

〈論 文〉

## 해석해를 이용한 단순볼록 다각형에서의 라플라스방정식의 해법

김윤영\* · 윤민수\*\*

(1993년 1월 27일 접수)

### A Solution Procedure Based on Analytical Solutions for Laplace's Equation on Convex Polygons

Yoon Young Kim and Min Su Yoon

**Key Words :** Laplace's Equation(라플라스방정식), Analytic Solution(해석해), Simply-Connected Region(단순연결영역), Heat Transfer(열전달)

#### Abstract

Laplace's equation is, perhaps, the most important equation, which governs various kinds of physical phenomena. Due to its importance, there have been several numerical techniques such as the finite element method, the finite difference method, and the boundary element method. However, these techniques do not appear very effective as they require a substantial amount of numerical calculation. In this paper, we develop a new most efficient technique based on analytic solutions for Laplace's equation in some convex polygons. Although a similar approach was used for the same problem, the present technique is unique as it solves directly Laplace's equation with the utilization of analytical solutions.

#### 1. 서 론

라플라스방정식은 공학 전반분야에 걸쳐 가장 중요한 방정식 중의 하나로서 정상상태 열전달 문제, 포텐셜 유동에 관한 문제, 정전자기장 문제, 축의 비틀림 문제 등의 지배 방정식이다. 일반 형상을 갖는 영역에서의 라플라스방정식의 해를 구하는 방법으로는 등각사상(conformal mapping)에 의한 해법,<sup>(1)</sup> 복소변수를 이용한 변환에 의한 해법,<sup>(2)</sup> 경계요소법<sup>(3-5)</sup>이나 유한요소법,<sup>(6)</sup> 또는 유한 차분법<sup>(7)</sup> 등의 수치해법들이 알려져 있다. 그러나 해석해를 활용하여 복잡한 형상의 문제를 다룰 수 있는

기법은 별로 알려져 있지 않다.

최근 Bird와 Steele<sup>(8)</sup>은 여러 개의 구멍을 갖는 원형영역에서 해석해를 바탕으로 하면서, 푸리에 시리즈를 이용하여 라플라스방정식을 푸는 기법을 제시하였는데, 그들의 해석법이 그린(green)함수법<sup>(9)</sup>이나, 뫼비우스 변환법<sup>(10)</sup> 등보다는 물론이거니와 기존의 수치해법보다 훨씬 효율적임을 여러가지 실험을 통해 보여주었다. 또한 이 방법은 복잡한 영역도 몇 개의 대형요소로만 분할하여 해석하기 때문에, 해석 데이터 입력도 매우 단순한 장점이 있다. 그러나 Bird와 Steele은 경계면이 순수한 원일 경우만 다루었기 때문에 직선경계부를 갖는 영역에는 적용될 수 없었다.

직선 경계부를 갖는 형상에 대한 해석을 위해, 최근 Kang<sup>(11)</sup>은 Bird와 Steele의 방법과 유사한 방

\*정회원, 서울대학교 기계설계학과

\*\*서울대학교 기계설계학과 대학원

법을 시도하여 비교적 만족스러운 결과를 얻었다. 그러나 Kang은 라플라스방정식의 해석시 몇가지 수학적 어려움으로 말미암아, 라플라스방정식을 직접 해석하지 못하고, 수정된 방정식, 즉 헤름홀쯔 방정식을 해석하였는데 그는 라플라스방정식의 해를 헤름홀쯔방정식의 점근해로 간주하여 근사적으로 구하였다.

Kang의 기법에서는 헤름홀쯔방정식에 대한 해석해가 활용되었으나 직접 라플라스방정식이 다루어지지 않았기 때문에 이론적이나 수치적으로나 분명한 한계가 있음을 쉽게 알 수 있다. 따라서 본 논문에서는 이러한 문제점을 근본적으로 해결하여, 직선경계부를 갖는 영역에서 직접 라플라스방정식을 푸는 기법을 개발하였다.

비록 이 논문에서는 비교적 단순한 영역(3~5각형)에 대한 해석법만 제시하고 있지만, 일반적 형상을 갖는 영역도 매우 큰 3~5각형으로 분할하여 해석될 수 있기 때문에 본 기법의 활용도가 매우 높다.<sup>(12)</sup> 본 기법에서 가장 중요한 관건은 어떠한 해석해를 선택하느냐에 달려 있는데 이 기법에서 채택된 해석해의 조합들은 이 연구에서 처음 제시되는 것으로 매우 만족할만한 수치결과를 얻었다.

## 2. 볼록 다각형에서 해법의 개발

볼록다각형에서의 해석기법을 확립하기 위해, 먼저 잘 알려진 라플라스방정식의 일반해를 살펴보고자 한다. 라플라스방정식이 지배하는 여러가지 공학문제 중 편의상 정상상태의 열전달문제에 대해서 해석을 수행코자한다. 열전달문제의 지배방정식은 다음과 같으며,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0 \tag{1}$$

여기서  $X, Y$ 는 직교좌표를 나타내고  $T$ 는 정상상태의 온도 분포를 나타낸다.

지배방정식을 엄밀하게 만족시키는 일반해 중에서, 본 논문에서는 다음과 같은 두가지 형태의 엄밀해를 사용하기로 한다.

$$Re(z^m), \text{ 또는 } Im(z^m) \tag{2a}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \cos \mu x \\ \sin \mu x \end{matrix} \right\} \cdot e^{\pm \mu y} \tag{2b}$$

여기서  $z = x + iy$  ( $i = \sqrt{-1}$ ),  $m$ 은 정수이며,  $\mu$ 는

실수이다. 먼저 식(2b)의 특별한 경우인 다음과 같은 해를 고려해 보자.

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n\pi y}{L}} \tag{3a}$$

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n\pi y}{L}} \tag{3b}$$

여기서 식(3a)는 반평면(half-space) 상에서,  $x$ 에 대해 대칭인 온도 분포를, 식(3b)는  $x$ 에 대해 비대칭인 온도 분포를 나타낸다.

식(3a)와 식(3b)는 각각  $y \geq 0, 0 \leq x \leq L$ 인 반무한띠(semi-infinite strip)에서 다음의 식(4a)와 식(4b)의 경계조건을 만족시키는 해로 간주할 수도 있다.

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x=0, y) = \frac{\partial T}{\partial x}(x=L, y) = 0 \tag{4a}$$

$$T(x=0, y) = T(x=L, y) = 0 \tag{4b}$$

또한 식(3a)나 식(3b)는 주어진  $y$ 에 대해 직교성을 가지는 푸리에 사인과 코사인 시리즈로서, 앞으로 우리가 다루고자 하는 다각형 영역에서의 시도해로서 이용될 것이다.

어떤 형태의 시도함수를 이용하든지 그 결과가 물리적으로 타당하려면 경계부를 따르는 열전달율의 총합이 "0"이 되어야 하는 다음의 조건을 만족시켜야함은 이미 잘 알려져 있는 사실이다.

$$\oint_{\partial D} q ds = 0 \tag{5}$$

여기서  $ds$ 는 경계부를 따르는 미소 길이이며  $q$ 는 다음과 같이 정의된 단위길이당 받는 열전달율이다.

$$q = -k \nabla T \cdot \mathbf{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \tag{6}$$

여기서  $k$ 는 열전도계수(thermal conductivity)이며  $\mathbf{n}$ 은 경계부 바깥쪽을 수직으로 향하는 단위벡터이다.

식(3a)와 (3b)로 표시된 온도분포로부터 식(6)을 이용하여 열전달율을 구해보면,  $y$ 축 방향으로 열전달율이 감소해 나가기만 하기 때문에, 일반적 형태의 유한한 영역의 문제의 시도해로서 충분하지 못할 것임을 알 수 있다.

라플라스방정식의 선형성, 즉 해의 중첩가능성을 활용하면, 복잡한 문제도 비교적 쉽게 해결될 수 있다. 특히 관심 영역이 직사각형 등과 같이 단순할 때는 단순해들을 중첩하여 복잡한 문제도 손쉽게

게 해결될 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다. 그러나 일반적 형태의 영역에서 여러가지 해, 특히 해석해를 중첩하여 라프라스방정식을 푸는 방법은 최근 Bird와 Steele 그리고 Kang에 의해 제시되었다. Bird와 Steele은 구멍이 있는 원형영역에서 엄밀해를 이용해서 직접 라프라스방정식을 해석하였다.

Kang은 본 연구에서 다루고자 하는 다각형 영역에서의 라프라스방정식의 해를 구하기 위해 Bird와 Steele이 사용하는 방법과 유사한 방법을 시도하였으나 중첩하는 시도함수를 올바르게 선택하지 못하여 헤름홀츠방정식의 점근적 해로 라프라스방정식의 해를 대신코자하였다. 본 논문의 주 목적은 Kang과는 근본적으로 달리 해석해를 사용하여 라프라스방정식을 직접 해석하는 것이다. 그러나, 이를 위해 Bird와 Steele 또는 Kang이 사용한 중첩기법의 상당부분을 활용코자 한다.

중첩기법을 사용하기 위해, 먼저 Fig. 1에서 같이 해석코자하는 다각형에 국부좌표계  $(x_i, y_i)$ 를 도입하면 매우 편리할 것이다. 4각형의 꼭지점  $P_i$ 의 위치는 전체좌표계  $(X_i, Y_i)$ 로 표시하였다. 국부 좌표계를  $(x_i, y_i)$ 간의 관계, 국부좌표계와 전체좌표계  $(X, Y)$ 간의 자세한 관계식은 부록 A에 실어 놓았다.

중첩하는 과정을 기술하기 전에, 먼저 각 경계부, 즉 다각형의 각 변에서 경계조건을 표시하는 방법을 검토해 보자. 예를 들어 주어진 온도분포를 각 경계부의 선택된 여러점에서의 온도로 이산화하여 나타낼 수 있으며, 또는 각 변의 길이를 기본주기로 하는 푸리에 사인, 코사인 등의 시리즈로 전

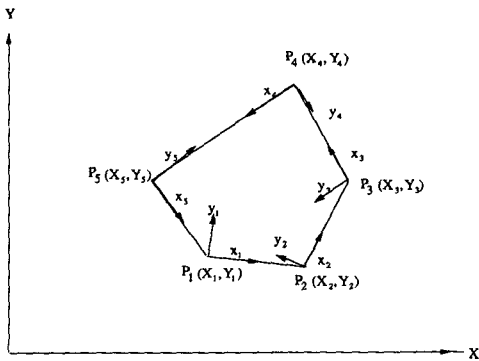


Fig. 1 A convex polygon with the local Cartesian coordinates  $x_i, y_i$  shown. The corners  $P_1, \dots, P_5$  of the polygon are expressed in terms of the global coordinates  $(X_i, Y_i)$

개하여 시리즈 계수로 나타낼 수 있다. 특히 후자의 방법은 해석 해를 사용하여 문제를 해결하는 기법으로 여러 분야에서 사용되어 왔으며, 본 논문에서도 이 방법을 사용하고자 한다.

Fig. 1과 같은 볼록 다각형에서 중첩하여 해를 구하는 과정을 설명하면 다음과 같다. 이 볼록다각형의 해석을 위해 만약 식(3a)형태의 해석해를 중첩하면, (잠정적으로 식(3)의 해석해만으로 주어진 경계치 문제의 해를 구할 수 있다고 가정하자.) 전체해를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$T = \sum_{i=1}^{n_s} T^{(i)}(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{n=1}^{n_n} B_n^{(i)} \sin \frac{n\pi x_i}{L_i} e^{-\frac{n\pi y_i}{L_i}} \quad (7)$$

여기서  $T^{(i)}$ 는  $i$ 번째 변에 연관된 시도함수이며,  $n_s$ 는 다각형의 변의 갯수,  $n_n$ 는 각 변에서 시도함수인 사인 시리즈의 최고차항을 나타내며  $L_i$ 는  $i$ 번째 변의 길이,  $B_n^{(i)}$ 는 경계조건으로부터 결정되는 상수를 나타낸다. 중첩에 사용되는 시도함수는 지배방정식을 엄밀히 만족시키며 경계로부터 영역 내부로 감소하는 특징을 지님을 알 수 있다. 또한 전체해에 사용된 서로 독립된 온도 함수의 갯수는  $n_s \times (n_n + 1) - (n_s - 1)$ 이다. 만약 식(3b)를 시도함수로 사용하면

$$T = \sum_{i=1}^{n_s} T^{(i)}(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{n=0}^{n_n} T_n^{(i)}(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{n=0}^{n_n} A_n^{(i)} \cos \frac{n\pi x_i}{L_i} e^{-\frac{n\pi y_i}{L_i}} \quad (8)$$

이 함수는 일정한 온도분포를 나타내는 영차항들 ( $n=0$ )때문에 서로 독립된 온도 함수의 갯수는  $n_s \times (n_n + 1) - (n_s - 1)$ 이다.

식(7)이나 식(8) 형태를 사용하여 문제를 풀고자 할 때는 경계조건도 푸리에 사인, 코사인 시리즈로 기술하는 것이 편리하다. 만약 식(8)을 사용하면,  $i$ 번째 경계부에서 주어지는 온도분포를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\tilde{T}(x_i) = \tilde{T}_0^{(i)} + \sum_{n=1}^{n_n} \tilde{T}_n^{(i)} \cos \frac{n\pi x_i}{L_i} \quad (9)$$

여기에서, 앞으로 상첨자  $\sim$ 는 경계에서 주어지는 또는 얻어지는 양들을 나타낸다. 만약 열전달율이 경계조건으로 주어졌을 경우에는

$$\tilde{Q}(x_i) = \tilde{q}(x_i) L_i = \frac{\tilde{Q}_0^{(i)}}{2} + \sum_{n=1}^{n_n} \tilde{Q}_n^{(i)} \cos \frac{n\pi x_i}{L_i} \quad (i=1, \dots, n_s) \quad (10)$$

여기서  $\tilde{Q}$ 는 각 변의 총 열전달율을 나타낸다. 식 (9)와 달리 식(10)의 첫항에 1/2을 취한 것은, 이렇게 정의되면, 경계부에서의 열전달율에 의한 포텐셜이 다음과 같이 간결하게 표시되는 장점이 있기 때문이다.\*

$$\int_r \tilde{T} \cdot \tilde{q} ds = \sum_{n=0}^{n_h} \frac{1}{2} T_n Q_n \quad (11)$$

식(7) 형태의 시도함수가 채택된 경우도 식(9)나 식(10)과 유사하게 경계조건이 주어진다.

지금부터 식(9) 또는 식(10)의 형태로 경계조건이 주어진 경우 식(7) 또는 식(8)의 시도함수로 해를 구하는 절차를 살펴보자. 이것은 식(7) 또는 식(8)에서 미지수  $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}$ 를 구하는 절차가 된다. 만약 모든 경계에서 온도분포가 주어진다면,

$$\tilde{T}(x_i) = T|_{y_i=0} \quad i=1, \dots, n_e \quad (12)$$

식(12)의 좌변은 식(9) (또는 유사식)로 주어지며, 우변은 식(7) 또는 (8)로부터 경계에서 얻어지는 온도분포를 나타내는데, 국부좌표들간의 관계(부록 A)를 활용하여  $x_i$ 만의 함수로 표시한다.

푸리에 코사인, 사인시리즈의 직교성을 활용하면 다음의 관계식을 구할 수 있다.

$$\tilde{T} = TM \cdot A \quad (13a)$$

$$\tilde{T} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}^{(1)} \\ \tilde{T}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{T}^{(n_e)} \end{Bmatrix}; A = \begin{Bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n_e)} \end{Bmatrix} \quad (13b,c)$$

여기서  $\tilde{T}$ 는 각 변에서의 주어지는 온도분포의 푸리에 사인, 또는 코사인 시리즈 계수이며  $A$ 는 식(7)의  $B_n^{(i)}$ 이나 식(8)의  $A_n^{(i)}$ 로 구성되는 미지수 행렬이며 아래에서 구체적으로 정의된다. 온도행렬이라 불리는  $TM$ 은 다음과 같고 선택한 시도함수와 해석영역의 기하적인 형상에 의해 결정된다.

$$TM = \begin{bmatrix} TM^{(1,1)} & TM^{(1,2)} & \dots & TM^{(1,n_e)} \\ TM^{(2,1)} & TM^{(2,2)} & & \\ \vdots & & & \\ TM^{(n_e,1)} & & & TM^{(n_e,n_e)} \end{bmatrix} \quad (13d)$$

여기서  $TM^{(i,j)}$ 는 물리적으로  $j$ 번째 변의 좌표로 정의된 온도분포  $T^{(j)}(x_j, y_j)$ 의  $i$ 번째 경계부에 대

한 영향을 나타내는 부분 행렬이다. 만약 식(8)의 시도함수와 식(9)의 경계조건으로 문제가 정식화되면 식(13b, c)에 정의된  $\tilde{T}^{(i)}$ 와  $A^{(i)}$ 는 아래와 같이 정의되며,

$$\tilde{T}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_0^{(i)} \\ \tilde{T}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \tilde{T}_{n_h}^{(i)} \end{Bmatrix}; A^{(i)} = \begin{Bmatrix} A_0^{(i)} \\ A_1^{(i)} \\ \vdots \\ A_{n_h}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (13d, e)$$

식(13d)의  $TM^{(i,j)}$ 는  $(n_h+1) \times (n_h+1)$ 크기의 부분 행렬이 된다.

지금까지 경계에서 온도분포가 주어질 경우에 대한 절차를 언급했는데, 열전달율이 주어질 경우도 그 절차가 대동소이하다. 만약 식(10)와 같이 열전달율 경계조건이 주어졌을 경우에는, 식(7) 또는 식(8)을 각 경계부에 수직인 방향으로 미분하여 그 경계조건을 만족시켜야 한다. 즉,

$$\tilde{Q}(x_i) \equiv Q|_{y_i=0} = -[kL_i \nabla T \cdot \mathbf{n}_i] \quad (i=1, \dots, n_e) \quad (14)$$

여기서  $\mathbf{n}_i$ 는  $i$ 번째 경계부에 바깥 쪽으로 수직인 단위 벡터이며,  $\nabla$ 은 그라디언트이다. 역시 직교성을 이용하여 경계조건을 만족시키는 계수를 구하는 식을 행렬 형태로 정리하면,

$$\tilde{Q} = QM \cdot A \quad (15a)$$

여기에서

$$\tilde{Q} = \begin{Bmatrix} \tilde{Q}^{(1)} \\ \tilde{Q}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{Q}^{(n_e)} \end{Bmatrix}; QM = \begin{bmatrix} QM^{(1,1)} & QM^{(1,2)} & \dots & QM^{(1,n_e)} \\ QM^{(2,1)} & QM^{(2,2)} & & \\ \vdots & & & \\ QM^{(n_e,1)} & & & QM^{(n_e,n_e)} \end{bmatrix} \quad (15b, c)$$

여기서  $\tilde{Q}$ 는 경계부에서 주어지는 열전달율 경계조건에 대한 푸리에 시리즈계수이고,  $QM$ 은 열전달율 행렬이라 불리며, 그 구성방법은  $TM$ 과 유사하다. 식(15b, c)에서  $\tilde{Q}^{(i)}$ 의 정의,  $QM^{(i,j)}$ 의 크기 등은 온도분포의 경계조건을 갖는 경우와 유사하게 주어진다. 경계에서 부분적으로 온도, 열전달율이 주어질 경우에도 유사하게 해석을 수행할 수 있다.

지금까지 선택된 시도함수를 중첩하여 경계치 문

\*또한 식(10)으로 정의된  $\tilde{Q}_n^{(i)}$ 들과 식(9)의  $\tilde{T}_n^{(i)}$ 들간의 관계를 행렬형태로 나타내면, 그 행렬이 대칭이 되는 장점이 있다.

제를 다루는 절차에 대해 언급하였다. 그러나 시도함수가 타당하게 선택되었는지에 대한 논의가 그 무엇보다 중요하며, 이것은 지금까지 구성된 **TM** 및 **QM** 행렬의 특이성(singularity)을 조사해 봄으로써 알 수 있다.

온도가 경계조건으로 주어진 경우에는 해, 즉 영역의 온도분포는 유일하게 결정되는데<sup>(13)</sup> 이것은 시도함수와 경계조건과의 관계를 나타내는 **TM** 행렬이 정칙행렬(non-singular matrix)이어야함을 의미한다. 즉 **TM** 행렬의 차원(dimension)과 행렬의 계수(rank)가 동일해야 한다는 것이다. 열전달율이 경계조건으로 주어지는 경우의 해, 즉 영역의 온도분포는 전 영역의 평균온도 분포를 나타내는 일정한 상수값은 결정될 수 없게 된다. 즉, 해의 비유일성(non-uniqueness)이 성립하므로 열전달율 경계조건과 온도해 사이의 관계를 나타내는 **QM** 행렬은 특이행렬(singular matrix)로서 행렬의 계수(rank)는 차원(dimension)보다 "1"만큼 작아야 한다.

이러한 수학적 조건을 염두에 두고 지금까지 구성된 **TM** 및 **QM** 행렬의 특이성을 살펴보자. 만약 식(7)로 주어지는 시도함수를 사용하면 **TM** 행렬은 정칙행렬이 되지만 **QM** 또한 정칙행렬이되어 열전달율 경계조건을 만족시키지 못함을 알 수 있다. 반면 식(8)의 코사인 시리즈를 이용할 경우 열전달율 경계조건에 대한 **QM**은 특이 행렬이되지만 **TM** 또한 특이행렬이 되어 온도경계조건을 만족시키지 못한다.

따라서 식(7)이나 식(8)만으로는 적절한 시도함수가 될 수 없음을 알 수 있다. 주어진 시도함수로부터 구성한 **TM** 및 **QM** 행렬의 특이성은 직사각형, 또는 삼각형 등과 같은 영역에 대해서는 엄밀하게 조사될 수 있으나, 일반적 형태의 다각형에서는 수치적 검증을 통해 조사하여 확인할 수 있다. 이 특이성은 사용되는 시도함수의 독립성(independence) 및 완전성(completeness)에 관련된 문제임을 알 수 있다.

이러한 수학적 문제를 완화하기 위해 지금까지 제안된 방법은 Kang에 의한 것이다. 그는 문제를 직접 극복하지 못하여, 다음과 같이 라프라스방정식을 수정하였다.

$$\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial Y^2} - \beta^2 \hat{T} = 0 \quad (16)$$

이 수정된 방정식은 헤름홀쯔방정식이므로써, Kang

은 매우 작은 실수  $\beta$ 를 사용하여 라프라스방정식을 근사적으로 대신코자 하였다. 따라서 식(16)을 만족시키는 시도함수인 아래의 식(17)을 채택하여 문제를 풀고자 하였다.

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{n=1}^{n_h} A_n^{(i)} \cos \frac{n\pi X_i}{L_i} e^{-\sqrt{(\frac{n\pi X_i}{L_i})^2 + \beta^2} Y_i} \quad (17)$$

여기서  $\beta$ 의 도입으로 말미암아 구성된 **TM** 및 **QM** 모두 정칙행렬이 되는데, 이 경우에는 시도함수<sup>(17)</sup>의 독립성이 보장된다. 그러나 이  $\beta$ 의 도입으로 말미암아 엄밀하게 라프라스방정식이 해석되지 못하며, 주어진 문제에 대해 적절한  $\beta$ 를 결정하는 것에 대한 이론적 기준을 세울 수 없는 한계가 따른다. 비록 Kang의 수치결과가 대체로 만족스럽다고 볼 수 있으나, 이 방법은 인위적으로 수치에러를 도입하는 단순한 수치기법으로서, 해석해를 사용하여 문제를 푸는 장점도 사라지게 된다.

따라서, 본 논문에서는 라프라스방정식을 변형하지 않고 **TM**과 **QM** 행렬이 계수조건을 만족시킬 수 있는 시도함수를 찾아보았다. 이 시도함수가 만족해야 할 조건을 나열해 보면,

- (1) 온도경계조건은 각 경계부에서 임의로 줄 수 있으므로 각 경계부에서 서로 독립적인 온도분포를 가질 수 있는 시도함수이어야 한다.
- (2) 열전달율 경계조건을 만족시키면서 그 해는 식(5)를 만족시켜야 한다.
- (3) 적은  $n_h$ 로도 좋은 수렴성을 가져야 한다.
- (4) 라프라스방정식을 엄밀히 만족시켜야 한다.

식(8)은  $A_0^{(i)}$ 항 때문에 모든 경계부에 일정한 온도가 주어진 경계조건을 만족시키나, 미분하였을 때 코사인 항들만 나오므로 상기의 조건 (2)를 만족시키지 못한다. 따라서,  $A_0^{(i)}$ 항에 관련된 시도함수를 선정하였으며, 이는 조건 (1)과 조건(2)를 만족시키기 위함이다.

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n_g} T^{(i)}(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{n=1}^{n_h} T_n^{(i)}(x_i, y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n_g} [A_0^{(i)} \{ (x_i - \frac{L_i}{2})^2 - y_i^2 \} / L_i^2 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{n_h} A_n^{(i)} \cos \frac{n\pi}{L_i} x_i e^{-\frac{n\pi}{L_i} y_i} \end{aligned} \quad (18)$$

식(18)에서  $A_0^{(i)}$ 에 해당하는 함수는 평균온도를 나타낼 수 있으며  $x_i, y_i$ 가  $\infty$ 로 갈 때 온도도 감소하지 않는 특징을 가지며,  $Re(z^2) = x^2 - y^2$ 를 수정한 것이다.  $n \geq 1$ 에 대해서는 이미 언급한 푸리에 코사인시리즈를 사용함으로써 해의 완전성을 도

모하였다. 물론  $n \geq 1$ 인 경우에는 사인시리즈를 이용하여도 되지만 전형적인 수렴속도가  $\frac{1}{n}$ 로서 코사인시리즈의 전형적인 수렴속도인  $\frac{1}{n^2}$ 에 비하여 늦으므로 코사인시리즈를 채택하였다.

본 연구에서 사용된 시도함수(18)의 조합의 선택은 조건 (1)~(4)를 모두 만족시키는 가장 적절한 것으로 판단된다. 예를들면  $A_6^{(1)}$ 에 대한 것으로  $x_i^2 - y_i^2$ 를 사용하면  $TM, QM$  모두 특이행렬이 된다. 물론  $x_i$ , 또는  $y_i$ 를 사용할 때도 앞에서 언급한  $TM, QM$  행렬이 가져야하는 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 상기의  $(x_i - \frac{L_i}{2})^2 - y_i^2$ 은  $x_i$ 에 대해 대칭이며, 조건 (1)~(4)를 만족시킬 수 있는 가장 저차의 다항식임을 알 수 있다.

이 외에도 다른 형태의 시도함수가 사용될 수 있으나, 여기서 사용된 다항식이 가장 저차의 단순한 시도함수임에 틀림이 없다. 이 접근방법의 한가지 문제점은 식(18)이 5각 다각형까지만 사용될 수 있다는 것인데, 6각형 이상에서는  $(x_i - \frac{L_i}{2})^2 - y_i^2$ 가 독립성을 잃어버리기 때문이다. 물론 6각형 이상의 다각형에서, 고차의 다항식을 대치해가면서, 해를 구하는 방법을 연구할 수 있겠으나, 별로 실제적이지 못하다. 실제 복잡한 구조물은 5각형 이하의 초대형요소로 분할하여 해석할 수 있으므로<sup>(12)</sup> 이 방법의 효율성은 보장될 수 있다. 간단한 삼각형이나 사각형에 대하여는 해석적으로, 일반적인 형상에 대해서는  $TM$ 과  $QM$ 의 행렬의 계수를 수치적으로 확인해 보았으며, 식(18)을 이용하여  $TM$ 과  $QM$ 을 얻는 과정 및 결과는 부록-B와 부록-C에 실어 놓았다.

### 3. 수치예제

개발된 해석법의 검증을 위해, 먼저 엄밀해가 알려진 경우에 대해 해석을 수행해 보고자 한다. 복소해석함수  $T(X, Y) = Re(Z^3 + Z^2) = X^3 - 3XY^2 + X^2 - Y^2$ , ( $Z = X + iY, i = \sqrt{-1}$ )는 지배방정식을 엄밀히 만족시킨다. 이 해로부터 주어진 영역에서의 경계조건을 생성한 후 이 경계조건을 가진 다각형에서의 해를 본 해석법으로 구한 다음 엄밀해와 비교해 보았다.

먼저 삼각형에 대해, 상기의 엄밀해로부터 구한 온도 경계조건에 대해 본 기법으로 해석한 결과(실

선)를 엄밀해(점선)와 더불어 Fig. 2(a)에 나타냈다. 본 연구에서 사용된 시리즈의 최고차항  $n_h$ 가 8이면 이 결과에서 나타난 것처럼 거의 수렴된 해를 구할 수 있다. Fig. 2(b)에서는 좌표 (1, 0)에서 (1, 3)를 따르는 영역에서 시도함수의 갯수를 바꾸면서,  $n_h=2, n_h=8$ 로 얻어진 본 결과를 엄밀해와 비교해 보았는데, 적은 수의 항으로도 매우 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 또한 66개의 요소를 이용한 유한요소해석(NASTRAN) 결과도 같이 실어 놓았다(본 결과( $n_h=8$ )와 유한요소해석

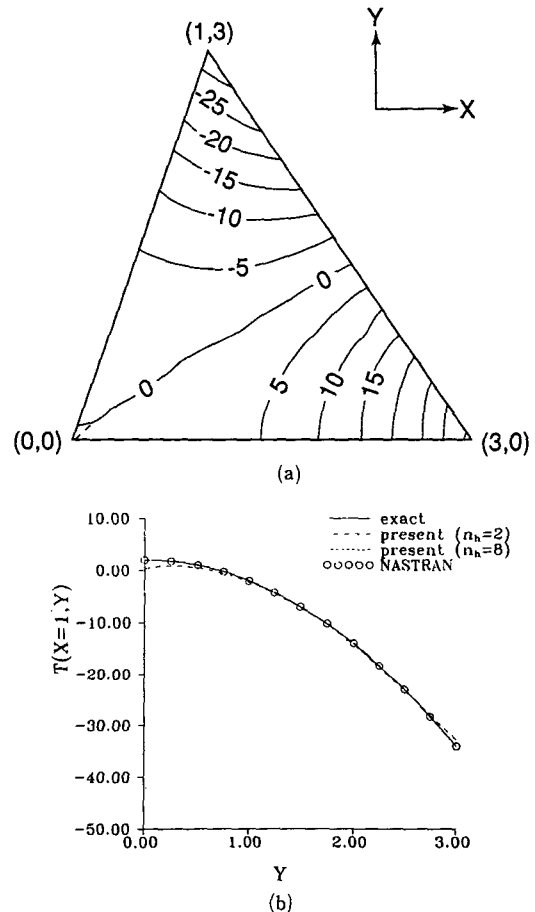


Fig. 2 (a) Temperature contour obtained from the present technique( $n_h=8$ ) and exact temperature distribution in a triangular region. The boundary conditions are given from the exact known solution  $x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$   
 (b) Comparison of the present result with the exact and finite element calculations. The result is given for  $x=1(0 \leq y \leq 3)$

결과는 대체로 엄밀해와 각각 0.1%, 0.25% 정도 차이가 남). 끝단에서 상대적으로 큰 오차가 생기는데, 이것은 푸리에시리즈를 사용할 때 전형적으로 나타나는 현상이다.

Fig. 3에서는 오각형에 대한 해석을 수행하였는데, 엄밀해로  $T(X, Y) = Im(Z^3) = 3X^2Y - Y^3$ 를 택하였으며, 열전달을 경계조건을 이용하였다. Fig. 3(a)는 엄밀해(점선)의 결과를, Fig. 3(b)는 본 해석결과(실선;  $n_h=8$ )를 나타내는데 적은 수의 항으로도 매우 만족스러운 결과를 얻었다. 또한 본 해석법의 효율성을 검증하기 위해 Fig. 3의 오각형영역을 66개의 요소로 분할하여 유한요소법으로 IRIS Indigo Workstation에서 해석을 수행하여,  $n_h=8$ 을 사용한 본 해석법과의 CPU시간을 비교하

였는데, 유한요소법(NASTRAN)으로는 10.3초가 걸렸고 본 방법으로는 0.2초가 소요되었는데, 이 비교는 본 해석기법이 매우 효율적임을 입증하는 것이라 볼 수 있다. 이외에도 다른 엄밀해와 다른 영역에 대해서도 수치해석을 수행하였으며, 위의 예제와 유사한 결과를 얻었다.

### 4. 결 론

본 논문에서는 해석해를 사용하여 일반 형상의 영역에서 직접 라플라스방정식을 푸는 방법을 처음 제시하였다. 기존의 수치해법들과는 달리 해석해를 시도함수로 사용하기 때문에, 경계조건만을 만족시키도록 문제를 정식화하면 된다. 시도해로 다항식과 푸리에 코사인 시리즈를 중첩하여 선정하였으며, 시도함수들의 독립성 및 완전성을 해석결과에서 구성되는 행렬들의 특이성을 조사하여 검증하였다.

몇가지 수치예제를 통해, 본 기법은 적은 수의 시도함수를 가지고도 매우 정확한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었다. 본 논문에서 제시한 기법은 3~5각형의 다각형에만 적용되나, 임의의 형상에 대한 해석기법도 본 연구기법을 토대로 개발될 수 있다.<sup>(12)</sup>

### 후 기

본 연구는 한국과학재단 기초연구지원(과제번호 : 923-0900-006-2)에 의하여 수행되었으며 심사 및 제안을 해주신 익명의 심사자에게도 감사드립니다.

### 참고문헌

- (1) Churchill, R. V. and Brown, J. W., 1984, "Complex Variables and Application," McGraw-Hill Book Co., New York.
- (2) Sokolnikoff, I. S., 1956, "Mathematical Theory of Elasticity," MaGrow-Hill Book Co., New York.
- (3) Choi, J. H. and Kwak, B., 1989, "A Boundary Integral Equation Formulation Derivative Unknowns for Two-Dimensional Potential Problems," J. Appl. Mech. Vol. 56, pp. 617~623.

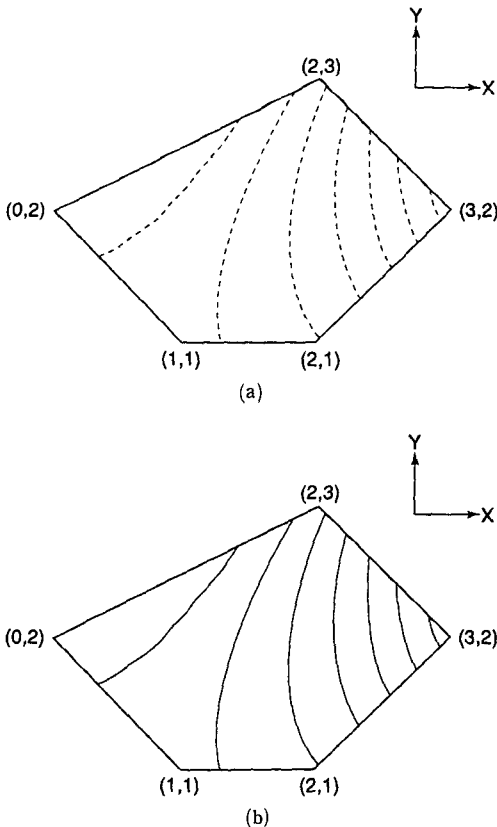


Fig. 3 (a) Temperature contour obtained from the exact known solution  $3x^2y - y^3$  in a pentagon region  
 (b) Temperature contour obtained from the present technique( $n_h=8$ ) in a pentagon region with heat transfer rate boundary condition

- (4) Kassab, A. J., 1989, "The Application of the Complex Variable Boundary Element Method to the Solution of Heat Conduction Problems in Multiply Connected Domains," Ph. D. Dissertation, University of Florida.
- (5) Kassab, A. J. and Hsieh, C. K., 1990, "Application of the Complex Variable Boundary Element Method to Solving Potential Problems in Doubly Connected Domains," Int. J. Num. Methods Eng. Vol. 29, pp. 161~179.
- (6) Wilson, E. L. and Nickell, R. E., 1966, "Applications of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis," J. Nuclear Engineering and Design, Vol. 4, pp. 276~286.
- (7) Dusenberre, G. M., 1961, "Heat Transfer Calculations by Finite Differences," International Textbook Company, Scranton, Pa.
- (8) Bird, M. and Steele, C. R., 1992, "A Solution Procedure for Laplace's Equation on Multiply Connected Circular Domians," J. Appl. Mech. Vol. 59, pp. 398~404.
- (9) Naghdi, A. K., 1991, "Bending of a Perforated Circular Cylindrical Cantilever," to appear in International Journal of Solids and Structures.
- (10) Honein, T. and Herrmann, G., 1988, "The Involution Correspondence in Plane Elastostatics for Regions Bounded by a Circle," J Appl. Mech. Vol. 119, pp. 566~573.
- (11) Kang, L. C., 1992, "Fourier Series Method for Plate Bending Problems," Ph. D. Thesis, Stanford University.
- (12) Kim, Y. Y. and Yoon, M. S., "Torsion of Prismatic Bars with Multiply Connected Cross Sections," to be submitted.
- (13) Kellogg O. D., 1953, "Foundation of Potential Theory," Dover Publications, New York.

부 록

A. 좌표관계

*i*-번째 경계부에서의 회전행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$R_i = \frac{1}{L_i} \begin{pmatrix} X_{i+1} - X_i & Y_{i+1} - Y_i \\ -Y_{i+1} + Y_i & X_{i+1} - X_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix},$$

여기에서  $L_i = \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2}$  이고  $X_i, Y_i$ 는 꼭지점의 좌표이며,  $\theta_i$ 는 *i*번째 경계부가 *X*축과 이루는 각도이다.

*i*번째 경계부와 *j*번째 경계부 사이의 좌표관계는 아래와 같다.

$$\begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} = R_j \cdot R_i^{-1} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} + R_j \begin{Bmatrix} X_i - X_j \\ Y_i - Y_j \end{Bmatrix} \quad (A1)$$

특히 *j*번째 경계부에서  $x_i$ 와  $y_i$ 는 식(A1)에  $y_j = 0$ 의 값을 대입하여 얻는다.

B. TM의 유도

본문에서 언급한대로 TM의 부분행렬  $TM^{(i,j)}$ 은 *j*번째 경계부의 온도분포가 *i*번째 경계부에 미치는 영향을 나타내는 행렬로써 아래와 같은 온도함수에서 그 요소  $TM_{mn}^{(i,j)}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T = \sum_{j=1}^{n_h} \{ A_0^{(j)} \left[ \frac{(x_j - L_j/2)^2 - y_j^2}{L_j^2} \right] + \sum_{n=1}^{n_h} A_n^{(j)} \cos(\lambda_n^{(j)} x_j) e^{-\lambda_n^{(j)} y_j} \}$$

먼저 영차항과 관련된 다항식의  $TM_{mn}^{(i,j)}$ 는 다음과 같다.

$$\left. \frac{(x_j - L_j/2)^2 - y_j^2}{L_j^2} \right|_{y_j=0} \equiv TM_{(0,0)}^{(i,j)} + \sum_{m=1}^{n_h} TM_{(m,0)}^{(i,j)} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{L_j} x_j\right)$$

$$\left. \frac{(x_j - L_j/2)^2 - y_j^2}{L_j^2} \right|_{y_j=0} \equiv TM_{(0,0)}^{(i,j)} + \sum_{m=1}^{n_h} TM_{(m,0)}^{(i,j)} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{L_j} x_j\right)$$

$n \geq 1$ 인 코사인시리즈에 대하여는 다음과 같다.

$$[\cos(\lambda_n^{(i)} x_i) \cdot e^{-\lambda_n^{(i)} y_i}]_{y_i=0} \equiv TM_{(0,n)}^{(i,j)} + \sum_{m=1}^{n_h} TM_{(m,n)}^{(i,j)} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{L_j} x_j\right) \quad (n=1, \dots, n_h)$$

윗식에서  $TM_{mn}^{(i,j)}$ 을 구하기 위해서는 부록 A에서 얻어진 좌표관계와 푸리에코사인 시리즈의 직교성을 이용한다.

C. QM의 유도

QM의 부분행렬  $QM^{(i,j)}$ 은 *j*번째 경계부의 열전달율이 *i*번째 경계부에 미치는 영향을 나타내는 행렬로써 아래와 같은 온도함수를 미분하여 그 요소



$QM_{(m,n)}^{(i,j)}$ 를 얻는다.

$$\frac{\partial T}{\partial y_j} \Big|_{y_j=0} = \sum_{i=1}^{n_i} \left( \frac{\partial T^{(i)}(x_i, y_i)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + \frac{\partial T^{(i)}(x_i, y_i)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial y_j} \right) \Big|_{y_j=0}$$

영차항과 관련된 다항식은 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{n_i} A_0^{(i)} \frac{\partial [x_i - L_i/2]^2 - y_i^2 / L_i^2}{\partial y_j} \Big|_{y_j=0} \equiv QM_{(0,0)}^{(i,j)} + \sum_{m=1}^{n_i} QM_{(m,0)}^{(i,j)} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{L_i} x_j\right)$$

$n \geq 1$ 에 대한 코사인시리즈의 미분도 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial y_i} (\cos(\lambda_n^{(i)} x_i) \cdot e^{-\lambda_n^{(i)} y_i}) \right] \Big|_{y_j=0} \\ & \equiv QM_{(0,n)}^{(i,j)} + \sum_{m=1}^{n_i} QM_{(m,n)}^{(i,j)} \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{L_j} x_j\right) \end{aligned} \quad (n=1, \dots, n_n)$$

$QM_{(m,n)}^{(i,j)}$ 도 부록 A의 좌표관계와 푸리에시리즈의 직교성을 이용하면 행렬 형태로 정리할 수 있다.