 제어기 설계에 기존의 단일 입출력 제어시스템에 대한 제어이론을 직접 적용하기가 곤란하다는 단점

을 가지고 있다.

1960년대 이후 최적제어이론에 기반을 둔 LQ제어방법을 이용하여 시간영역에서 다변수 제어시스템을 직접 설계할 수 있었다. 그러나 이 방법은 시스템의 모든 상태변수를 측정해야하기 때문에 현실적으로 불가능한 경우가 많다. 이러한 단점을 극복하기 위해 LQG방법이 고안되었으나, 이 방법 역시 가격함수에 포함되고 있는 가중행렬의 선정방법이 비조적적이고 시행착오적일 뿐만 아니라, 명령추종, 외란제거 등의 시스템 성능과 모델링 오차에 대한 안정도-강인성 문제에 관한 설계사항들을 설계시에 직접 고려할 수 없다는 문제점도 가지고 있다. 이와 같은 문제점을 보완하기 위해 1980년초 Doyle과 Stein<sup>(1)</sup>이 강력한 다변수 제어시스템 설계방법인 LQG/LTR(linear quadratic gaussian control

\*정회원, 국방과학연구소 선임연구원

with loop transfer recovery) 방법을 개발한 것을 계기로 최근 이론적 연구<sup>(2)</sup> 및 그 응용연구<sup>(3)</sup>가 매우 활발히 진행되고 있으나, 실제 적용사례는 아직 미흡한 상태이다. 또한 LQG/LTR방법이 근본적으로 최소위상 플랜트를 가정하고 있고 비최소위상 플랜트에 대해서도 최근 연구가 활발히 진행되고 있으나,<sup>(4)</sup> 허수축상에 교차주파수와 가까운 다변수 영점이 존재하는 경우에 대한 적용기술 및 그 물리적 해석은 부족한 형편이다.

본 연구에서는, 주사계를 구성하고 있는 각 블록의 수학적 모델을 제어기 설계가 용이한 복조된(demodulated) 형태로 표현하고, 유도된 모델의 타당성은 가장 단순한 제어 방법인 비례제어계를 통하여 검증한다. 유도된 모델은 교차주파수와 근접한 다변수 영점이 허수축상에 존재하고 있으며, 유도된 모델을 근거로 최근 다변수 제어기법중 모델링오차 및 측정잡음에 매우 강인함이 입증되고 있는 LQG/LTR보상기를 제시된 설계사양이 만족되도록 설계한다. 설계된 LQG/LTR보상기의 성능 및 강인성을 이론적 분석뿐만 아니라 실제 실험을 통하여 입증하며, 실제구현을 위해 설계된 보상기의 차수를 내적균형법(internally balanced realization)을 도입하여 축소시킨다. 특히 모델링오차를 출력측으로 반영된 곱셈형 오차로 가정하고 그 형태를 시간지연으로 표현하여 설계된 LQG/LTR보상기의 안정도-강인성 해석을 실험 및 예측을 통해 수행하고 비례제어시의 결과와 비교검토한다.

## 2. 주사계 모델링

주사계는 크게 나누어 회전하는 자이로와 자이로를 구동하기 위한 신호처리부로 구성되어 있다. Fig. 1은 보상기가 포함된 주사계의 폐회로 구성을 보이고 있고, 보다 용이하고 안정한 위치제어를 위해 자이로가 일정한 각속도로 회전하고 있기 때문에 그림에서 변조기로부터 복조기까지의 각 신호처리부의 반송주파수(carrier frequency)는 자이로의 자전주파수와 동기되어 있다.

제어기는 반송주파수를 제거한, 즉 반송주파수가 dc인 직류화된 모델을 근거로 쉽게 설계된다는 점을 고려하여 각 신호처리부의 모델은 직류화 모델 형태로 유도하고자 한다. 예를 들어 중심주파수가 반송주파수와 일치하고 있는 2차 대역여과기의 직류화 모델은 1차 저역여과기로 간략화할 수 있다.

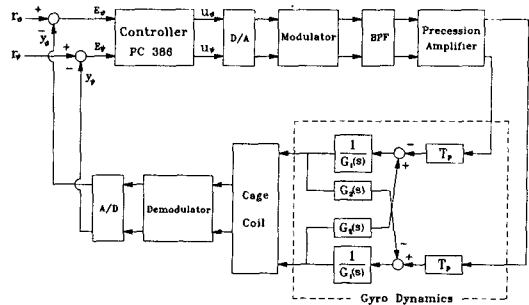


Fig. 1 Closed-loop configuration of the scan-loop

이러한 모델링 절차는 비록 계인특성은 서로 비슷하더라도 위상오차를 유발시키게 된다. 이 절에서는 각 신호처리기의 전달함수를 직류화 모델형태로 유도하고 발생된 오차는 모델링오차로서 다루고자 한다.

### 2.1 자이로

자이로는 일정한 각속도로 회전하여 큰 각운동량을 발생시키며, 이에 따라 안정된 지향성을 가지게 되어 위치제어가 용이하게 된다. 자이로의 동특성을 지배하는 운동방정식은 어떤 좌표계에서 그 운동을 기술하느냐에 따라 달라진다. 오른손 좌표계를 기준좌표계로서 정의하고 자이로의 각운동 변위가 크지 않다고 가정하면 자이로의 모델은 다음과 같이 유도된다.<sup>(5)</sup>

$$G_1(s) \theta_s(s) = G_2(s) \psi_s(s) + T_p \psi_g(s) \quad (1a)$$

$$G_1(s) \psi_s(s) = -G_2(s) \theta_s(s) + T_p \theta_g(s) \quad (1b)$$

여기서  $G_1(s) = I_a s^2 + D_g s + K_g$

$$G_2(s) = H_g s$$

이고, 사용된 각 변수의 물리적 의미는 다음과 같다.

$\theta(\cdot)$  : 피치방향 변수

$\psi(\cdot)$  : 요방향 변수

$I_a$  : 피치, 요방향 관성 모멘트

$D_g$  : 감쇠계수

$K_g$  : 스프링 상수

$H_g$  : 각운동량

$T_p$  : 선회토크계수

위 식에서 보는 바와 같이 자이로의 운동은 피치-요 평면에서의 전형적인 2입력 2출력계로서 표현되며, 가해진 토크방향과 직교방향으로 자이로는

작용한다는 것을 알 수 있다. 즉 자이로를 피치방향으로 선회시키기 위해서는 요방향으로 선회토크를 가해야 하며, 그 역도 마찬가지이다. 식(1a)와 (1b)에서 자이로의 스프링 상수를 무시할 수 있다고 가정하면 자이로의 특성방정식과 특성근은 다음과 같이 구해진다.

$$s(I_a^2 s^2 + 2I_a D_g s + D_g^2 + H_g^2) = 0$$

$$s = 0, -(D_g \pm jH_g) / I_a \quad (2)$$

첫번째 극점은 적분기의 역할을 하고 두번째의 공액극점은 뉴테이션운동을 나타내고 있다.

## 2.2 신호처리기

### (1) 변조기 (Modulator)

자이로의 위치를 제어하기 위해서는 자이로의 자전주파수와 동기된 선회토크가 요구된다. 변조기는 직교좌표계에서 직류성분으로 각각 구해진 두 방향의 제어오차신호를 변조기출력의 기본주파수가 자이로의 자전주파수에 동기된 구형파신호로 변환하는 역할을 한다. 변조주파수를 직류화하였을때 변조기의 특성은 단순히 이득상수  $K_{mod}$ 로 표현된다.

### (2) 대역여과기

변조기의 출력은 두 방향의 제어오차신호에 비례하는 구형파의 크기와 위상으로 표현된다. 주기적인 구형파의 주파수성분은 Fourier급수에 의해 기본주파수의 정수배들의 합으로 나타나므로 자이로를 선회시키는 신호로 직접 사용하기는 부적절하다. 따라서 자이로의 자전주파수와 동기된 변조기 출력의 기본주파수만 통과시킬 필요가 있으며, 대역여과기의 대역폭은 전체루프의 동특성과 잡음제거의 측면을 고려하여 설계한다. 극점이 두개인 대역여과기를 직류화하면 다음과 같은 극점이 하나인 저역여과기 형태로 표현되고, 이때의  $a_1$ 은 대역여과기에서 더 좁은 -3dB 대역폭으로 설정한다.

$$G_{BPF} = a_1 / (s + a_1) I_2 \quad (3)$$

여기서  $I_2$ 는  $2 \times 2$ 일원행렬을 나타낸다.

### (3) 선회증폭기

선회증폭기는 대역여과기 출력전압을 자이로를 선회시키는데 필요한 토크에 비례하는 전류로 변환하는 역할을 하며, 이득상수의 크기는  $K_{prec}$ 이다.

### (4) 위치검출기

자석회전자 즉 자이로의 위치변화에 따라 자이로 주위에 감겨있는 슬레노이드 코일양단에 전압이 유

기되고, 그 크기는 자이로의 정적변위에 의한 유도전압과 자이로의 운동속도방향과 직교방향으로 유기되는 전압과의 벡터합으로 나타난다. 자이로의 위치와 유도전압사이의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \theta_c \\ \psi_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_{case} s \\ -k_{case} s & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_s \\ \psi_s \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서  $k_{case}$ 는 위치검출기의 커플링방향 이득상수이고, 위 식은 자이로의 선회율이 커질수록 커플링도 증가함을 나타내고 있다.

### (5) 복조기 (Demodulator)

위치검출기에서 측정된 자이로의 위치는 정현파 형태로서 극좌표계에서의 크기와 위상으로 표현된다. 이 정현파신호는 복조기를 통하여 직교좌표계에서의 피치와 요성분의 크기로 복조된다. 저역여과기와 결합된 복조기의 전달함수는 다음과 같이 구해진다.

$$G_{dem} = \frac{a_2}{s + a_2} \frac{a_3}{s + a_3} I_2 \quad (5)$$

### (6) 주사계 개루프 모델

식(1)에서 식(5)까지를 결합하면 주사계의 개루프 전달함수 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \theta_p \\ \psi_p \end{Bmatrix} = \frac{K_{mod} K_{prec} T_p G_{BPF}(s) G_{dem}(s)}{G_1^2(s) + G_2^2(s)} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\theta \\ u_\psi \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$G_{11}(s) = G_{22}(s) = G_2(s) + k_{case} s G_1(s)$$

$$G_{12}(s) = -G_{21}(s) = -G_1(s) + k_{case} s G_2(s)$$

식(6)을 상태공간식으로 표현하면 아래와 같고

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (8)$$

$$x(t) = [\theta_g \ \theta_s \ \theta_c \ \theta_p \ \psi_g \ \psi_s \ \psi_c \ \psi_q]^T$$

$$u(t) = [u_\theta u_\psi]^T$$

$\theta_g$  : 피치방향의 선회토크에 비례하는 전류량 (A)

$\theta_s$  : 자이로의 피치방향의 각 (Deg)

$\theta_c$  : 위치검출기의 피치방향 출력 (Volt)

$\theta_p$  : 복조기의 피치방향 출력 (Volt)

$p$  : 복조기의 피치방향 출력의 미분값 (Volt/s)

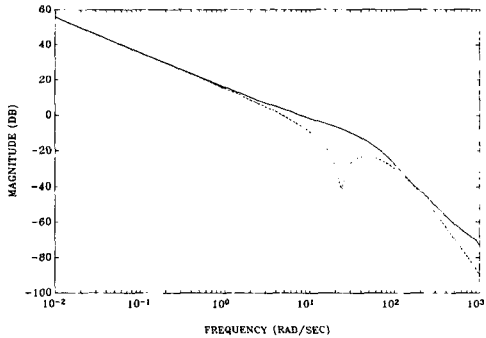
$\psi_g$  : 요방향의 선회토크에 비례하는 전류량 (A)

$\psi_s$  : 자이로의 요방향의 각 (Deg)

$\psi_c$  : 위치검출기의 요방향 출력 (Volt)

**Table 1** Openloop poles and transmission zeros of the scan-loop

Poles	0, 0, -50.3, -50.3, -68.5, -68.5, -71.4, -71.4, -266+j925, -266-j925
Zeros	j23.2, -j23.2



**Fig. 2** Singular values of the scan-loop

$\psi_s$  : 복조기의 요방향 출력 (Volt)  
 $q$  : 복조기의 요방향 출력의 미분값 (Volt/s)

위에서 시스템 행렬 (A, B, C)의 각 차원은  $A \in R^{10 \times 10}$ ,  $B \in R^{10 \times 2}$  그리고  $C \in R^{2 \times 10}$ 와 같다. 즉, 주사계의 선형모델은 10개의 상태변수와 2입력 2출력으로 표현되고 있고, Table 1은 주사계의 개루프 극점 및 다변수전달영점을 보여주고 있다. 주사계는 이미 각 루프경로마다 원점에 있는 극점, 즉 적분요소를 포함하고 있기 때문에 계단형태의 명령이나 외란에 대해 정상상태 오차는 없고, 따라서 플랜트 모델에 또다른 적분요소를 첨가할 필요는 없다. Table 1에서 보는 바와 같이 주사계는 비최소 위상 영점은 없으나 허수축상에 영점이 존재하고 있어 제어기 설계방법 여하에 따라 진동적인 응답 특성을 초래할 수도 있다. Fig. 2는 주사계의 특이값 선도를 보여주고 있고, 저주파 영역에서 두 특이값들은 서로 잘 일치하고 있다.

### 3. 주사계의 비례제어 및 모델검증

#### 3.1 비례제어기 설계

제시된 설계사양을 만족하는 제어기를 설계하기 위해서는 앞 절에서 유도된 모델의 타당성이 먼저 입증되어야 한다. 그러나, 주사계는 적분요소를 포

함하고 있어 개루프상태로 예측결과와 실제결과를 통한 모델검증을 하기가 매우 어렵다. 따라서, LQG/LTR 제어기법과 같은 다변수 이론을 도입하기에 앞서 가장 단순한 피드백 제어를 통해 모델검증 및 제어성능을 분석하는 것이 바람직하다.

우선, 다변수 이득여유를 다음과 같이 정의한다.<sup>(6)</sup>

다변수 이득여유 ( $GM_m$ ) :

$$GM_m = \min GM[\lambda_i\{G(j\omega)\}] \quad (9)$$

여기서  $\lambda_i\{G(j\omega)\}$ 는  $G(j\omega)$ 의  $i$ 번째 고유값을 나타낸다.

식(9)는 일반화된 Nyquist 안정도-판별법을 각 제어루프에 적용하여 그 중 작은 값을 채택한 것으로서, 실제 이득여유가 정의된 양 이상으로 구해지므로 신중한 정의이다. 주사계의 다변수 이득여유는  $GM_m = 12.04$  dB 이고, 구한 이득여유로부터 폐회로 주사계가 안정하기 위한 이득범위는 각 루프당  $0 < k < 4$ 이다.

Fig. 1에서 보상기를 비례제어기인 행렬,  $K_p$ 로 표현하면 페루프 주사계의 상태방정식은 식(10)과 같다.

$$\dot{x}(t) = (A - BK_p C)x(t) + BK_p r(t) \quad (10)$$

여기서  $K_p = k_p I_2$

즉 폐회로 극점은  $(A - BK_p C)$ 의 고유값과 같다. 후에 기술될 설계사양을 고려하여 비례제어를  $k_p = 2.08$ 로 선정하였으며 이때의 다변수 이득여유는 5.68 dB로 구해진다.

#### 3.2 모델검증

유도된 모델의 타당성을 검증하기 위해 비례제어인  $k_p = 2.08$ 일 경우 페루프 계단응답특성을 실험과 시뮬레이션을 통하여 비교하였다. Fig. 3은 명령입력을 (1, 0)의 계단입력으로 주었을 경우 페루프 응답특성을 보이고 있다. 예측결과는 실험결과와 비교적 잘 일치하고 있고, 커플링이 다소 크게 나타나고 있다. Fig. 4는 (1, 1)의 계단입력에 대한 페루프 응답특성을 실험결과 및 모델에 의한 예측과 함께 보여주고 있다. 전체적으로 모델에 의한 응답과 실험결과는 유사하나, 피크값과 진동주기에서 다소 차이를 보이고 있으며, 이는 첫번째 모드 의 감쇠비의 추정오차 및 고주파 영역에서의 모델링 오차에 기인한다고 판단된다.

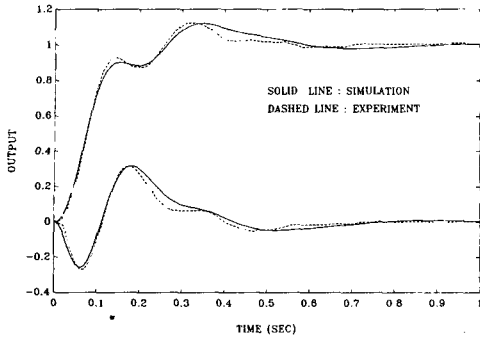


Fig. 3 Closed-loop step response of the P-control to (1,0) step inputs

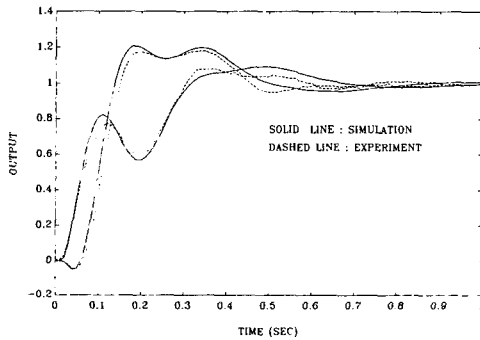


Fig. 4 Closed-loop step response of the P-control to (1,1) step inputs

피치방향으로 초기에 비최소위상시스템의 특성중의 하나인 언더슈트가 나타나는 이유는 주사계가 비최소위상 다변수 영점을 포함하고 있기 때문이라기보다는, 앞서 주사계의 영점과 극점을 나열한 Table 1에서와 같이 허수축상에 존재하는 영점때문으로 판단된다. 비례제어계의 성능 관점에서 보면 오버슈트와 커플링측면에서 만족스럽지 못하다. 또한 안정도-강인성 절에서 다루겠지만 비례제어시스템의 안정여유는 매우 작다는 것을 고려하면, 다변수 시스템의 제어시 고전적인 제어방식으로는 성능 및 강인성측면에서 한계가 있음을 알 수 있으며, 따라서 다변수 제어시스템에 좀더 적합한 제어방법을 도입할 필요가 있다.

#### 4. 제어기 설계 사양

설계사양을 기술하기전 먼저 Fig. 5에서 아래와 같은 관계식이 성립한다.

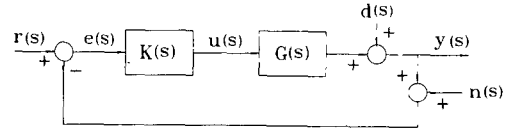


Fig. 5 Standard feedback configuration

$$y(s) = S(s)d(s) + [I - S(s)]r(s) - [I - S(s)]n(s) \tag{11}$$

$$\text{혹은 } y(s) = [1 - T(s)]d(s) + T(s)r(s) - T(s)n(s) \tag{12}$$

$$S(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} \tag{13}$$

$$T(s) = S(s)G(s)K(s) \tag{14}$$

여기서  $S(s)$ 와  $T(s)$ 는 각각 감도 및 페루프 전달 함수행렬을 나타낸다.

#### 4.1 성능 요구규격

성능 요구규격중의 하나는 각각의 제어 채널에서 계단입력에 대해 정상상태 오차가 0이 되도록 하는 것이다. 이 요구규격은 설계플랜트에 적분요소를 부가시킴으로서 만족시킬 수 있다. 그러나 Fig. 2에서 본 바와 같이 탐색기의 주사계는 저주파수에서 -20 dB/dec의 기울기를 가지고 있기 때문에 주사계 자체에 적분요소가 포함되어 있음을 알 수 있다. 따라서 0-정상상태오차를 만족시키기 위해 주사루프에 적분요소를 부가시킬 필요가 없다. 다른 요구규격은 저주파수에서 외란제거 성능과 명령추종 성능이 우수하여야 한다.

상기 성능 요구규격은 주파수 영역에서 다음과 같은 구속조건으로 표현할 수 있다.

$$\sigma_{\max}[S(j\omega)] < -20\text{dB} \text{ for all } \omega < 0.8\text{rad/s} \tag{15}$$

여기서  $S(j\omega) = [I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}$ 은 감도 전달 함수행렬이며, 식(15)로부터 설정된 주파수범위에서 외란이 -20 dB 이상 감소됨을 나타낸다.

그외에 시스템 대역폭이 약 15 rad/s, 10 deg/s의 속도로 원형주사시 위치 정밀도 10% 이내, 출력간에 상호 커플링이 적어야 하고, 적당한 시스템 감쇠비를 가져야 한다.

#### 4.2 강인성 요구 규격

고주파수에서의 센서잡음과 모델링 오차에 대해

강인하려면 페루프 전달함수행렬  $T(j\omega)$ 가 설정된 주파수 영역에서 다음과 같은 구속조건을 만족해야 한다.

$$\sigma_{\max}[T(j\omega)] < -20dB \quad \text{for all } \omega > 90rad/s \quad (16)$$

$$T(j\omega) = [I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}G(j\omega)K(j\omega) \quad (17)$$

### 5. 주사계의 LQG/LTR 보상기 설계

LQG/LTR 제어방법은 비록 현장에 직접 적용하기는 설계개념이 다소 복잡하기는 하지만 다변수 제어시스템을 설계하는데 있어서 매우 강력한 설계방법으로 알려져 있다. 이 방법은 기존의 다변수 제어시스템 설계방법과는 달리 모델링 오차에 대한 강인성문제와 페루프의 안정도 문제뿐만 아니라 주파수역 성능규격을 설계시 직접 고려할 수 있는 장점이 있다(Fig. 6).

이 절에서는 주사계에 대한 LQG/LTR보상기 설계절차를 소개하고 설계과정중 필요한 주요 식은 구체적인 유도나 증명없이 도입하였다. 프로세스와 센서에 가상적인 백색잡음을 고려한 주사계 플랜트  $G(s)$ 는 다음과 같은 상태방정식으로 표현될 수 있다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Gamma\xi(t) \quad (18)$$

$$y(t) = Cx(t) + \theta(t) \quad (19)$$

여기서  $\Gamma$ 는 가상적인 외란입력행렬이고,  $\xi(t)$ 는 프로세스 백색잡음으로서 0-평균, 공분산의 강도가 일원행렬이며,  $\theta(t)$ 는 센서의 백색잡음으로서  $\xi(t)$ 와는 비상관된 0-평균, 공분산의 강도가 일원행렬의  $\mu$ 배로 표현된다고 가정한다.

$$E[\xi(t)\xi^T(\tau)] = I\delta(t-\tau) \quad (20)$$

$$E[\theta(t)\theta^T(\tau)] = \mu I\delta(t-\tau) \quad (21)$$

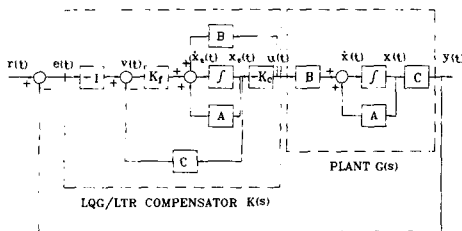


Fig. 6 The structure of LQG/LTR control system

LQG/LTR 방법은 다음과 같은 2단계 설계절차가 요구되는데, 첫째 단계는 안정도-강인성 조건을 고려하여 위에서 열거한 성능요구조건을 만족하도록 칼만필터이론에 의해 목표피이드백루프를 설계하는 단계이고, 둘째 단계는 LQG/LTR보상기가 포함된 개루프특성이 이미 설계된 목표피이드백루프에 점근적으로 회복되도록 LQ레귤레이터를 설계하는 단계이다.

• 설계단계 1 : 목표피이드백루프 설계

칼만필터의 루프 전달함수행렬  $G_{kf}$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G_{kf}(s) = C[sI - A]^{-1}K_f \quad (22)$$

여기서  $K_f$ 는 칼만필터 게인행렬으로서 다음과 같이 계산된다.

$$K_f = P_f C^T / \mu \quad (23)$$

위 식에서  $P_f$ 는 다음의 필터 대수 리카티식의 해이다.

$$AP_f + P_f A^T + \Gamma\Gamma^T - P_f C^T C P_f / \mu = 0 \quad (24)$$

칼만필터 문제의 주파수역 등가식 (kalman filter frequency domain equality, KFDE)에 의하면  $\sigma_{\min}[G_{kf}(s)] \gg 1$  일때 다음식이 성립한다.<sup>(6,7)</sup>

$$G_{kf}(s) \cong G_{foi}(s) \quad (25)$$

여기서  $G_{foi}(s)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$G_{foi}(s) = (1/\sqrt{\mu}) C[sI - A]^{-1}\Gamma \quad (26)$$

식(26)에서 설계파라미터  $\Gamma$ 는  $G_{foi}(s)$ 의 다변수 영점을 결정하므로 주파수영역에서의 목표피이드백루프의 형상을 조절하는데 이용된다.  $\Gamma$ 를 선정하는 방법은 어느 주파수 영역에서 특이값들의 형상을 일치시키느냐에 따라 달라지나, 본 연구에서는 이미 특이값들의 형상이 비교적 잘 일치하고 있고 대역폭을 제외하고는 안정도-강인성 성능을 만족하고 있으므로  $\Gamma = B$ 로 선정하였다. 즉 목표피이드백루프의 형상을 주사계 개루프의 특이값형상이 되도록 한다.

또 다른 설계파라미터인  $\mu$ 는 목표 피이드백루프의 dc게인을 조절하는데 이용되며, 이 값을 변화 시킴에 따라서 개루프의 특이값 선도가 위로 또는 아래로 움직이므로 요구되는 시스템 대역폭을 고려하여 선택을 하게 된다. 제시된 설계사양중 대역폭을 고려하여  $\mu = 0.2$ 로 선택하였다. 선정된  $\mu$ 에 대

해 식(23)을 이용하여 칼만필터 게인행렬을 구하면 다음과 같다.

$$K_f = \begin{bmatrix} 0.48 & -0.53 \\ 0.65 & -0.23 \\ 0.77 & -0.16 \\ 12.90 & 0.00 \\ 83.26 & -95.85 \\ 0.53 & 0.48 \\ 0.23 & 0.65 \\ 0.16 & 0.77 \\ 0.00 & 12.90 \\ 95.85 & 83.26 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$\mu$ 값을 더 작게 선정할수록 교차주파수가 증가하고 칼만필터 게인행렬  $K_f$ 가 크게되어 대역폭은 넓어지나, 제어입력도 또한 커지게되어 과도설계가 되기 쉽고 고주파영역의 센서잡음도 증폭되는 단점이 있다.

이상에서 결정된  $G_{fol}$ 에 대해 목표피드백루프  $G_{kf}$ 의 최대 교차주파수는 15 rad/s로 구해지고 루프전달회복단계를 거치면 대역폭사양을 만족할 수 있을 것으로 판단된다.

• 설계단계 2 : 루프전달회복

루프전달회복단계는 보상된 플랜트의 루프전달함수 행렬  $G(s)K(s)$ 를 LQ레귤레이터를 적절히 설계함으로써 목표피드백루프  $G_{kf}(s)$ 로 회복시키는 단계이다. LQ레귤레이터 게인행렬  $K_c$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$K_c = B^T P_c / \rho \quad (28)$$

여기서  $P_c$ 는 다음의 제어대수 리카티식의 해이다.

$$A^T P_c + P_c A + C^T C - P_c B B^T P_c = 0 \quad (29)$$

이상에서 구한 게인행렬  $K_f$ 와  $K_c$ 로부터 Fig. 6과 같이 LQG/LTR제어계가 구성되고, 이때 LQG/LTR보상기의 전달함수행렬  $K(s)$ 는 식(30)과 같이 구해진다.

$$K(s) = K_c (sI - A + B K_c + K_f C)^{-1} K_f \quad (30)$$

설계플랜트모델  $G(s)$ 의 상태표현식에서 (A, B)가 안정가능하고 (A, C)가 검출가능하며 최소위상플랜트라고 가정하면, LQG/LTR보상기의 전달함수행렬  $K(s)$ 가 다음과 같은 극한거동을 한다는 것이 LTR의 중요한 결과이다.<sup>(1)</sup>

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(s) \Rightarrow [C(sI - A)^{-1} B]^{-1} C(sI - A)^{-1} K_f = G(s)^{-1} G_{kf}(s) \quad (31)$$

즉

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(s) K(s) \Rightarrow G(s) G(s)^{-1} G_{kf}(s) = G_{kf}(s) \quad (32)$$

여기서  $G_{kf}(s)$ 는 목표피드백루프이고, 설계단계 1에서  $G_{kf}(s)$ 는 이미 제시된 설계사양을 만족하고 있으므로 식(32)로부터 LQG/LTR제어계는  $\rho$ 가 0으로 접근할 때 설계사양을 만족하리라는 것을 알 수 있다. 따라서 목표피드백루프로 실제 얼마나 잘 회복되느냐는 제어가중변수  $\rho$ 값에 따라 결정된다. 그러나  $\rho$ 값이 0에 수렴할수록 보상기의 극점 중 일부는 플랜트의 영점으로 수렴하게 되므로, 주사계와 같이 허수축상에 영점이 존재하는 경우 루프전달회복을 과도하게 수행하면 할수록 보상기 출력은 진동하게 되는 경향을 보이게 된다. 이때  $G(s)K(s)$ 는 이상적으로는  $G_{kf}(s)$ 에 수렴하게 되어 출력관점에서는 문제가 없는 것으로 보이나, 실제 모델링오차등에 기인하여 보상기 극점이 허수축상에 있는 영점과 상쇄되지 않고 불안정한 극점으로 남아있을 수가 있다. 따라서 제어가중변수  $\rho$ 는 전술한 성능요구규격과 보상기 출력의 응답특성을 고려하여 선정한다.

Fig. 7은  $\rho=0.00001$  및  $\rho=0.005$ 로 정했을 때 (1, 0)의 계단입력에 대한 플랜트출력과 보상기출력 즉 제어입력을 도시한 결과이다. 이때 구해진 최대 대역폭은 각각 18 rad/s 및 15 rad/s로 구해져, 예측한 바처럼 제어가중변수의 값이 작아질수록 대역폭도 넓어지고 출력측의 응답특성도 좋아지나 제어입력이 심하게 진동하게 된다. 따라서 최종적으로  $\rho=0.005$ 로 선정하였으며 식(28)에 의해 LQ레귤레이터 게인행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$K_c = \begin{bmatrix} 15.41 & 122.28 & 6.66 & 3.54 & 0.03 \\ 0.00 & 75.96 & 1.06 & 5.19 & 0.04 \\ 0.00 & -75.96 & -1.06 & -5.19 & -0.04 \\ 15.41 & 122.28 & 6.66 & 3.54 & 0.03 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Fig. 8은 설계단계 1에서 결정된 목표피드백루프와  $\rho=0.005$ 로 정했을 때 목표피드백루프의 루프전달회복된 결과를 보이고 있다. 회복된 개루프 전달함수행렬의 교차주파수는 목표피드백루프보다 약간 작으나, 설계요구조건을 만족하고 있고 보상기 출력특성이 양호하므로 적절한 값으로 판단

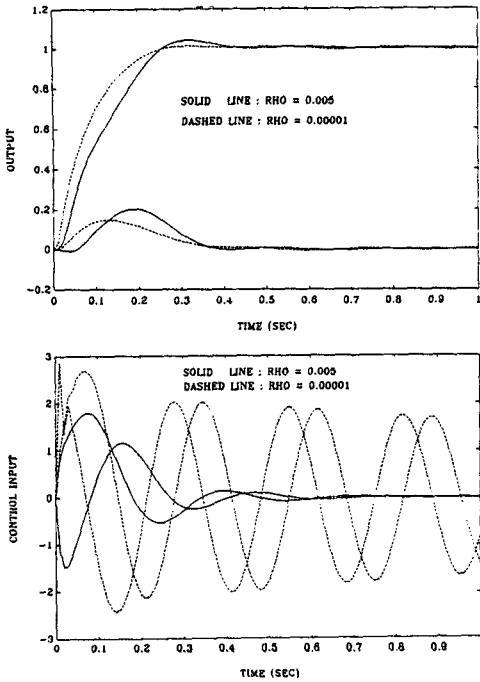


Fig. 7 Closed-loop step response of the LQG/LTR control (1, 0)

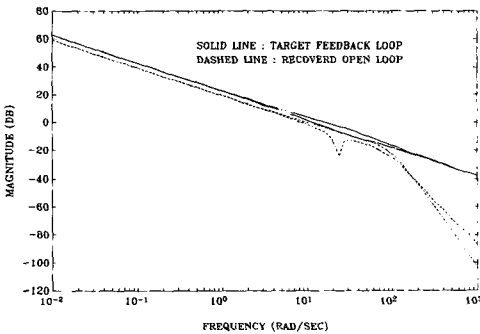


Fig. 8 Target feedback loop and loop-transfer-recovery results

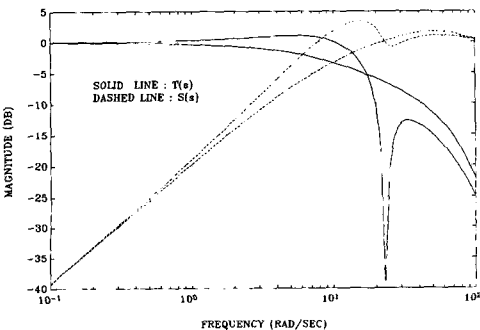


Fig. 9 Singular value of  $S(j\omega)$  and  $T(j\omega)$

된다.

Fig. 9는  $\rho=0.005$ 일때 감도 및 페루프 전달함수 행렬의 특이값 선도를 도시하고 있다.  $\omega=0$  일때 페루프 특이값의 크기가 1이므로 정상상태오차가 0 이고 대략  $\omega=15$  rad/s 이하에서는 양호한 명령추종성능과 외란제거성능을 보이고 있으며, 또한 감도 특이값선도로부터 고주파영역에서의 센서잡음제거 성능도 우수함을 알 수 있다.

### 6. 내적균형법 (Internally Balanced Realization)을 이용한 보상기 차수의 축소

설계된 보상기를 실제 구현하기 위해서는 실시간 계산량때문에 보상기의 차수를 축소할 필요가 있다. 본 연구에서는 내적균형법을 이용하여 보상기의 차수를 축소하고자 하며, 내적균형법의 기본 원리는 본래의 상태방정식을 유사변환하여 등가계로 표현한 후 유사변환된 상태방정식에서 가장 시스템 성능에 작게 영향을 미치는 상태변수들을 하나씩 삭제해나가는 것으로서 구체적인 방법론을 간단히 기술하면 다음과 같다.

설계된 LQG/LTR 보상기는 다음과 같은 상태방정식으로 표현될 수 있다.

$$\dot{x}_k(t) = A_k x_k(t) + B_k u_k(t) \tag{34}$$

$$y_k(t) = C_k x_k(t) \tag{35}$$

가제어성 그라미언(controllability gramman),  $W_c$  와 가관측성 그라미언(obsevability gramman),  $W_o$ 는 각각 제어 및 관측 가능정도를 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{A t} B B^T e^{A^T t} dt \tag{36}$$

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \tag{37}$$

Moore<sup>(8)</sup>는  $W_c$ 와  $W_o$ 가 점근적으로 안정한 계에 대해 각각 다음과 같은 Lyapunov형태의 식을 만족해야 함을 증명한 바 있다.

$$A W_c^2 + W_c^2 A^T = -B B^T \tag{38}$$

$$A^T W_o^2 + W_o^2 A = -C^T C \tag{39}$$

유사변환행렬  $P$ 를 이용하여 식 (34)과 (35)을 변환하면 다음과 같은 등가계로 표현된다.

$$\dot{x}'_k(t) = A'_k x'_k(t) + B'_k u_k(t) \tag{40}$$



$$y_k(t) = C_k' x_k'(t) \quad (41)$$

이때 본래 식과 유사변환된 식사이의 관계는 다음과 같다.

$$x_k = P x_k' \quad (42)$$

$$A_k' = P^{-1} A_k P \quad (43)$$

$$B_k' = P^{-1} B_k \quad (44)$$

$$C_k' = C_k P \quad (45)$$

여기서  $P$ 행렬은 아래와 같이 정의되는 새로운 그래미언을 이용하여 선정될 수 있다.

$$W_c' = P^{-1} W_c P \quad (46)$$

$$W_o' = P^{-1} W_o P \quad (47)$$

$$W_o' = W_c' = \text{diag}[\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n] \quad (48)$$

여기서  $\sigma_i$ 는 그래미언들의 특이값이며, 다음과 같이 크기순으로 배열되어 있다.

$$\sigma_i \geq \sigma_{i+1}, \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (49)$$

$\sigma_i \gg \sigma_{i+1}$  라면  $i$  번째까지의 상태변수가  $(i+1)$  번째부터  $n$  번째까지의 상태변수보다 시스템 성능에 더 영향을 주게 되므로 본래 상태 방정식은 다음과 같이  $i$  번째까지의 유사변환된 상태변수만 고려한 식으로 축소할 수 있다.

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u_r(t) \quad (50)$$

$$y_r(t) = C_r x_r(t) \quad (51)$$

여기서 행렬  $A_r$ 의 크기는  $l \times l$  이며,  $x_r(t)$ 은 유사변환된 상태변수  $x_k'(t)$  중에서 시스템 성능에 많은 영향을 미치는  $l$  번째까지의 상태변수로만 이루어진  $l \times 1$  벡터이다.

위의 전개과정을 주사계의 LQG/LTR보상기에 적용하면,  $W_c$ 와  $W_o$ 의 특이값은 각각  $\sigma_1 = \sigma_2 = 3.4$ ,

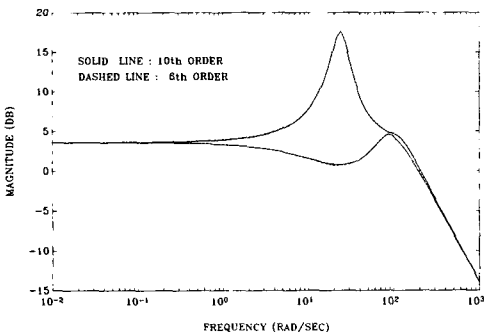


Fig. 10 Singular values of the full-order and reduced-order LQG/LTR compensator

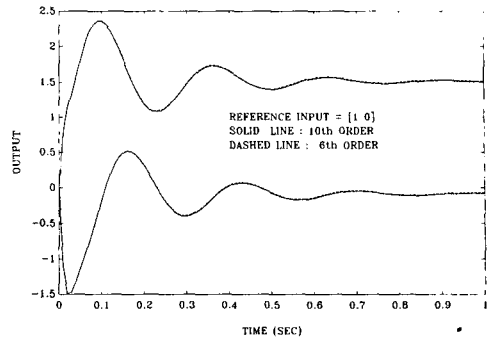


Fig. 11 Step response of the full-order and reduced-order LQG/LTR compensator

$\sigma_3 = \sigma_4 = 0.4$ ,  $\sigma_5 = \sigma_6 = 0.2$ ,  $\sigma_7 = \sigma_8 = 0.006$ ,  $\sigma_9 = \sigma_{10} = 0.000003$ 로 구해지고, 구해진 특이값들로부터 설계된 10차 LQG/LTR보상기는 6차로 축소할 수 있을 것으로 판단된다.

Fig. 10과 Fig. 11은 10차 LQG/LTR보상기와 6차로 축소된 LQG/LTR보상기의 특이값과 단위계 단응답특성을 각각 나타내고 있고, 그림으로부터 축소차수보상기와 10차 보상기의 특성차이가 거의 없음을 볼 수 있다.

### 7. 안정도-강인성 해석

실제 플랜트와 공칭 플랜트사이에는 항상 모델링 오차가 존재하게 되고, 그러한 모델링 오차를 어떻게 기술하느냐는 대상이 되는 시스템의 특성에 대한 설계자의 경험 및 지식에 의해 좌우된다. 모델링 오차를 플랜트 출력측으로 반영된 곱셈형 오차로 가정할 경우, 실제플랜트  $G_a(s)$ 와 공칭플랜트  $G_p(s)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$G_a(s) = L(s) G_p(s) = [I + E(s)] G_p(s) \quad (52)$$

여기서  $E(s)$ 는 모델링 오차를 나타내고 있다.

한편 다변수 안정도-강인성 판별식은 다음과 같이 유도된다.<sup>(9)</sup>

$$\sigma_{\max}[L(j\omega) - I] < \sigma_{\min}[I + \{G_p(j\omega) K(j\omega)\}^{-1}] \quad (53)$$

여기서  $K(j\omega)$ 는 축소된 보상기의 전달함수행렬이다.

주사계의 모델링오차의 형태는 다음과 같이 가정

할 수 있다.

$$L(j\omega) = I + E(j\omega) = \text{diag} [L_\theta(j\omega), L_\psi(j\omega)] \quad (54)$$

위의 가정은 절대적인 크기보다는 상대적인 크기로 제한된 계인 및 위상오차를 내포하고 있다. 식 (54)에서 모델링 오차의 요인이 계인의 추정오차일 경우 계인오차의 형태를  $L(j\omega)$ 로 표현하기보다는  $E(j\omega)$ 로 표현하는 것이 해석상 편리하다. 이 경우 모델링오차의 크기가 공칭플랜트와 실제플랜트사이의 절대적인 크기보다는 상대적인 크기로 표현되기 때문이다. 그러나 본 연구에서는 모델링과정중 플랜트 계인은 실험적으로도 추정가능하고, 모델링오차가 주로 직류화 모델링 과정에서 발생된 위상오차에 기인한다고 판단하여 모델링 오차의 구체적인 형태를 다음과 같은 시간지연으로 가정하였다.

$$L(j\omega) = \begin{bmatrix} e^{-j\omega T} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega T} \end{bmatrix} \quad (55)$$

여기서  $T$ 는 지연시간을 나타내며, 위의 표현은 계인변화는 없이 주파수 영역에서 위상변화 혹은 위상오차를 잘 대변할 뿐만 아니라, 설계된 제어기가 디지털로 구현될 경우 실험으로도 안정도-강인성을 판별할 수 있다는 장점이 있다. 식 (55)은 각 제어채널당 위상지연의 크기가  $-\omega T$  (rad)임을 함축하고 있다.

Fig. 12는 비례제어 및 LQG/LTR제어시 각 지연시간의 크기에 따라 안정도-강인성 판별을 한 결과를 보이고 있다. 안정한계에 도달할 경우 비례제어시는 0.02초, LQG/LTR제어시는 0.09초로 구해져 비례제어보다 LQG/LTR보상기를 적용했을 경

우 위상지연 혹은 위상오차에 훨씬 강인하다는 것을 알 수 있다. 식(9)를 이용하여 LQG/LTR제어시 이득여유를 구한 결과 15.1 dB로 구해져 비례제어시의 이득여유 5.68dB에 비해 계인변화에 대한 안정도 여유가 크게 증가됨을 확인하였다.

### 8. 실험 및 결과

본 절에서는 지금까지 설계된 LQG/LTR보상기의 성능을 비례제어시와 비교하며 실험 및 시뮬레이션을 통하여 분석한다. 비록 이론적 분석 및 설계과정은 연속시간영역에서 이루어졌지만 구현 및 실험은 축소화된 보상기를 Bilinear변환을 통해 이산화시켜 수행하였다. Fig.1은 주사루프 실험을 위한 폐회로 구성을 보이고 있으며, 제어기는 실시간 계산시간을 고려하여 Intel-80386, 80387 어셈블리 언어를 이용하여 구현하였고, 샘플링 간격은 주사제의 대역폭과 실시간 계산시간을 고려하여 0.01초로 정하였다. 그림에서 자이로의 선회 및 위치검출은 자석회전자 주위에 감겨있는 솔레노이드 코일에 의해서 이루어지며, 주사루프중 신호처리기의 각 구성요소들은 신호처리 중심주파수가 자이로 자전주파수와 동기되어 신호처리속도가 빨라야 한다는 점을 고려하여 아날로그 회로로 설계하였다.

Fig. 13은 LQG/LTR제어계의 (1,0) 단위계단입력에 대한 실험 및 모델에 의한 예측결과를 보이고 있다. 커플링에서 다소 차이를 보이고 있으나, 두 결과는 잘 일치하고 있다.

Fig. 14는 LQG/LTR제어와 비례제어시의 (1,0)의 계단입력에 대한 시간응답특성 및 해당되는 제

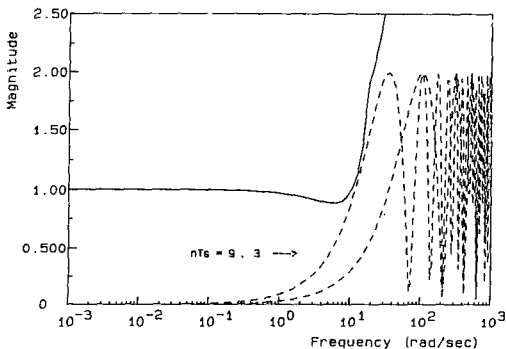


Fig. 12 Stability-robustness tests for LQG/LTR control

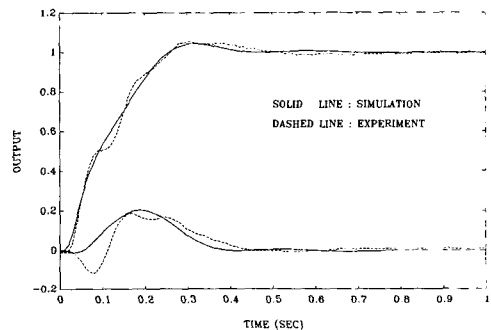


Fig. 13 Closed-loop step response of the LQG/LTR control to (1,0) step inputs

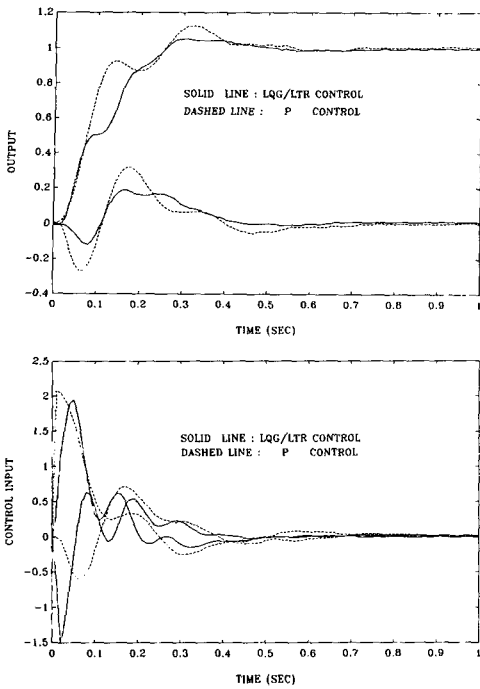


Fig. 14 Comparison of experiment results to (1,0) step inputs

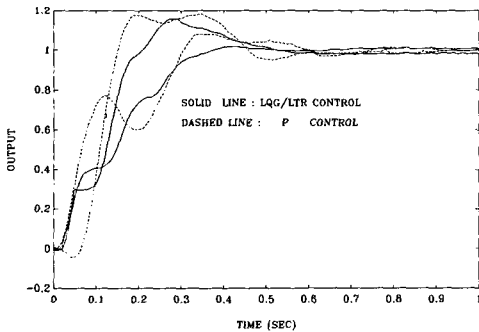


Fig. 15 Comparison of experiment results to (1,1) step inputs

어 입력 크기의 실험 결과를 각각 보이고 있다. 두 경우 제어 입력의 최대 크기는 비슷하나 LQG/LTR 제어 시 과도 응답 특성 및 커플링 감소 측면에서 비례 제어보다 더 향상된 결과를 보이고 있음을 알 수 있다.

Fig. 15는 LQG/LTR 제어와 비례 제어 시의 (1,1) 계단 입력에 대한 시간 응답 특성을 보이고 있다. 그림에서 LQG/LTR 제어 시 과도 응답 부분에서 언더슈

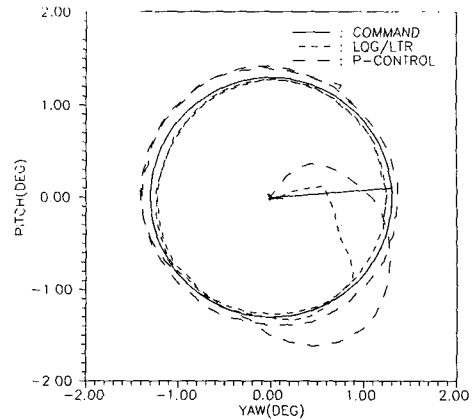


Fig. 16 Experiment results to conical scan pattern

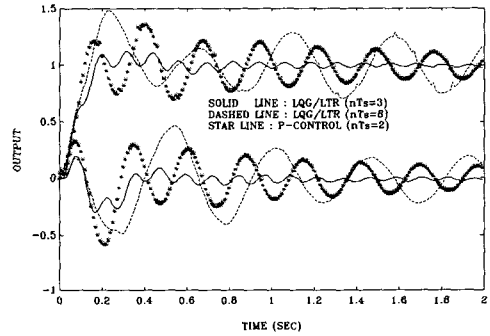


Fig. 17 Stability-robustness experiment results for time-delays

트는 없어졌으나, 다소의 진동이 존재하는 이유는 허수축에 존재했던 다변수 영점에 기인한다고 판단된다.

Fig. 16은 LQG/LTR 제어와 비례 제어 시 원형 주사 파형에 대한 실험 결과 및 기준 신호를 보이고 있다. 원형 주사에 대한 기준 신호는 다음과 같이 발생된다.

$$r_o(n) = \gamma \cos(\omega n \Delta t) \tag{56}$$

$$r_e(n) = \gamma \sin(\omega n \Delta t) \tag{57}$$

$n$ : 정수,  $\Delta t$ : 샘플링 간격

여기서 순간시계  $\gamma = 1.3$ 도 and  $\omega = 7.692$  rad/s이며, 이는 결국  $2\gamma$ 의 주사시계와 10 deg/s의 주사속도를 가지게 되는 셈이다. 그림으로부터 LQG/LTR 제어 시 명령 추종 성능이 비례 제어보다 우수함을 알 수 있다.

Fig. 17은 지연 시간의 크기를 변화시키면서

LQG/LTR제어와 비례제어의 안정도-강인성을 각각 실험한 결과이다. 안정도-강인성 해석에서 예측한 바와 유사하게 LQG/LTR제어시 샘플링 간격 8배의 시간지연, 비례제어시 2배의 시간지연시 각각 안정한계에 이르고 있음을 보이고 있다. 이 결과는 동일한 주파수에서 LQG/LTR제어제는 비례제어제보다 4배이상의 위상여유를 가지고 있음을 함축하고 있다.

### 9. 결 론

전형적인 2입력 2출력계인 탐색기 주사계의 수학적 모델을 유도하였다. 모델에 의한 예측결과는 실제 실험결과와 비교적 잘 일치하였으며, 모델링 오차는 주로 반송파를 제거한 적류화 모델로 근사화하는 과정에 기인한다고 판단된다.

제시된 설계요구조건을 만족하는 제어기 설계에 있어서 종래의 고전적인 제어방법으로는 한계가 있음을 확인하였고, 최근 다변수제어방법중 각광을 받고 있는 LQG/LTR(linear quadratic gaussian with loop transfer recovery)방법을 도입한 결과 성능 및 특히 안정도-강인성이 현저히 개선되었다. 그러나 플랜트의 다변수 영점이 허수축상에 존재하는 경우 루프전달회복을 과도하게 수행하면 보상기의 극점이 플랜트 영점으로 접근하게되어 보상기의 출력이 진동하게되므로 LQG/LTR보상기 설계에 신중을 기해야 한다.

특히 지금까지의 연구가 대부분 수학적 분석 및 이론적 예측에 국한된 반면, 본 연구에서는 내적균형법을 도입하여 설계된 LQG/LTR보상기의 차수를 축소한 후 축소차수의 보상기를 실제 구현하였다. 성능 및 안정도-강인성 문제를 실제 실험을 통하여 이론적 예측결과와 비교확인하였으며, 다소 복잡한 설계개념에도 불구하고 단계별로 설계과정을 전개하여 실제 현장에서도 충분히 적용할 수 있음을 예시하였다.

### 참고문헌

- (1) Doyle, J. C. and Stein, G., 1981, "Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis," IEEE Trans. on AC, Vol. AC-26, pp. 4~16.
- (2) Stein, G. and Athans, M., 1987, "The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design," IEEE Trans. on AC, Vol. AC-32, pp. 105~114.
- (3) Athans, M., Kapsouris, P., Kappos, E. and Spang, H. A., 1986, "Linear-Quadratic Gaussian with Loop-Transfer Recovery Methodology for the F-100 Engine," J. Guidance, Vol. 9, No. 1, pp. 45~52.
- (4) Zhang, Z. And Freudenberg, J. S., 1990, "Loop Transfer Recovery for Nonminimum Phase Plants," IEEE Trans. on AC, Vol. 35, No. 5, pp. 547~553.
- (5) White, S. A., 1973, "Dynamics of Solenoidal-Torqued Gyro-Stabilized Seeker Assembly for Guidance and Tracking," IEEE Trans. on AES, Vol. AES-10, pp. 113~122.
- (6) Maciejowski, J. M., 1988, Multivariable Feedback Design, Addison-Wisley.
- (7) 김종식, 1990, 선형 제어시스템 공학, 청문각.
- (8) Moore, B. C., 1981, "Principal Component Analysis in Linear Systems, Controllability, Observerbility and Model Reduction," IEEE Trans. on AC, Vol. AC-26, pp. 17~32.
- (9) Lehtomaki, N. A., Sandell, N. R. and Athans, M., 1981, "Robustness Results in Linear Quadratic-Gaussian Based Multivariable Control Design," IEEE Trans, on AC, Vol. AC-26, pp. 75~93.