

(論 文)

비고전적으로 감쇠하는 선형 진동시스템의 주파수응답

황재혁* · 남창호*

(1993년 3월 6일 접수)

Frequency Response of Nonclassically Damped Linear Systems

Jai-Hyuk Hwang and Chang-Ho Nam

Key Words : Frequency Response(주파수응답), Nonclassically Damped System(비고전적 감쇠 시스템), Real Valued Normal Modes(실수정규모드), Approximate Method(근사법), Modal Coupling(모달연성)

Abstract

Nonclassically damping comes from drastic variations of energy absorption rates of the materials in different parts of structures, or from the external damping sources inserted into the structures. In this study, an approximate method to calculate the frequency response of a nonclassically damped system using the real valued normal modes has been suggested. This method is superior to other approaches in respect of computational effort and accuracy. In addition, when frequency response is calculated by neglecting the off-diagonal elements of modal damping matrix, a criterion to ensure small errors is derived. It is shown that the criterion can be described as the vector sum of each modal coupling to the corresponding mode.

1. 서 론

선형진동시스템의 해를 구하는 효과적인 방법은 모달해법(modal analysis)을 이용하여 그 시스템의 운동방정식을 모달좌표(modal coordinates)의 비결합된(undamped) 방정식으로 변환시켜 구하는 방법이다. 이렇게 비결합된 운동방정식은 마치 1자유도계가 여러개 있는 것과 같으며, 1자유도계의 해법을 이용하여 해를 구한다음 각각의 해를 중첩함으로써 실제 시스템의 동적 응답을 구할 수 있다. 모달해석기법은 실수정규모드법(real normal mode method)^(1,2)과 복소수정규모드법(complex normal mode method)^(3,4)으로 나눌 수 있다. 실수정규모드법은 흔히 고전적 정규모드법(classical normal mode method)이라고도 불리며, 제산이 간

단한 장점을 갖고 있으므로 대형구조물 등 공학적 문제에 널리 이용되고 있다. 일반적으로 비감쇠시스템은 항상 실수정규모드를 갖고 있다. 그러나 감쇠력이 존재할 때 이 선형시스템은 실수정규모드를 갖을 수도 있고 또한 그렇지 않을 수도 있다. 만약 실수정규모드를 갖고 있으면 그 시스템은 고전적으로 혹은 비례적으로 감쇠되는 시스템이라 부른다. 임의의 선형 감쇠시스템에서 실수정규모드의 존재 여부를 검사하는 필요충분조건이 Caughey와 O'Kelly⁽¹⁾에 의해 유도 되었다. 만약 Caughey와 O'Kelly의 판별식이 만족되지 않으면 그 시스템은 비고전적 감쇠(nonclassical damping)을 가지고 있다고 말한다. 실제로 비고전적 감쇠현상은 구조물에 사용된 여러 재료의 에너지 흡수율에 현격한 차이가 있을 때나 외부의 감쇠장치가 부착되는 경우에 나타나게 된다.^(5,6,7)

실수정규모드법은 감쇠력이 주파수에 의존하는

*정회원, 한국항공대학교 항공기제공학과

점탄성(viscoelastic) 재료를 갖는 구조물에도 역시 적용할 수 있다. 이 경우는 매 가진주파수에 대해 등가 감쇠비를 계산해야 하며, 따라서 실제 계산량은 조금 증가하게 된다. 감쇠력이 비고전적인 경우는, Foss⁽³⁾와 Vigneron⁽⁴⁾ 등이 제안한 복소수정규 모드법을 사용하여야 한다. 그러나 복소수정규모드법은 정확한 반면에 복소수해를 구할 때 복잡하고 계산량이 많은 큰 단점을 갖고 있다. 또한 엔지니어의 관점에서 복소수정규모드법과 같은 상태공간 접근방법은 결과의 물리적 의미를 통찰하기가 쉽지 않다. 이러한 이유에 기인하여 비고전적 감쇠시스템을 해석할 때, 실수정규모드의 모달데이터를 이용하는 근사적 모달해석기법이 많이 연구되어 왔다. 예를 들면 Seireg와 Haward⁽⁶⁾는 실험적으로 얻은 주파수응답 데이터로부터 다자유도계 감쇠시스템의 수학적 모델을 세울 수 있는 근사적 정규모드법을 연구하였다. Hammill과 Andrew⁽⁹⁾는 외부 감쇠기를 갖고 있는 비감쇠 구조물의 주파수응답을 구하기 위해 부분구조해석법을 사용하였다. 이 경우 외부 감쇠장치를 부시스템(secondary system)으로 간주하고 비감쇠 구조물인 주 시스템에 receptance coupling 개념을 이용하여 연결하였다. 또한 Abhary⁽¹⁰⁾와 Sainsbury⁽¹¹⁾는 선형감쇠력을 갖는 구조물의 특정좌표에서 구조물의 receptance를 구하는 방법을 연구하였다. Wang과 Clark 그리고 Chu⁽¹²⁾는 Hammill이 제시한 방법을 이용하여 다만 외부에 부착된 강성이나 스프링을 변화시키면서, 실제 구조물의 감쇠특성의 변화를 연구하였다. Özgüven⁽¹³⁾은 임의의 한 비감쇠 고유진동수에서 운동방정식을 비결합시키기 위해 단일모드기법을 개발하였다. 그 논문에서 실제 응답은 가진모드에 속하는 모달응답으로 근사화 하였다. 또한 Özgüven^(14,15)은 비고전적으로 감쇠하는 구조물의 주파수응답을 계산할 때, 그 구조물의 비감쇠 응답과 감쇠특성을 이용하여 구하는 방법을 제안하였다. Bellos와 Inman⁽¹⁶⁾은 가상감쇠율(fictitious damping coefficient)을 이용하여 비고전적으로 감쇠하는 시스템의 주파수응답을 근사적으로 구하는 방법을 연구하였다. 그러나 이 방법은 역행렬을 사용하지 않으므로 계산량은 적은 반면, 결과의 정확도는 문제에 따라 다르며 심히 나쁜 경우도 존재한다.

본 연구에서는 비고전적 감쇠시스템의 주파수응답을 실수정규모드를 이용하여 근사적으로 구하는

방법을 제시하였다. 이 방법은 개념적으로 매우 간단하기 때문에 적용하기가 쉽고, 또한 비고전적 감쇠성분이 큰 경우에도 적용될 수 있는 장점을 갖고 있다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2절에서는 비고전적으로 감쇠하는 시스템의 주파수응답을 역행렬을 이용하여 정확하게 계산하는 방법을 간단하게 정리하였다. 이어서 실수정규모드를 이용하여 주파수응답을 근사적으로 구하는 방법을 제3절에서 유도하였다. 이 방법은 역행렬을 이용하지 않으므로 계산량을 매우 절감할 수 있으며, 또한 단순히 모드간의 연성을 무시하는 방법에 비해 정확도가 뛰어난 장점을 갖고 있다. 제4절에서는 큰 오차를 유발시키지 않고 모드간의 연성을 무시하고 주파수응답 및 시간응답을 계산할 수 있는 한 조건식을 유도하였다. 본 연구에서 얻어진 여러 이론적 결과를 설명하기 위해 한 예제가 제5절에서 소개되었다. 제6절에서는 본 연구를 통해 얻어진 결과를 요약하였다.

2. 역행렬을 이용한 방법

선형감쇠력을 갖는 진동시스템(lumped 시스템 혹은 discretized 선형시스템)의 운동방정식은 다음과 같은 미분방정식으로 나타난다.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t) \quad (1)$$

식(1)에서 M, C, K 는 각각 질량행렬, 감쇠행렬, 그리고 강성행렬을 나타내며 크기는 $n \times n$ 이다. $x(t)$ 와 $F(t)$ 는 변위벡터와 외력을 나타내고 크기는 $n \times 1$ 이다. 행렬 M, C, K 는 수동계의 경우에 대칭적이며 양한정(positive definite)하다. 이러한 사실은 Lagrangian 동역학에 깊은 관련을 두고 있다.^(17,18) 질량행렬의 대칭성은 scleronomic 시스템의 경우에, 카디시안(cartesian)좌표에서 일반좌표(generalized coordinates)로 변환과정에서 자연적으로 나타난다. 또한 질량행렬의 양한정성은 운동에너지의 성질에서 기인한다. 강성행렬의 대칭성은 임의의 평형점에서 위치에너지 함수의 선형화과정에서 자연적으로 표현되며, 감쇠행렬의 대칭성은 Rayleigh 감쇠함수의 형태에서 기인한다.

시간영역에서 주파수영역으로 변환하는 절차를 수행하면(즉 라플라스 변환후, 라플라스 변수를 $j\omega$ 으로 치환) 식(1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{x}(\omega) = H(\omega) \bar{F}(\omega) \quad (2)$$

여기서 $H(\omega)$ 는 전달함수행렬 혹은 시스템의 receptance행렬이라 부르며 다음과 같이 표현된다.

$$H(\omega) = (K - M\omega^2 + jC\omega)^{-1} \quad (3)$$

행렬 $H(\omega)$ 의 임의의 한 요소 $H_{ik}(\omega)$ 는 좌표 x_k 에 단위하중이 작용하고 다른좌표에는 하중이 작용하지 않을 때, 좌표 x_i 의 변위를 나타낸다.

식(3)이 정확한 해석적 결과를 나타내고 있지만 실제로 식(3)의 응용은 여러가지 요인에 의해 제한된다. 자유도가 큰 대형구조물의 경우, 행렬의 크기는 실제로 역행렬을 구하기에 불가능할 정도로 커진다. 또한 복소수 계수를 갖고있는 행렬이 악조건 일때 역행렬을 구하면 수치오차가 매우 커지게 된다. 식(3)은 대부분의 실험적 모달해법의 기준이 되는 표현식이나, 식(3)을 이용하여 감쇠행렬 C 를 구하는 것은 일반적으로 쉽지않다. 특히 비고전적으로 감쇠하는 시스템의 경우는 모드간의 연성으로 인해 더욱 어렵게 된다. 따라서 본 연구에서는 실수정규모드를 이용하여 비고전적으로 감쇠하는 시스템의 주파수 응답을 근사적으로 계산하는 기법을 제시하고자 한다. 이 방법은 모든 비고전적 감쇠시스템의 경우에 대해 비교적 정확하며, 계산량이 매우 작은 장점을 갖고 있다.

3. 실수정규모드를 이용한 근사적방법

본 절에서는 비고전적으로 감쇠하는 선형 진동시스템의 주파수 응답을 실수정규모드를 이용하는 근사적으로 계산하는 방법을 유도하였다. 만약 $n \times n$ 의 크기인 모달행렬을 U 라고 정의할때⁽²⁾ 행렬 U 는 식(1)에서 C 를 무시하고 얻은 고유벡터들로 구성된다. 즉

$$Ku^{(i)} = \omega_i^2 Mu^{(i)}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

식(4)에서 ω_i^2 는 고유치이며, $u^{(i)}$ 는 대응되는 고유벡터이다. 따라서 모달행렬은

$$U = [U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(n)}] \quad (5)$$

으로 구성되며 다음과 같은 성질을 갖고있다.

$$U^T M U = I_n, \quad U^T K U = \Omega^2, \quad U^T C U = \bar{C} \quad (6)$$

식(6)에서 I_n 는 항등행렬을 나타내고, Ω^2 는 대각성분이 고유치로 구성된 대각행렬이다. 즉 $\Omega^2 =$

$\text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$ 이다. 그러나 일반적으로 모달 감쇠행렬 \bar{C} 는 대각행렬이 아니다. 여기서 좌표변환 $x(t) = Uq(t)$ 을 사용하면 운동방정식(1)은 모달좌표의 방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \bar{C}\dot{q} + \Omega^2 q &= g(t), \quad q(0) = U^T M x_0, \\ \dot{q}(0) &= U^T M \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $q(t)$ 는 모달좌표이고, $g(t) = U^T F(t)$ 이다. 만약 \bar{C} 가 대각행렬이 아니면 시스템(1)은 비고전적으로 감쇠된다고 말한다. 이 경우 모달감쇠행렬 \bar{C} 의 비대각성분에 의해 식(7)은 연성을 갖게 된다. 만일 \bar{C} 가 대각행렬이면 시스템(1)은 고전적으로 감쇠된다고 하며, 고유모드는 실수로 표현되고 주파수 응답도 실수정규모드를 사용하며 매우 간단하게 표현할 수 있다. 선형진동 시스템이 비고전적으로 감쇠될때 식(7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ddot{q} + (\Lambda + R)\dot{q} + \Omega^2 q = g(t) \quad (8)$$

이 식에서 $\bar{C} = \Lambda + R$ 의 관계식을 사용하였고, Λ 는 \bar{C} 의 대각성분으로 구성된 대각행렬이며, R 은 \bar{C} 의 비대각성분으로 구성된 행렬이다. 즉 $\Lambda = \text{diag}[\bar{C}_{11}, \bar{C}_{22}, \dots, \bar{C}_{nn}] = \text{diag}[2\zeta_1\omega_1, 2\zeta_2\omega_2, \dots, 2\zeta_n\omega_n]$ 이고, $R = [\bar{C}_{ij}]$, $\bar{C}_{ii} = 0$, $i=1, 2, \dots, n$ 이다.

본 연구의 주 관심은 비고전적 감쇠시스템의 정상상태시 주파수응답을 쉽게 계산하는 방법을 연구하는데 있으므로 초기조건 x_0, \dot{x}_0 는 0으로 가정할 수 있다.

먼저 식(8)의 전달함수행렬을 $h(\omega)$ 라 정의할 때, $h(\omega)$ 와 $H(\omega)$ 의 관계식은 좌표변환 관계식 $x(t) = Uq(t)$ 를 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$H(\omega) = U h(\omega) U^T \quad (9)$$

이 식의 모달주파수응답 $h(\omega)$ 은 다음 식으로 얻어질 수 있다.

$$\bar{q}(\omega) = h(\omega) \bar{g}(\omega) \quad (10)$$

이 결과식으로 부터, 고전적으로 감쇠하는 시스템의 주파수응답은 쉽게 얻어질 수 있음을 알 수 있다. 즉 $R=0$ 일 때, 식(7)의 모든 계수가 대각행렬이므로 $h(\omega)$ 은 간단하게 계산된다. 따라서 실제 주파수응답 $H(\omega)$ 는 관계식(9)에 의해 구할 수 있다.

다음 $R \neq 0$ 일때, $h(\omega)$ 를 쉽게 구하는 방법을 제

시키고자 한다. 먼저 식(8)에서 비대각성분 R 을 무시하고 근사적으로 비결합시키면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\ddot{q}_a + \Lambda \dot{q}_a + \Omega^2 q_a = g(t), t \geq 0 \quad (11)$$

식(11)에서 q_a 는 근사화된 식의 해를 뜻한다. 식(8)에서 식(11)을 빼고, $q - q_a = e$ 라고 놓으면, 다음과 같은 오차방정식(error equation)을 얻게 된다.

$$\ddot{e} + \Lambda \dot{e} + \Omega^2 e = -R\dot{q}_a, t \geq 0 \quad (12)$$

이제 근사화에 따른 오차 e 는 무한 수열로 표시한 후, 라플라스 영역에서 그 합을 구하여 주파수응답을 계산하는 방법을 제시한다. 식(12)에 $q = e + q_a$ 를 대입하면

$$\ddot{e} + (\Lambda + R)\dot{e} + \Omega^2 e = -R\dot{q}_a, t \geq 0 \quad (13)$$

이 된다. 식(13)의 모양은 식(8)과 동일하며, 다만 q 와 $g(t)$ 대신에 각각 e 와 $-R\dot{q}_a$ 으로 대체되었다. 여기서 비대각성분 R 을 무시하는 근사적 비결합방법을 다시 적용하고, 근사화된 식의 해를 u_0 라 하면 식(13)은 다음과 같이 된다.

$$\ddot{u}_0 + \Lambda \dot{u}_0 + \Omega^2 u_0 = -R\dot{q}_a, t \geq 0 \quad (14)$$

식(13)에서 식(14)를 빼고, $e - u_0 = e_1$ 라고 놓으면 다음식을 얻는다.

$$\ddot{e}_1 + \Lambda \dot{e}_1 + \Omega^2 e_1 = -R\dot{e}, t \geq 0 \quad (15)$$

이 식에 $e = e_1 + u_0$ 을 대입하면

$$\ddot{e}_1 + (\Lambda + R)\dot{e}_1 + \Omega^2 e_1 = -R\dot{u}_0, t \geq 0 \quad (16)$$

근사적 비결합 방법을 다시 식(16)에 적용하고, 그 결과식의 해를 u_1 이라 하면 식(16)은 다음과 같이 된다.

$$\ddot{u}_1 + \Lambda \dot{u}_1 + \Omega^2 u_1 = -R\dot{u}_0, t \geq 0 \quad (17)$$

식(16)에 적용한 비결합 방법에 의한 오차를 $e_1 - u_1 = e_2$ 라 할때, e_2 는 다음 식을 만족한다.

$$\ddot{e}_2 + (\Lambda + R)\dot{e}_2 + \Omega^2 e_2 = -R\dot{u}_1, t \geq 0 \quad (18)$$

그러므로, 모든정수 $k \geq 1$ 에 대해 다음과 같은 반복법을 정의 할 수 있다.

$$e_k = e_{k-1} - u_{k-1}, e_0 = e \quad (19)$$

$$\ddot{u}_k + \Lambda \dot{u}_k + \Omega^2 u_k = -R\dot{u}_{k-1}, t \geq 0 \quad (20)$$

$$\ddot{e}_k + (\Lambda + R)\dot{e}_k + \Omega^2 e_k = -R\dot{u}_{k-1}, t \geq 0 \quad (21)$$

여기서 u_0 는 식(14)에 의해 계산 할 수 있다. 식(19)로부터

$$e - \lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (e_{k-1} - e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k-1} \quad (22)$$

식(22)에서 모든 u_k 는 비결합된 계의 해이므로 매우 쉽게 계산할 수 있다. 또한 k 가 증가함에 따라 e_k 가 0으로 수렴함을 미분방정식의 유일성을 이용하여 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 오차 e 는 다음과 같이 표현된다.

$$e = q - q_a = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad (23)$$

식(23)에서 응답 q 는

$$q = q_a + \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad (24)$$

으로 나타낼 수 있고, $q_a, u_k, k=1, 2, \dots, \infty$ 은 모두 비결합된 방정식의 해이다. 식(11) 및 식(14) 그리고 식(20)을 이용하여 주파수 응답을 구하면

$$h(\omega) = [I_n + z(\omega) + Z^2(\omega) + \dots]G(\omega) \quad (25)$$

이 되고, 여기서 $G(\omega)$ 와 $Z(\omega)$ 는 다음과 같이 정의되는 행렬이다.

$$G(\omega) = (\Omega^2 - I_n \omega^2 + j\Lambda \omega)^{-1} \quad (26)$$

$$Z(\omega) = -j\omega G(\omega)R \quad (27)$$

식(26)은 괄호안의 모든행렬이 대각행렬이므로 쉽게 역행렬을 구할 수 있다. 따라서 식(25)는 식(9)과 함께 비고전적 감쇠시스템의 주파수응답을 계산하는 방법이 된다. 본 연구에서 제시한 방법은 식(3)과는 달리 역행렬의 방법을 사용하지 않으므로 계산량이 매우 적고 비고전적 감쇠시스템의 모달주파수응답을 쉽게 계산할 수 있다. 일반적으로 행렬 $Z(\omega)$ 의 놈(norm)이 1보다 적으므로 식(25)는 빠르게 수렴하는 수열이다. 행렬 $Z(\omega)$ 가 영행렬(zero matrix)될 경우는 진동시스템이 고전적으로 감쇠되는 경우이며, 실수모드간에 연성이 없는 경우이다. 일반적으로 식(25)에서 수열의 두번째항 혹은 세번째 항까지만 계산하여 전달함수를 구하면 식(3)에서 역행렬을 통해서 구한 정확한 전달함수에 접근한다. 만약, 식(25)에서 전달함수의 오차를 $\epsilon \|G(\omega)\|$ 의 범위 내로 줄이고자 할 때 식(25)에서 계산되어야 할 항의 수는 다음과 같이 유도된다.

$$N \geq 1 \frac{\ln[\varepsilon(1 - \|Z(\omega)\|)]}{\ln\|Z(\omega)\|} \quad (28)$$

식(28)에서, ε 는 허용오차를 기술하는 임의의 상수이며, N 는 허용오차 범위내에 들기 위해 계산에 고려해야 할 항의 수를 뜻하며, $\|Z(\omega)\|$ 는 식(27)에서 정의한 행렬 $Z(\omega)$ 의 유도 놈(induced-norm)이다. $\|Z(\omega)\|$ 를 계산하는 방법은 여러가지 있으며, 참고문헌(19)의 식(25)와 같은 방법에서는 $\|Z(\omega)\|$ 가 모달감쇠행렬 \bar{C} 의 대각성분과 비대각성분의 비로 표현된다. 예를 들어 $\|Z(\omega)\| = 0.2$ 그리고 $\varepsilon = 0.05$ 혹은 5%일 때 $N = 2$ 가 된다. 만일 식(25)에서 계산해야 될 항의 수를 증가시키면 정확도는 얼마든지 증가시킬 수 있다. 다음 절의 예제에서도 언급되었지만 본 연구에서 제시한 방법은 자유도가 큰 계의 주파수응답을 계산할 때 유용성이 크게 된다.

4. 비대각성분에 의한 모달연성해석

만일 식(8)의 모달감쇠행렬의 비대각성분을 무시하고 주파수응답이나 시간응답을 구하면 전 절에서 언급한 모드간의 연성효과를 고려하지 않음으로 인해 오차가 발생한다. 그러나 이러한 방법은 계산이 간편하므로 공학적응용에서 보편적으로 많이 사용되고 있다. 따라서 본 절에서는 모달감쇠행렬의 비대각성분에 의한 모달연성을 자세히 해석하고자 한다. 이 해석은 단순히 임의의 두 모드간의 연성에 관한 것⁽¹⁹⁾이 아니라, 다른 모든 모드가 임의의 한 모드에 미치는 통합적 연성을 다룬다. 식(8)의 외력이 조화함수일 때 $g(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$g(t) = au(t) \quad (29)$$

이 식에서 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 그리고 $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ 는 0이 아닌 상수이다. 또한 스칼라함수 $u(t)$ 는 크기가 1인 조화함수이다. 식(7)로부터, i 번째 모달좌표의 방정식은 다음과 같이 나타난다.

$$\ddot{q}_i + \bar{c}_{ii}\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \sum_{k \neq i}^n \bar{c}_{ik} \dot{q}_k = a_i u(t), \quad t \geq 0 \quad (30)$$

식(30)에 라플라스 변환을 취한 후, $s = j\omega$ 을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$[\omega_i^2 - \omega^2 + j\omega(\bar{c}_{ii} + \sum_{k \neq i}^n \bar{c}_{ik} \frac{\bar{q}_k(\omega)}{\bar{q}_i(\omega)})] \bar{q}_i(\omega) = a_i \bar{u}(\omega) \quad (31)$$

여기서, $\bar{q}_i(\omega)$ 및 $\bar{u}(\omega)$ 는 각각 $q_i(t)$, $u(t)$ 의 라플라스 변환후 $s = j\omega$ 로 치환한 것이다. 라플라스 변수를 복소수 $j\omega$ 로 취했기 때문에 모든 $\bar{q}_i(\omega)$ 는 복소수 값을 갖게 된다. 여기서 식(31)의 비고전적 감쇠를 나타내는 항을 다음과 같이 정의한다.

$$p_i(\omega) = \sum_{k \neq i}^n \bar{c}_{ik} \frac{\bar{q}_k(\omega)}{\bar{q}_i(\omega)} \quad (32)$$

여기서 $p_i(\omega)$ 는 비고전적계수(nonclassical factor)라 부르며, 고전적으로 감쇠하는 시스템의 경우 $p_i(\omega)$ 는 0이 된다. 모든 $\bar{q}_i(\omega)$ 는 입력 $\bar{u}(\omega)$ 에 항상 의존하지만, 비고전적 계수 $p_i(\omega)$ 는 입력 $\bar{u}(\omega)$ 에 의존하지 않는다. 이를 증명하기 위해, 식(7)을 라플라스 변환시키고, 라플라스 변수 s 를 $j\omega$ 로 치환하면

$$(\Omega^2 - I_n \omega^2 + jC\omega) \bar{q}(\omega) = a \bar{u}(\omega) \quad (33)$$

이 되고, 따라서 다음식을 얻게 된다.

$$\bar{q}(\omega) = (\Omega^2 - I_n \omega^2 + jC\omega)^{-1} a \bar{u}(\omega) \quad (34)$$

만일 식(34)의 $(\Omega^2 - I_n \omega^2 + jC\omega)^{-1} a$ 의 i 번째 요소를 $Y_i(\omega)$ 라 정의하면 $Y_i(\omega)$ 는 다만 시스템의 변수와 a 에 의존하고, 입력 $\bar{u}(\omega)$ 에는 의존하지 않는다. 다음 관계식 $\bar{q}_i(\omega) = Y_i(\omega) \bar{u}(\omega)$ 을 이용하여

$$\frac{\bar{q}_k(\omega)}{\bar{q}_i(\omega)} = \frac{Y_k(\omega)}{Y_i(\omega)} \quad (35a)$$

을 얻게 되고, 비고전적계수 $p_i(\omega)$ 는 입력에 무관함을 알 수 있다. 즉

$$p_i(\omega) = \sum_{k \neq i}^n \bar{c}_{ik} \frac{Y_k(\omega)}{Y_i(\omega)} \quad (35b)$$

이제 식(31)에서 비고전적계수 $p_i(\omega)$ 을 이용하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{q}_i(\omega) = \frac{a_i}{\omega_i^2 - \omega^2 + j(\bar{c}_{ii} + p_i(\omega))\omega} \cdot \bar{u}(\omega) \quad (36)$$

식(36)과 같은 모양의 $\bar{q}_k(\omega)$ 를 식(31)에 대입하고 $\bar{q}_i(\omega)$ 에 대해 정리하면, 다음과 같은 i 번째 모달좌표의 주파수영역의 응답을 얻게 된다.

$$\bar{q}_i(\omega) = \frac{a_i}{\omega_i^2 - \omega^2 + j\bar{c}_{ii}\omega}$$

$$\left\{ 1 - \sum_{k=1}^n \frac{a_k/a_{ij}\omega \tilde{c}_{ik}}{\omega_k^2 - \omega^2 + j(\tilde{c}_{kk} + p_k(\omega))\omega} \right\} \bar{u}(\omega) \quad (37)$$

식(37)도 비고전적으로 감쇠하는 시스템의 주파수 응답을 계산하는 방법으로 활용할 수 있으나, $p_i(\omega)$ 을 계산할 때 역행렬을 구해야 하는 절차가 포함되므로 계산량의 관점에서 효율적이지 못하다. 그러나, 식(37)의 증괄호의 두번째 항은 다른 모든 모드가 i 번째 모드에 미치는 연성의 효과로 생각할 수 있다. 따라서 그 항이 1보다 매우 작을 때 비대각성분을 무시하고 주파수응답이나 시간응답을 구하는 방법이 정확도를 유지할 수 있다. 이제 그 항을 비고전적지수(nonproportionality index) $\Gamma_i(\omega)$ 라고 정의할 때

$$\Gamma_i(\omega) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{a_k/a_{ij}\omega \tilde{c}_{ik}}{\omega_k^2 - \omega^2 + j(\tilde{c}_{kk} + p_k(\omega))\omega} \right] \quad (38)$$

여기서 큰 오차를 유발하지 않고 근사적 비결합방법(모달감쇠행렬의 비대각성분을 무시하는 방법)을 적용할 수 조건은 다음과 같이 요약할 수 있다.

$$\Gamma_i \ll 1, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (39)$$

식(38)의 괄호 안의 항은 일반적으로 복소수값이며, 따라서 $n-1$ 개의 복소수합은 i 번째 모드에 다른 모드들이 미치는 영향의 합을 기술하고 있다. 복소수의 벡타합의 계산에서는 각 요소의 크기뿐 아니라 방향도 중요하다. 즉 i 번째 모드에 대한 다른 각 모드의 영향의 크기가 비슷하더라도 그 방향들이 반대가 되면 서로 상쇄되어 최종 벡타합은 매우 적은 값이 되고, 오차도 적게 된다. 반대로 다른 각 모드의 영향이 비록 적더라도 그 방향들이 일치하면 모드의 연성은 커지고 오차도 커지게 된다. 이러한 효과는 다음 절의 예제에서 잘 설명되고 있다. 만일 시스템(7)이 고전적으로 감쇠하는 경우에는, $\tilde{c}_{ik}=0, i \neq k, i, k=1, 2, \dots, n$ 이므로 $\Gamma_i(\omega)=0$ 이 된다. 지금까지 여러 학자들에 의하여 여러개의 비고전적지수가 제안되었지만, 복소수개념을 이용한 비고전적지수는 본 연구의 결과가 처음이라 생각된다. 또한 본 연구를 통하여 식(35b)보다는 식(38)의 비고전적지수가 비고전적으로 감쇠하는 시스템의 모달연성을 설명하는 중요한 관계식임을 알 수 있다.

5. 예 제

본 절에서는 지금까지 얻어진 결과를 설명하기

위해 자유도가 6인 한 예제를 사용하였다. 그러나 본 연구의 유용성은 자유도가 큰 동적시스템에 있다. 다음과 같은 질량행렬 M , 강성행렬 K , 감쇠행렬 C 를 갖는 경우를 고려하면

$$M=I \text{ (크기가 6인 항등행렬)}$$

$$K = \begin{bmatrix} 5.321 & -0.481 & 1.315 & -0.962 & 2.121 & -4.335 \\ -0.481 & 9.817 & -2.884 & 2.212 & 1.935 & -1.260 \\ 1.315 & -2.884 & 7.965 & -2.334 & 2.600 & -0.777 \\ -0.962 & 2.212 & -2.334 & 15.917 & -1.333 & 1.236 \\ 2.121 & 1.935 & 2.600 & -1.333 & 28.095 & -3.296 \\ -4.335 & -1.260 & -0.777 & 1.236 & -3.296 & 25.715 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.515 & 0.630 & 0.354 & 0.270 & -0.213 & -0.223 \\ 0.630 & 2.030 & -0.063 & -0.701 & 0.553 & 0.150 \\ 0.354 & -0.063 & 2.410 & -0.652 & 0.449 & -0.052 \\ 0.270 & -0.701 & -0.652 & 3.012 & -0.810 & 0.161 \\ -0.213 & 0.553 & 0.449 & -0.810 & 1.503 & -0.112 \\ -0.223 & 0.150 & -0.052 & 0.161 & -0.112 & 0.854 \end{bmatrix}$$

예제에서 사용한 모든 행렬은 대칭이며 양한정이다. 본 예제에서 고려한 시스템의 실수정규모드와 고유진동수를 계산하면 다음과 같다.

$$U = \begin{bmatrix} 0.9461 & 0.2048 & -0.1361 & 0.0658 & -0.1112 & -0.1666 \\ -0.0102 & 0.5896 & 0.6989 & -0.3986 & 0.0119 & -0.0696 \\ -0.2711 & 0.7627 & -0.4870 & 0.3030 & 0.0481 & -0.1162 \\ 0.0038 & 0.0361 & -0.5045 & -0.8529 & 0.0216 & 0.1274 \\ -0.0292 & -0.1425 & -0.0207 & -0.0935 & 0.6131 & -0.7706 \\ 0.1746 & 0.0842 & 0.0301 & 0.0939 & 0.7803 & 0.5864 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2=4.08, \omega_2^2=5.407, \omega_3^2=10.212,$$

$$\omega_4^2=17.572, \omega_5^2=23.71, \omega_6^2=31.849$$

여기서 실수정규모드는 질량행렬에 대해 정규화시켜 구하였다. 본 예제는 비고전적으로 감쇠하는 시스템($M^{-1}CM^{-1}K \approx M^{-1}KM^{-1}C$)의 경우이므로 실수정규모드는 감쇠행렬 C 를 대각행렬화 하지 못한다. 즉,

$$\tilde{C} = U^T C U =$$

$$\begin{bmatrix} 1.3214 & 0.4292 & 0.1622 & -0.6534 & -0.4209 & 0.1238 \\ 0.4292 & 2.1905 & 0.1385 & 0.6320 & 0.2818 & -0.7603 \\ 0.1622 & 0.1385 & 2.2501 & 0.4387 & 0.3804 & -0.5905 \\ -0.6534 & 0.6320 & 0.4387 & 2.4369 & 0.2023 & -0.8114 \\ -0.4209 & 0.2818 & 0.3804 & 0.2023 & 1.0804 & -0.3384 \\ 0.1238 & -0.7603 & -0.5905 & -0.8114 & -0.3384 & 1.7747 \end{bmatrix}$$

이제 비고전적으로 감쇠하는 이 시스템의 주파수 응답을 4가지 방법으로 구한 결과를 Fig. 1~3에

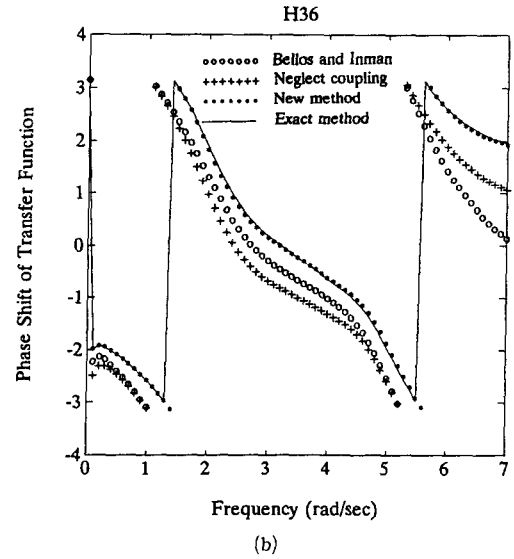
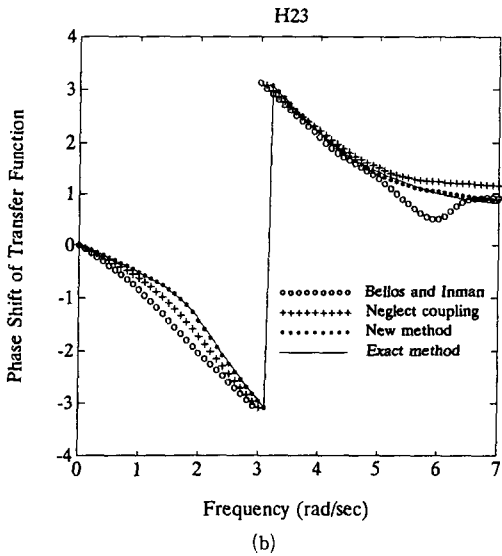
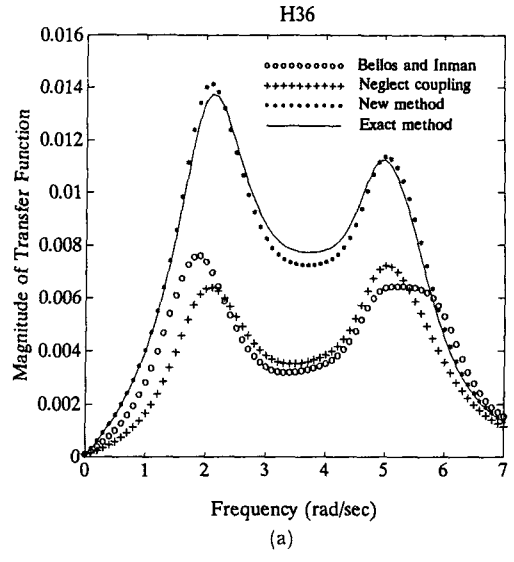
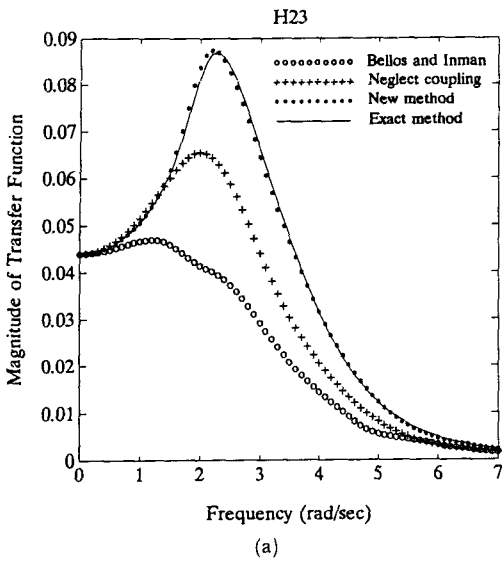
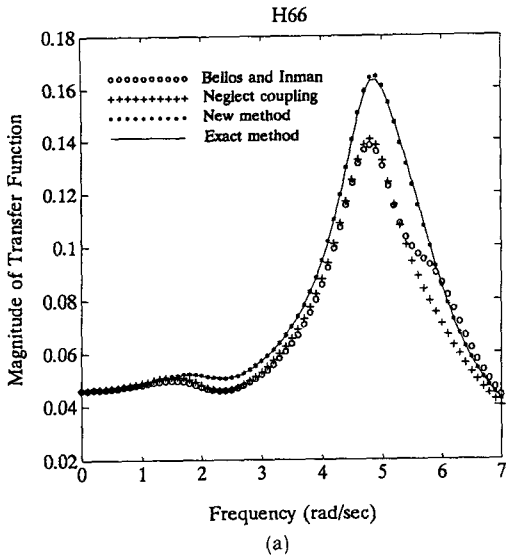


Fig. 1 (a) Magnitude of frequency response $H_{23}(\omega)$
 (b) Phase shift of frequency response $H_{23}(\omega)$

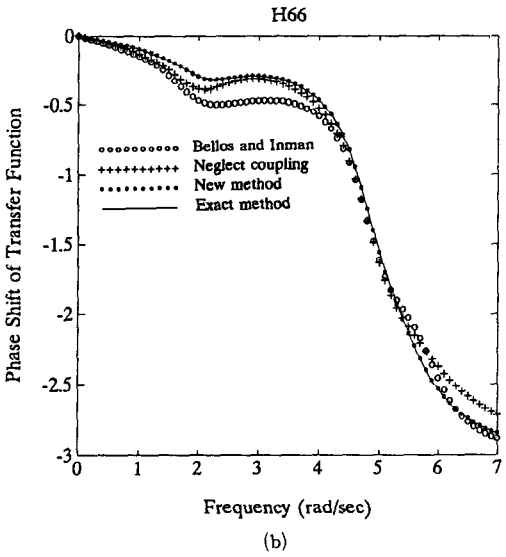
Fig. 2 (a) Magnitude of frequency response $H_{36}(\omega)$
 (b) Phase shift of frequency response $H_{36}(\omega)$

서 나타내었다. 본 예제에서 사용한 방법은 역행렬을 이용한 정확한 방법과 모달감쇠행렬의 비대각성분을 무시하고 구하는 방법, 그리고 제 3방법으로는 Bellos와 Inman⁽¹⁶⁾이 제시한 방법, 그리고 본 연구에서 제시한 새로운 방법이다. 본 연구에서 제시한 방법을 적용할 때, 식(25)에서 세항만 계산하였다. Fig. 1~3에서 보듯이 정확도 측면에서 본 연구에서 제시한 방법은 매우 우수하다. 또한 역행

렬을 사용하지 않기 때문에 시스템의 자유도가 커질수록 계산량은 매우 절감된다. 모달감쇠행렬의 비대각성분을 무시하는 방법은 계산이 간단하여 실제 공학적 응용에서 많이 사용하고 있다. 그러나, 모달감쇠행렬의 비대각성분은 모드간의 연성을 뜻하므로, 이를 무시하면 계산량이 매우 적은 반면에 주파수응답에서 오차가 매우 크다. 본 예제의 경우, $|H_{36}(\omega)|$ 에서 오차는 약 50% 정도가 된다.



(a)



(b)

Fig. 3 (a) Magnitude of frequency response $H_{66}(\omega)$
(b) Phase shift of frequency response $H_{66}(\omega)$

Bellos와 Inman⁽¹⁶⁾이 제시한 방법은 역행렬을 사용하지 않으므로 계산량은 적으나, 정확도가 문제에 따라 일정하지 않다. 본 예제에서, 이 방법은 비대각성분을 무시한 경우처럼 오차가 크다. 주파수응답에 대한 각 방법의 오차는 전달함수행렬의 요소에 따라 조금씩 다르며, 본 예제에서는 $H_{66}(\omega)$ 에 대한 각 방법의 오차가 가장 작다. 이 예제를 통하여 본 연구에서 제시한 계산방법은 정확도 및 계산량 측면에서 다른 모든 방법보다 매우 우수함을 보

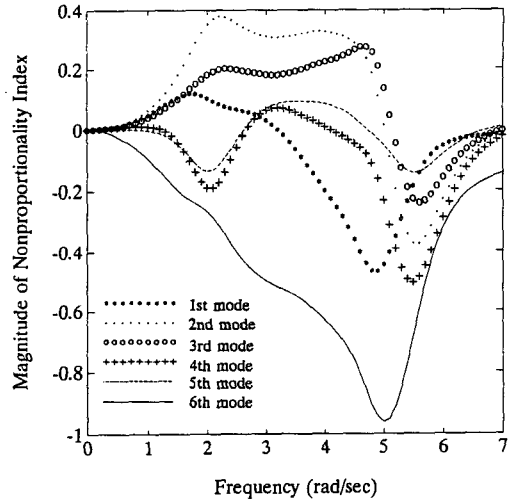


Fig. 4 Modal nonproportionality index Γ_i

여 주고 있다.

식(38)을 사용하여 각 모드에 대한 비교전적지수 Γ_i 를 계산하였으며, 그 스펙트럼을 Fig. 4에 나타내었다. 모드간의 연성의 합을 나타내는 비교전적지수 Γ_i 중 Γ_3 이 대부분의 주파수영역에서 가장 큰 값을 갖고 있으며, Γ_5 가 가장 적은 값을 갖고 있다. 그러나 모드간의 연성의 직접적인 연결부분인 모달감쇠행렬의 크기는 여섯번째 모드에서나 다섯번째 모드에서 비슷하다. 이것은 다섯번째 모드에 대한 각 모드의 연성이 서로 상쇄되어 벡터의 합이 적은 값을 유지하기 때문이며, 반대로 각 모드와 여섯번째 모드간의 연성은 서로 상쇄되지 않고 합하여져 큰 값을 유지하기 때문이다. 이 사실에 근거할 때 모달감쇠행렬의 크기에만 의존하여 모달연성의 크기를 평가하는 것은 오류를 낼 수 있음을 주의해야 한다. 비교전적지수 Γ_i 는 가진주파수에 따라 다르며, 가진주파수가 시스템의 공진주파수의 부근에 이를때 연성은 커지게 된다. 즉 모드간의 연성이 가진주파수에 의존하고 있음을 알 수 있다. 각 모드에 대한 비교전적지수 Γ_i 가 1보다 매우 적을 때 큰 오차를 유발시키지 않고 근사적 비결합 방법을 적용할 수 있다. 본 예제의 경우 Fig. 4에서 보듯이 비교전적지수 Γ_i 는 대부분의 주파수영역에서 매우 크다. 따라서 근사적 비결합 방법 즉 모달감쇠행렬의 비대각성분을 무시하고 주파수응답을 구하는 방법을 적용했을때 매우 큰 오차가 존재함을 확인할 수 있다.

6. 결 론

구조물에 사용하는 여러 재료의 에너지 흡수율에 현격한 차이가 있을 때나 외부의 감쇠장치가 부착되는 구조물은 대부분 비고전적으로 감쇠하는 시스템이 된다. 비고전적으로 감쇠되는 시스템은 모달 감쇠행렬의 비대각성분에 기인하여 모드간의 연성이 존재하며, 이로 인해 주파수응답을 계산할 때 계산량이 많게 된다. 본 연구에서는 이러한 비고전적으로 감쇠하는 시스템의 주파수응답을 실수정규모드를 이용하여 근사적으로 구하는 방법을 제시하였다. 본 연구의 주 결과는 다음과 같이 요약되며, 비고전적으로 감쇠되는 어떠한 시스템에도 적용된다.

(1) 본 연구에서 유도한 식(25)는 실수정규모드를 이용하여 비고전적으로 감쇠되는 시스템의 주파수응답을 근사적으로 구하는 식이다. 이 방법은 역행렬을 사용하지 않음으로 인해 계산량이 매우 적고, 또한 식(25)의 처음 두항 혹은 세항만 고려하여도 정확도는 매우 우수하다. 예제에서 지적했듯이, 본 연구에서 유도한 식(25)는 계산량과 정확도 관점에서 다른 어떤 방법보다 우수하다.

(2) 대부분의 공학응용에서 보편적으로 받아들여지고 있는 비대각성분을 무시하고 주파수응답이나 시간응답을 구하는 방법은 어떤 경우 많은 오차를 유발할 수 있다. 본 연구에서 큰 오차를 유발시키지 않고 이 방법을 사용할 수 있는 한 조건식(39)을 유도 하였다. 이 조건식은 모드간의 연성의 벡터합으로 표현된다. 따라서 식(38)은 비고전적으로 감쇠하는 시스템의 모달연성을 설명하는 중요한 관계식으로 활용할 수 있다.

참고문헌

(1) Caughey, T. K. and O'Kelly, M. E. J., 1965, "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems," ASME J. Appl. Mech., Vol. 32, pp. 583~588.
 (2) Meirovitch, L., 1967, "Analytical Method in Vibrations," Macmillan, New York.
 (3) Foss, K. A., 1958, "Co-ordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems," ASME J. Appl. Mech., Vol.

25, pp. 361~364.
 (4) Vigneron, F. R., 1986 "A Natural Modes Model and Identities for Damped Linear Structures," ASME J. Appl. Mech., Vol. 53, pp. 33~38.
 (5) Clough, R. W. and Mojtahedi, S., 1988, "Earthquake Response Analysis Considering Non~proportional Damping," Earthquake Eng. Struc. Dyn., Vol. 16, pp. 29~43.
 (6) Tsai, H. and Kelly, J. M., 1988, "Nonclassical Damping in Dynamic Analysis of Base-Isolated Structures with Internal Equipment," Earthquake Eng. Struc. Dyn., Vol. 16, pp. 29~43.
 (7) Chandrasekaran, A. R., Paul, D. K. and Agarwal, B. L., 1992, "Complex Eigenproblem for Flutter Analysis of Structures," Computers and Structures, Vol. 43, pp. 737~740.
 (8) Seireg, A. and Haward, L., 1967, "An Approximate Normal Mode Method for Damped Lumped Parameter Systems," ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 597~604.
 (9) Hammill, W. J. and Aadrew, C., 1971, "Receptance of Lumped Parameter System Containing Discrete Number of Sources," Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 13, pp. 296~301.
 (10) Abhary, K. G., 1975, "The Development and Application of Substructuring Technique for Dynamic Analysis of Structures," Ph. D. Dissertation, University of Manchester, Institute of Science and Technology.
 (11) Sainsbury, M. G., 1976, "Vibration Analysis of Damped Complex Structures," Ph. D Dissertation, Imperial College of Science and Technology.
 (12) Wang, B. P., Clark, G. and Chu, F. H., "Structural Dynamic Modifications using Modal Analysis Data," Proceedings of the Third International Modal Analysis Conference, pp. 42~45.
 (13) Özgüven, H. N. and Cowley, A., 1981, "Receptance of Nonproportionally and Continuously Damped Plates-Equivalent Damper Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 76, pp. 23~41.
 (14) Özgüven, H. N., 1982, "Receptance of Non-

- proportionally and Continuously Damped Plates -Reduced Dampers Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 85, pp. 383~395.
- (15) Özgüven, H. N., 1984, "A New Method for Harmonic Response of Nonproportionally Damped Structures using Undamped Modal Data," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 117, pp. 313~326.
- (16) Bellos, J. and Inman, D. J., 1990, "Frequency Response of Non-Proportionally Damped, Lumped Parameter, Linear Dynamic Systems," *ASME J. Vibration and Acoustics*, Vol. 112, pp 194~201.
- (17) Greenwood, D. T., 1977, "Classical Dynamics," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- (18) Rosenberg, R. M., 1977, "Analytical Dynamics of Discrete Systems," Plenum, New York.
- (19) 황재혁, 1992, "비고전적으로 감쇠하는 선형 진동시스템의 근사해의 오차한계에 관한 연구," *한국항공우주학회지*, 제20권 3호, pp. 87~96.