

〈論 文〉

## 고차전단변형과 대처짐을 고려한 복합적층판의 저속충격거동 해석

최익현\* · 홍창선\*\*

(1993년 3월 31일 접수)

### Low-Velocity Impact Response Analysis of Composite Laminates Considering Higher Order Shear Deformation and Large Deflection

I. H. Choi and C. S. Hong

**Key Words :** Low-Velocity Impact Response(저속충격거동), Composite Laminate(복합적층판), Higher Order Shear Deformation(고차전단변형), Large Deflection(대처짐), Impact Condition(충격조건)

#### Abstract

Low-velocity impact responses of composite laminates are investigated using the finite element method based on various theories. In two-dimensional nonlinear analysis, a displacement field considering higher order shear deformation and large deflection of the laminate is assumed and a finite element formulation is developed using a  $C^0$ -continuous 9-node plate element. Also, three-dimensional linear analysis based on the infinitesimal strain-displacement assumptions is performed using 8-node brick elements with incompatible modes. A modified Hertzian contact law is incorporated into the finite element program to evaluate the impact force. In the time integration, the Newmark constant acceleration algorithm is used in conjunction with successive iterations within each time step. Numerical results from static analysis as well as the impact response analysis are presented including impact force histories, deflections, strains in the laminate. Impact responses according to two typical low-velocity impact conditions are compared each other.

#### 기 호 설 명

$[A_{ij}], [B_{ij}], [D_{ij}], [E_{ij}], [F_{ij}], [H_{ij}] (i, j=1, 2, 6)$ : 적층판의 면내강성행렬들 $[\bar{A}_{ij}], [\bar{D}_{ij}], [\bar{F}_{ij}] (i, j=4, 5)$ : 적층판의 횡전단강성행렬들 $F, F_m$ : 접촉력(충격하중), 최대접촉력 $h$ : 적층판의 두께 $k$ : 접촉법칙에서의 접촉계수	$m_r$ : 충격체의 질량 $N_i, M_i, P_i (i=1, 2, 6)$ : 적층판의 면내방향과 관련된 된 하중벡터들 $Q_i, R_i (i=4, 5)$ : 적층판의 횡전단방향과 관련된 하 중벡터들 $u, v, w$ : 판의 중립면에서의 $x, y, z$ 방향으 로의 변위 $u_x, u_y, u_z$ : 판의 $x, y, z$ 방향으로의 변위 $w_p, w_r$ : 충격지점에서의 판의 처짐, 충격체 의 변위
--	---

\*한국과학기술원 항공우주공학과

\*\*정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

$x, y, z, t$	: 판의 기하학적 좌표계 및 시간
$a, a_0, a_m, a_{cr}$	: 압입량, 영구압입량, 최대압입량, 임계압입량
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$	: 각각의 방향과 관련된 변형률성분
$\epsilon_i^0, \kappa_i^0, \kappa_i^2 (i=1, 2, 6, 4, 5)$	: 중립면의 변형률, 곡률, 3차 변위성분의 곡률
$\rho$	: 적층판의 밀도
$\Psi_x, \Psi_y$	: $x, y$ 방향의 중립면의 회전성분
$\xi_x, \xi_y$	: $x, y$ 방향의 중립면의 3차 회전성분
$\{F\}$	: 적층판 전체의 일반화된 절점하중 벡터
$I_i$	: 적층판의 질량계수
$[M], [K^L], [K^L(U)]$	: 판전체의 질량행렬, 선형, 비선형 강성행렬
$\{U\}$	: 적층판 전체의 일반화된 절점변위 벡터
$\phi_i (i=1, 2, 3, \dots)$	: 9절점 판요소의 보간함수

## 1. 서 론

복합재료를 이용한 구조물의 손상허용설계에 대한 연구는 항공우주구조물에의 응용을 생각할 때 매우 중요한 과제이다. 특히 복합적층구조물이 외부의 물체에 의하여 '저속충격(low-velocity impact)'을 받으면 표면상으로는 손상의 식별이 용이하지 않지만 구조물의 뒷면에 심각한 정도의 손상이 발생할 수 있다. 이러한 손상은 부재의 기계적 성질, 특히 압축강도 등을 저하시키며, 이로 인하여 복합재료로 구성된 구조물의 수명의 감소나 파국적 파손 등과 같은 설계시에 예상하지 못한 문제를 야기시키게 된다.

항공기구조물에 사용되는 복합적층구조물이 외부의 물체에 의하여 저속충격을 받는 경우는 크게 두 경우로 나눌 수 있다. 첫째는 비행시나 이착륙시에 우박이나 작은 새 또는 작은 돌 등에 의하여 충격을 받는 경우이고, 둘째는 구조물의 제작과정이나 제작 후 보수과정에서 작업자의 실수로 공구나 공구상자 등이 낙하되어 충격을 받는 경우이다. 이 두 가지 경우에 의한 저속충격문제를 이해하기 위해서는 각각의 경우에 대한 충격조건을 구분하여 고려할 필요가 있다. 첫째의 경우는 충격을 가하는 충격체의 질량이 충격을 받는 복합적층구조물의 질량보다 상대적으로 크지 않다. 그러나 둘째의 경우

는 충격을 가하는 충격체의 질량이 충격을 받는 구조물의 질량보다 매우 크다. 충격체의 충격속도에 있어서는 첫째의 경우가 둘째의 경우에 비하여 매우 크다. 이러한 충격조건 차이에 의하여 동일한 적층구조물에 대해서도 상이한 충격거동(impact response)과 손상(damage)이 나타나게 된다.

저속충격으로 발생하는 손상을 해석하기 위해서는 충격으로 인한 복합적층구조물의 거동과 구조물의 내부에서 발생하는 응력상태에 대한 정확한 해석이 선행되어야 한다. 판 형태의 구조물에 대하여 거동이나 응력상태를 해석하기 위하여 판이론(plate theory)이 많이 적용되어 왔다. 외부로부터 저속충격을 받는 복합적층판은 충격을 받은 지점에서 처짐이 판의 두께에 비하여 상대적으로 크게 발생한다. 그러므로 저속충격을 받는 복합적층판의 거동과 내부의 응력상태를 정확히 해석하기 위해서는 von-Karman의 대처짐을 고려한 판이론을 사용하여 기하학적 비선형해석을 하여야 한다. 그리고 저속충격으로 인하여 적층판에 발생하는 손상 중에서 층간분리(delamination)는 충격후 압축강도의 저하에 중요한 요인으로 알려졌다. 따라서 충격손상을 해석하기 위해서는 충격시 적층판의 내부에서 층간분리를 야기시키는 층간응력에 대하여 정확히 평가할 수 있는 이론을 적용하여야 한다.

충격에 의한 거동이나 손상은 충격을 가하는 물체와 충격을 받는 물체의 상호작용에 의하여 결정된다. 이러한 상호작용에 의하여 충격하중이 결정되고 이에 따라서 충격거동과 손상이 발생한다. 복합적층판의 저속충격거동을 해석하기 위한 연구는 최근 활발히 진행되고 있다. 1975년에 Sun과 Chattopadhyay<sup>(1)</sup>는 그 이전까지 주로 충격에 의한 응력파의 전파현상에 관하여 충격하중을 가정하여 연구하였던 것과는 달리 Hertz의 접촉법칙을 사용하여 충격시의 접촉하중, 즉 충격하중을 직접 계산하였다. Ramkumar등<sup>(2)</sup>과 Lee 등<sup>(3)</sup>은 충격하중을 적절히 가정함으로써 충격거동을 해석하였다. Shivakumar 등<sup>(4)</sup>은 에너지 균형 모델과 스프링-질량 모델을 사용하여 최대 충격하중과 충격주기를 계산하였다. Cairns 등<sup>(5)</sup>도 충격시의 접촉하중을 계산하기 위하여 비선형 Hertzian 스프링 모델을 사용하였다.

Yang과 Sun<sup>(6)</sup>은 1982년에 glass/epoxy와 graphite/epoxy 복합재료 시편에 대하여 정적인 상태에서 압입실험을 수행하였다. 이 연구에서 복합적층판은 부하(load)시와 제하(unload)시 그리고 재

부하(reloading)시에 각각 다른 접촉법칙이 성립함을 보였다. 그 후 복합적층판의 저속충격거동을 해석하기 위한 많은 연구들이 정적압입실험을 통한 접촉법칙을 사용하거나, (7~13) Sun<sup>(6)</sup>이 제안한 수정된 접촉법칙을 사용하여 연구하고 있다. (14,15) Sankar와 Sun,<sup>(6)</sup> Tan과 Sun<sup>(6)</sup>은 위의 접촉법칙을 유한요소 해석에 적용하여 저속충격거동을 해석하였으며 실험결과와 비교하여 잘 일치함을 보였다. Chen과 Sun<sup>(9~11)</sup>도 위의 접촉법칙을 적용한 유한요소해석을 수행하여 초기응력의 효과와 대처짐의 효과 그리고 좌굴된 적층판의 충격거동에 관하여 연구하였다. 또한 국내에서 이영신 등<sup>(12)</sup>은 대처짐을 고려하지 않고 고차전단변형 판이론을 사용하여 저속충격거동을 해석하였으며, 최익현 등<sup>(13)</sup>은 저속충격거동에 대하여 대처짐현상을 고려한 비선형해석을 수행하여 선형해석에 의한 결과와 비교하였다. 고종인 등<sup>(15)</sup>은 3차원 선형 유한요소해석을 수행하여 저속충격거동과 손상을 해석하였다.

이상의 연구들을 살펴보면 저속충격시 발생하는 적층판의 대처짐현상을 고려하여 저속충격거동을 비선형해석한 연구결과는 많지 않다. (10,13) 또한 대처짐현상을 고려한 위의 연구결과들도 앞에서 언급한 저속충격의 두 가지 충격조건 중에서 충격체의 질량이 작고 충격속도가 큰 경우에 대한 해석결과로서 이 때는 비선형해석에 의한 결과와 선형해석에 의한 결과와의 차이가 크지 않은 것으로 나타났다. 그러나 충격체의 질량이 적층판의 질량에 비하여 큰 충격조건에 대한 비선형해석의 결과는 아직 알려져 있지 않다. 또한 층간 전단응력을 정확히 평가할 수 있는 이론으로 고차전단변형 판이론을 사용하거나, (12) 3차원 유한요소법을 사용한 연구가 있으나<sup>(14,15)</sup> 그 외 대부분의 연구는 일차전단변형 판이론을 사용하여 해석하고 있다. (8~11,13)

복합적층판에 적용된 고차전단변형이론에 대한 연구중에서 Christensen 등<sup>(16)</sup>은 면내변위에 대해서는 중립면의 변위 및 두께방향 좌표에 대한 3차까지의 회전성분을 고려하고 처짐에 대해서는 중립면의 처짐 및 두께방향 좌표에 대한 2차까지의 처짐성분을 고려하는 고차변위모델을 제안하여 해석결과가 3차원 탄성해에 접근함을 보였다. 이 변위모델은 층간수직변형률에 대하여 선형으로 평가하나 층간전단변형률에 대해서는 판의 상하 경계면에서 0이 되지 않는다. Reddy 등<sup>(17)</sup>은 판의 상하 경계면에서 층간전단변형률이 0이 되는 조건을 만족하

도록 면내변위의 3차회전 성분에 대하여 1차회전과 처짐의 미분치로 치환하여 전개한 고차전단변위모델을 제안하였으며, 이 변위모델에 대한 유한요소방정식을 구성하였다. 이때 유한요소모델은  $C^1$  연속인 Hermite 보간함수를 필요로 하며 그 수식화가 복잡하다. Kant 등<sup>(18)</sup>은 면내변위에 대한 1차와 3차의 회전성분과 중립면의 처짐성분을 고려한 고차변위모델을 사용하여 복합적층판의 동적거동문제를 해석하였다. 이 연구에서 제시된 모델은 판의 상하 경계면에서 층간전단변형률이 0이 되는 조건을 만족하지는 않지만  $C^0$  연속인 보간함수를 사용하여 유한요소방정식을 유도할 수 있으며 일차전단변형이론에 비하여 정밀도가 높다고 하였다. 또한 이 모델을 사용하여 충격거동문제를 해석한 연구<sup>(12)</sup>도 있다.

본 연구에서는 Kant 등<sup>(18)</sup>이 제안한 고차변위모델에 면내변위에 대한 중립면의 변위성분을 추가하여 대처짐이론을 적용할 수 있도록 하였으며, 이 변위모델에  $C^0$  연속인 유한요소를 사용하여 유한요소방정식을 유도하였다. 본 연구에서는 먼저 비선형해석결과가 알려져 있지 않은 저속충격조건인, 충격체의 질량이 적층판에 비하여 매우 크고 충격속도는 상대적으로 낮은 충격조건의 경우에 대하여 graphite/epoxy 복합적층판의 저속충격거동을 해석하였다. 본 연구에서 적용한 고차전단변형이론은 적층판의 상하면에서 층간전단응력이 0이 되는 조건을 만족하지 않지만, 층간전단응력에 대하여 포물선 형태로 계산이 되어 일차전단변형이론에 비하여 정확한 계산이 가능하고 전단보정계수의 도입이 필요하지 않다.

본 연구의 고차전단변형이론에 의한 해석결과에 대하여 일차전단변형이론에 의한 해석결과와 또한 대처짐을 고려하지 않은 해석결과와 비교하였으며, 3차원이론과 판이론에 의한 해석결과와의 차이를 살펴보기 위하여 3차원 선형 유한요소해석을 수행하여 정적하중에 의한 거동 및 충격하중에 의한 거동을 해석하였다. 또한 충격체의 질량이 작고 충격속도가 큰 경우의 저속충격조건에 대해서도 충격거동을 해석함으로써 충격조건에 따르는 거동의 차이를 비교하였다.

## 2. 이론 및 유한요소 수식화

본 연구의 해석을 위한 수식화 과정은 고차전단

변형과 대치짐을 동시에 고려한 2차원 비선형 유한 요소방정식의 구성과정에 대해서만 살펴보기로 한다. 나머지 2차원 해석의 경우는 해당되는 항의 삭제에 의하여 파악할 수 있다. 3차원 유한요소해석의 경우에는 미소변형률-변위 관계식을 적용하였으며, 구성방정식은 적층판 전체가 아닌 각 층별로 적용하였으며, 이는 참고문헌<sup>(14,15)</sup>의 방법과 동일하다.

2.1 복합적층판의 변위장 및 구성방정식

본 연구에서는 Kant 등<sup>(18)</sup>의 고차변위모델에 대치짐이론을 적용할 수 있도록 중립면의 면내변위성분을 추가로 고려하여 변위장을 가정하였다. 이 때 적층판의 중립면을  $x$ - $y$ 면이라 하고 두께방향을  $z$  방향이라고 하면 적층판의 변위성분을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x(x,y,z,t) &= u(x,y,t) + z\Psi_x(x,y,t) \\ &\quad + z^3\xi_x(x,y,t) \\ u_y(x,y,z,t) &= v(x,y,t) + z\Psi_y(x,y,t) \\ &\quad + z^3\xi_y(x,y,t) \\ u_z(x,y,z,t) &= w(x,y,t) \end{aligned} \tag{1}$$

- 여기서  $t$ 는 시간이고  $u_x, u_y, u_z$ 는 각각  $x, y, z$  방향의 변위이며,  $u, v, w$ 는 각 방향의 중립면의 변위이다. 또한  $\Psi_x, \Psi_y$ 와  $\xi_x, \xi_y$ 는 각각  $x, y$ 축에 수직한 단면의 1차(1-st order)와 3차(3-rd order)의 회전을 의미한다.

von-Karman의 대치짐 판이론을 사용하여 변형률-변위 관계식을 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ &\quad + z\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + z^2\frac{\partial \xi_x}{\partial x}\right) \equiv \epsilon_x^0 + z(\kappa_1^0 + z^2\kappa_1^2) \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ &\quad + z\left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + z^2\frac{\partial \xi_y}{\partial y}\right) \equiv \epsilon_y^0 + z(\kappa_2^0 + z^2\kappa_2^2) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \Psi_y + z^23\xi_y \\ &\quad \equiv \epsilon_z^0 + z^2\kappa_z^2 \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi_x + z^23\xi_x \\ &\quad \equiv \epsilon_x^0 + z^2\kappa_x^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ &\quad + z\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + z^2\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x}\right)\right) \\ &\quad \equiv \epsilon_{xy}^0 + z(\kappa_{xy}^0 + z^2\kappa_{xy}^2) \end{aligned} \tag{1}$$

섬유방향의 회전각이  $\theta$ 인 적층판의  $k$ 번째 층의 구성방정식을 사용하여,<sup>(19)</sup>  $z$ 방향으로 적분하거나  $z, z^3$ 를 곱하여 적분하면 적층판 전체의 구성방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \\ P_i \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & E_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} & F_{ij} \\ E_{ij} & F_{ij} & H_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_j^0 \\ \kappa_j^0 \\ \kappa_j^2 \end{Bmatrix} \quad (i,j=1,2,6) \\ \begin{Bmatrix} Q_i \\ R_i \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij} & \bar{D}_{ij} \\ \bar{D}_{ij} & \bar{F}_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_j^0 \\ \kappa_j^2 \end{Bmatrix} \quad (i,j=4,5) \end{aligned} \tag{3}$$

식(3)에서  $\{N_i\}, \{M_i\}, \{P_i\}$ 는 각각의 방향과 연관된 합력(resultant force), 합모멘트(resultant moment), 그리고 고차의 변위성분으로 인하여 발생하는 3차의 합모멘트들이다. 또한  $Q_i, R_i$ 는 합횡전단력(resultant transverse shear force)과 고차의 변위성분으로 인하여 발생하는 합횡전단력들이다. 그리고  $[A_{ij}], [B_{ij}], [D_{ij}], [E_{ij}], [F_{ij}], [H_{ij}]$ 는 각각 적층판의 인장, 연계, 굽힘강성행렬과 고차의 변위성분으로 인하여 발생하는 강성행렬들이다. 또한  $[\bar{A}_{ij}], [\bar{D}_{ij}], [\bar{F}_{ij}]$ 는 횡전단강성행렬과 고차의 변위성분으로 인하여 발생하는 횡전단 강성행렬들이다. 이상의 적층판 전체에 대한 구성방정식은 Reddy<sup>(20)</sup>에 의하여 제안된 고차변위모델에서 유도된 수식과 동일하다.

2.2 가상일의 원리와 접촉력-압입 관계식

유한요소방정식을 구성하기 위해 가상일(virtual work)의 원리를 적용하여 변분형을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \{\delta \bar{u}\}^T \{\bar{\rho}\} \{\bar{u}\} dS + \int_{S_0} \{\delta \bar{\epsilon}\}^T \{\bar{\sigma}\} dS - F \delta w_p \\ = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서  $S_0$ 는 변형전의 판의 면적이고,  $\{\bar{u}\}$ 는 일반화된 변위,  $\{u, v, w, \Psi_x, \Psi_y, \xi_x, \xi_y\}$ 이며,  $[\bar{\rho}]$ 는 적층판의 질량행렬이다.  $w_p$ 는 충격받은 지점에서의 판의 처짐량이고,  $F$ 는 충격하중, 즉 적층판과 충격체 사이에서 발생하는 접촉력이며, 이것은 다음과 같은 Sun<sup>(6)</sup>이 제안한 수정된 접촉법칙에서 구할 수 있다.<sup>(14)</sup>

부하 (loading) 경로일 때,

$$F = k\alpha^{1.5}$$

제하 (unloading) 경로일 때,

$$F = F_m \left[ \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right]^{2.5}$$

재부하 (reloading) 경로일 때,

$$F = F_m \left[ \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right]^{1.5} \quad (5)$$

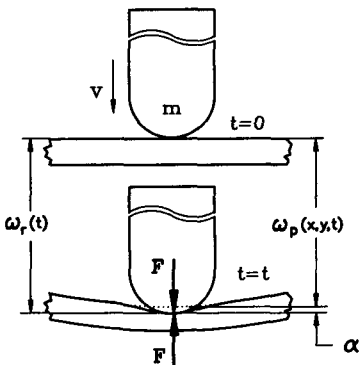
위식에서 부하시의 접촉계수  $k$ 는 다음과 같다.

$$k = \frac{4}{3} \sqrt{r} \frac{1}{(1 - \nu_s^2)/E_s + 1/E_{yy}} \quad (6)$$

여기서  $r$ 은 충격체의 반지름,  $\nu_s$ 과  $E_s$ 는 충격체의 푸아송비와 강성계수이며,  $E_{yy}$ 는 적층판의 가장 윗층의 횡방향 강성계수이다. 또한 앞의 식(5)에서  $F_m$ ,  $\alpha_m$ 은 부하시의 최대하중과 최대압입량이며,  $\alpha_0$ 는 영구압입량인데 임계압입량,  $\alpha_{cr}$ 과의 관계는 다음의 식(7)과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_m < \alpha_{cr} \text{ 일 때 } \alpha_0 &= 0 \\ \alpha_m \geq \alpha_{cr} \text{ 일 때 } \alpha_0 &= \alpha_m [1 - (\alpha_{cr}/\alpha_m)^{0.4}] \end{aligned} \quad (7)$$

위의 식에서 임계압입량,  $\alpha_{cr}$ 은 graphite/epoxy 적층판의 경우에 약 0.08 mm이다. 식(5)~(7)로부터 접촉력을 구하기 위해서는 압입량을 알아야 하는데 압입량은 Fig. 1과 같이 해석과정에서 계산되는 충격체의 변위와 접촉지점에서의 판의 변위와의



$$\alpha = \omega_r(t) - \omega_p(x,y,t)$$

$$F = f(\alpha) : \text{by contact law}$$

Fig. 1 Indentation between the deflection of laminate and the displacement of impactor

차이가 된다.

### 2.3 유한요소방정식의 구성과 충격문제해석 과정

본 연구에서 판이론을 사용한 2차원 유한요소해석에서는 9-절점 등계수 (isoparametric) 사변형 판요소를 사용하였다. 3차원 해석에서는 층간전단응력과 굽힘강성의 계산을 정확히 하기 위하여 Wilson 등<sup>(21)</sup>이 제안한 incompatible modes를 8-절점 직육면체 요소의 보간함수에 추가하였으며, <sup>(14,15)</sup> 이를 식(4)에 적용하면 최종적으로 다음의 유한요소방정식이 구해진다.

$$[M]\{\dot{U}\} + [[K^L] + [K^N(U)]]\{U\} = \{F\} \quad (8)$$

여기서  $[M]$ ,  $[K^L]$ 와  $[K^N(U)]$ 는 각각 적층판의 질량행렬, 선형강성행렬 그리고 비선형강성행렬이고,  $\{F\}$ 는 적층판에 가해지는 하중벡터이다. 앞의 식(1)과 같이 가정된 고차변위모델에 대치집이론을 적용하여 본 연구에서 유도된 유한요소방정식의 각 행렬의 자세한 구성은 부록에 있다. 충격체는 강체로 가정되었으며 다음의 지배방정식을 갖는다.

$$m_r \ddot{w}_r + F = 0 \quad (9)$$

여기서  $m_r$ 은 충격체의 질량이고,  $w_r$ 은 충격체의 변위성분이다.

충격거동문제를 해석하기 위해서는 접촉법칙과 적층판에 대한 유한요소방정식 그리고 충격체에 대한 지배방정식을 동시에 풀어야 한다. 즉, 식(5)~(7)과 식(8) 그리고 식(9)를 동시에 풀어야 하므로 반복수행과정이 필요하다. 이 과정은 Fig. 2에서 보여주고 있는데, 먼저 가정된 하중으로부터 적층판과 충격체의 변위를 구하고 이로부터 압입량을 계산한다. 계산된 압입량을 앞의 접촉법칙에 적용하여 접촉력을 구한다. 이 때 구해진 접촉력과 초기에 가정된 하중과의 차이가 적을 때까지 적절한 값으로 다시 하중을 가정하여 반복수행함으로써 한 시간증분에서의 충격하중과 거동을 구하게 된다.

본 연구에서는 동적거동문제를 해석하기 위하여 Newmark의 일정가속도(constant acceleration) 시간적분법<sup>(20)</sup>을 사용하였다. 또한 비선형해석의 반복수행을 효율적으로 수행하기 위해 Akay<sup>(22)</sup>에 의해 제안된 constant coefficient scheme을 적용하였으며, 연속적인 반복수행(successive iteration)방법을 적용하였다.<sup>(18)</sup> 적층판의 강성행렬을 계산하기 위한 수치적분방법으로는 full integra-

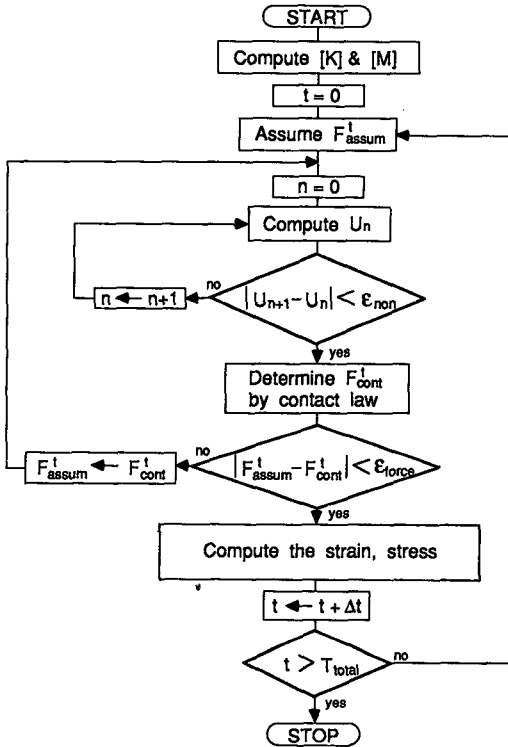


Fig. 2 Flow chart of impact analysis program

tion 방법을 사용하였다. 만일 Reddy<sup>(23)</sup>의 연구방법에서와 같이 층간전단에너지를 reduced integration하면 본 연구에서 적용된 적층판의 경우에는 처짐의 형상이 요철모양으로 계산이 되어 불합리한 결과를 보였다. 이 때 굽힘에너지에 대해서는 적분 방법에 따른 차이가 나타나지 않았다.

2.4 본 연구의 충격문제 설정

본 연구에서 고려된 판은 graphite/epoxy 복합 적층판이며, 크기가 10 cm × 10 cm × 0.18 cm로서 길이 대 두께비는 약 56인 얇은 판이다. 적층순서는 [0/90]<sub>4s</sub>이며 한층의 물성치는 Table 1과 같다. 충격체는 끝단형상의 직경이 1.2 cm인 반구형상의 물체이며 평판에 수직인 방향으로 평판의 중심점에 충격을 가한다. 이 때 판의 경계조건은 4면 경계단이 모두 고정지지인 경우에 대하여 해석하였다. 본 연구에서는 직교적층판의 대칭성을 활용하여 전체의 1/4에 대해서만 유한요소해석을 수행하였는데, 이 때 mesh에 대한 수렴성을 확인하여 8 × 8 mesh로 모델링하여 해석하였다.<sup>(13)</sup> 또한 동적문제를 해석하기 위한 시간증분은 해의 수렴성을 고려하여 충격조건에 따라 15 μsec 및 5 μsec를 적용하였다.<sup>(13)</sup> 본 연구에서 적용된 경계조건 및 유한요소모델링 영역을 Fig. 3에서 보여주고 있다.

본 연구에서 적용된 접촉법칙은, 구와 구 또는 구와 반무한체 사이의 접촉문제인 경우에 적용할 수 있는 Hertz의 접촉법칙을 그대로 사용하는 것이 아니고, 이를 복합적층판과 강(steel) 구와의 접촉문제에 적합하도록 수정된 법칙을 사용한다. 이 법칙을 사용하는 경우에는 접촉되는 반경은 계산되지 않으며 압입(indentation)의 크기에 따른 접촉력만 계산된다.

참고로 본 연구의 충격조건에 따라 계산된 최대 충격하중의 값과 유사한 크기인, 하중이 2 kN일 때의 접촉반경을 충격체 및 적층판의 기하학적 형상과 이 때의 압입량을 가지고 추산하면 반경이 약 0.8 mm 정도가 된다. 따라서 접촉하중에 대하여

Table 1 Material properties of graphite/epoxy lamina and impactor

Lamina	
Stiffness	$E_1=135.4 \text{ GPa}, E_2=E_3=9.6 \text{ GPa}, G_{12}=G_{13}=4.8 \text{ GPa}, G_{23}=3.2 \text{ GPa}$
Poisson's ratio	$\nu_{12}=0.31, \nu_{23}=0.52$
Thickness	$h=0.1125 \text{ mm}$
Density	$\rho=1,580 \text{ Kg/m}^3$
Impactor	
Stiffness	$E=207.0 \text{ GPa}$
Poisson's ratio	$\nu=0.3$
Diameter	$d=12 \text{ mm}$

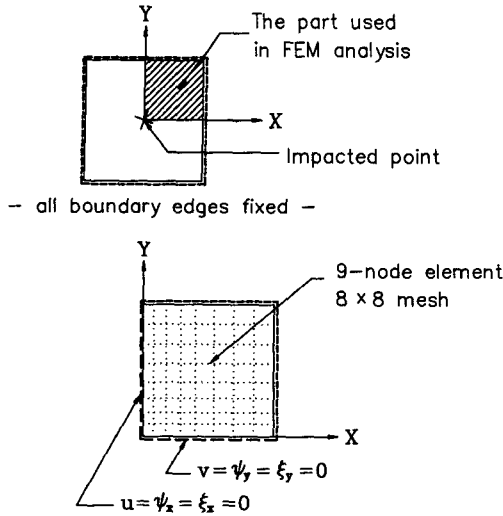


Fig. 3 Boundary conditions of the laminate and modeling region in present FEM analysis

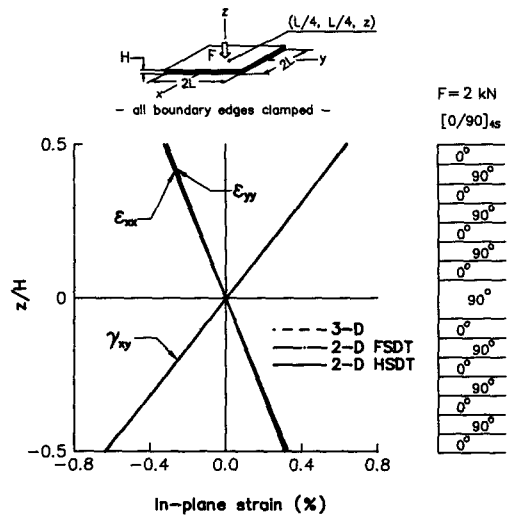


Fig. 4 In-plane strain distribution through the thickness of laminate subjected to a static loading

압력분포를 고려하여 해석하기 위해서는 1 mm보다 작은 크기의 세밀한 mesh를 필요로 하게 되는데, 본 연구의 목적은 접촉으로 인한 국부적인 변형을 해석하는 것이 아니고 충격에 의한 적층판의 전체적인 거동을 중점적으로 해석하기 위한 것이므로 접촉하중을 점하중(point load)으로 고려하여 해석하였다. 이 때 Fig. 3에서의 mesh는 하중이 가해지는 지점에 가까울수록 세밀해지는 형상이며, mesh간의 최소거리는 5 mm이고 최대거리는 7 mm이다.

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 정적해석

본 연구에서는 충격문제의 해석에 앞서 본 연구에서 해석하고자 하는 저속충격의 경우에 발생하는 최대 충격하중과 유사한 크기의 정적하중이 작용하는 경우에 대하여 정적해석을 수행하여 각 해석에 적용된 이론에 따른 결과의 차이를 살펴보았다.

Fig. 4는 적층판 두께방향으로의 면내변형률의 분포에 대하여 각 이론에 따른 차이를 보여주고 있다. 면내변형률의 분포에 있어서는 2차원 판이론에 의한 결과와 3차원 이론에 의한 결과가 서로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 5는 층간전단변형률의 분포를 보여주고 있다. 본 연구에서 가정한 고차변위모델에 의한 결과

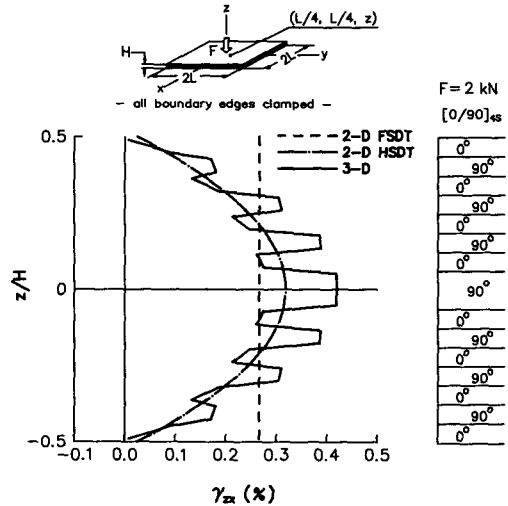


Fig. 5 Interlaminar shear strain distribution through the thickness of laminate subjected to a static loading

는 3차원 이론에 의한 결과와 전체적인 경향이 일치하며 일차전단변형이론을 적용한 결과에 비하여 정확한 결과를 보이고 있다.

Fig. 6, Fig. 7, Fig. 8은 모두 일차전단변형만을 고려한 경우에 대하여 선형 및 비선형해석을 수행한 동일한 해석결과를 각각 하중과 처짐과의 관계, 처짐과 변형률과의 관계, 하중과 변형률과의 관계로 도시한 것이다. 먼저 Fig. 6은 대처침의 효과를

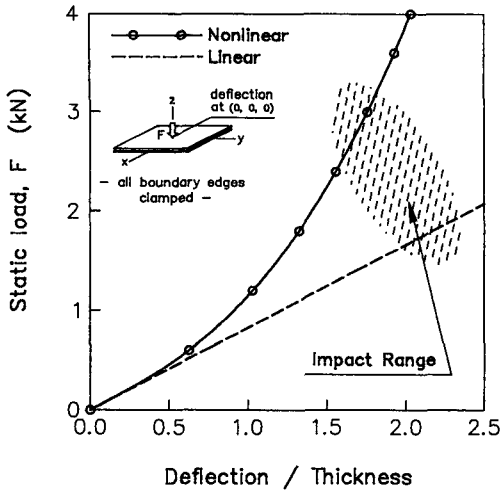


Fig. 6 Load and deflection curve of the laminate subjected to static loading by the nonlinear analysis and the linear analysis.

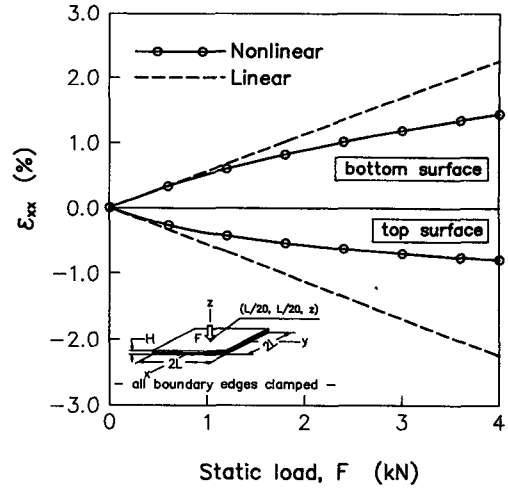


Fig. 8 Strain at a point( $L/20, L/20, z$ ) and load of the laminate subjected to static loading by the nonlinear analysis and the linear analysis

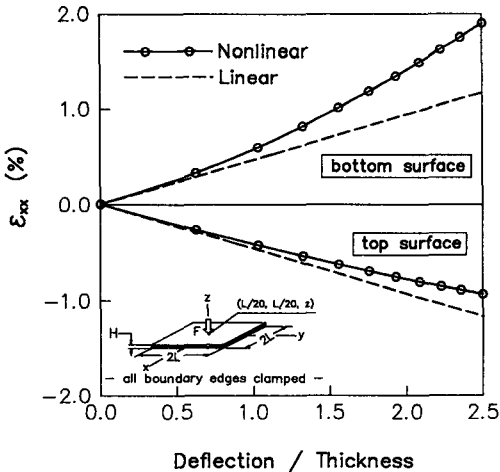


Fig. 7 Strain at a point( $L/20, L/20, z$ ) and deflection of the laminate subjected to static loading by the nonlinear analysis and the linear analysis

보여주고 있다. 본 연구에서 해석하고자 하는 저속 충격의 경우에는 판의 최대 처짐이 두께의 1.5배 이상이므로 대치짐의 효과를 고려하여 비선형해석을 수행하여야 한다는 것을 알 수 있다.

Fig. 7은 하중이 작용하는 지점과 가까운 임의의 한 지점에 대하여 적층판의 상하면에서 처짐의 변화에 따르는 면내변형률,  $\epsilon_{xx}$ 의 변화를 대표적으로 보여주고 있다. 대치짐의 효과를 고려하면 처짐이

증가할수록 아래쪽 표면에서의 인장변형률은 증가하고 있으나 위쪽 표면에서의 압축변형률은 감소하고 있음을 알 수 있다. 이것은 비선형해석의 경우에 박막효과에 의하여 전체적으로 인장변형률이 나타나고 처짐의 형상이 변하기 때문이다.

Fig. 8은 하중의 변화에 대한 면내변형률,  $\epsilon_{xx}$ 의 변화를 보여주고 있다. 동일한 크기의 하중이 작용하는 경우에 대치짐의 효과를 고려하게 되면 판의 강성이 증가하게 되어 처짐이 감소하며 이에 따라 변형률이 상대적으로 작게 나타나고 있음을 알 수 있다.

### 3.2 충격거동해석

앞절에서 정적해석의 결과를 살펴보았다. 정적해석의 경우에 비선형해석을 하면 동일한 처짐의 경우에는 아래쪽 표면에서의 인장변형률이 선형해석의 결과보다 크게 나타나지만, 동일한 하중의 경우에는 아래쪽 표면에서의 인장변형률이 선형해석의 결과보다 작게 나타나고 있다. 충격거동을 해석하는 경우에는 비선형해석을 하면 박막(membrane) 효과로 인하여 판의 강성이 증가하게 되어 처짐은 작게 나타나고 충격하중은 크게 나타난다. 따라서 충격거동을 비선형해석하는 경우에 발생하는 변형률의 크기에 대해서 선형해석의 결과와 주의해서 비교해 볼 필요가 있다.

Fig. 9에서 Fig. 12는 충격체의 질량이 크고 충격



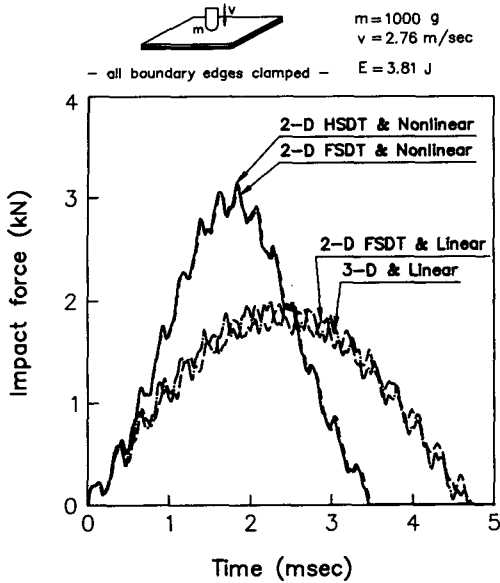


Fig. 9 Impact force history based on various theories in case of  $m=1000$  g

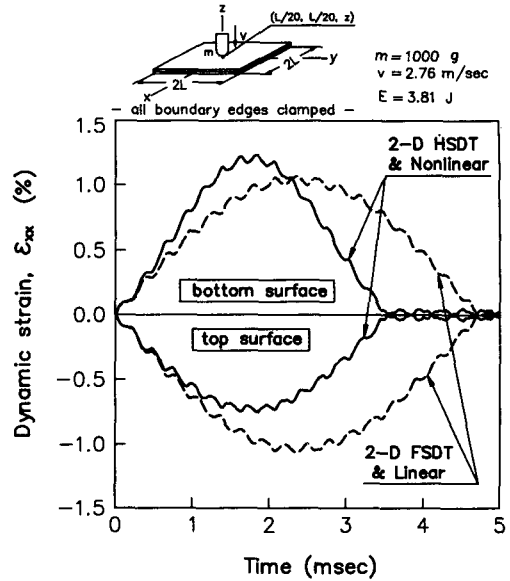


Fig. 11 Dynamic strain history of the laminate at a point  $(L/20, L/20, z)$  in case of  $m=1000$  g

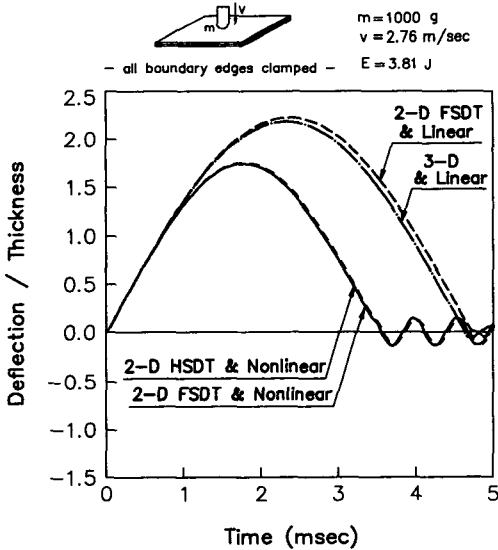


Fig. 10 Normalized deflection history based on various theories in case of  $m=1000$  g

속도는 작은 충격조건에 대한 결과이다. 먼저 Fig. 9는 여러 이론에 의하여 해석된 충격하중이력곡선들이다. 전체적으로 충격하중은 대처짐효과를 고려하여 비선형해석하는 경우에 선형해석의 경우보다 매우 큰 값으로 나타나고 있다. 즉, 충격하중은 대처짐효과와 고려여부에 의하여 크게 좌우되며, 고

차전단변형의 효과는 크지 않았다. 또한 판이론에 의한 2차원 해석결과는 3차원 이론에 의한 해석결과와 큰 차이가 없이 거의 일치하였다.

Fig. 10은 적층판의 충격지점에서 발생하는 처짐이력곡선들이다. 처짐은 대처짐효과를 고려하여 비선형해석하는 경우에 선형해석의 경우보다 작은 값으로 나타나고 있다. 충격하중이력의 경우와 같이 충격으로 인하여 발생하는 적층판의 처짐은 대처짐효과와 고려 여부에 의하여 크게 좌우되었다. 따라서 이후의 해석결과에 대해서는 고차전단변형과 대처짐을 동시에 고려하여 비선형해석한 결과와 일차전단변형만을 고려하여 선형해석한 두 결과에 대해서 비교하였다.

Fig. 11은 적층판의 상하면에서의 면내변형률,  $\epsilon_{xx}$ 에 대한 이력곡선이다. 이 그림에서 적층판의 아래쪽 표면에서의 인장변형률이 비선형해석의 경우에 선형해석의 경우보다 더 크게 평가되었다. 따라서 충격거동의 경우에는 충격하중이 증가하여 변형률이 증가하는 효과가 처짐이 감소하여 변형률이 감소하는 효과보다 더 크게 작용하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 12는 충격거동에 대한 하중과 처짐과의 관계에 대하여 정적해석의 결과와 비교한 것이다. 이 그림을 통하여 충격체의 질량이 큰 경우의 저속충

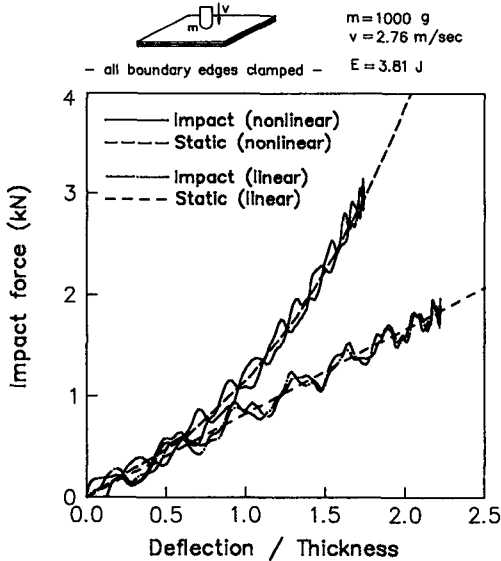


Fig. 12 Impact force and deflection curve by the non-linear analysis in case of  $m=1000$  g

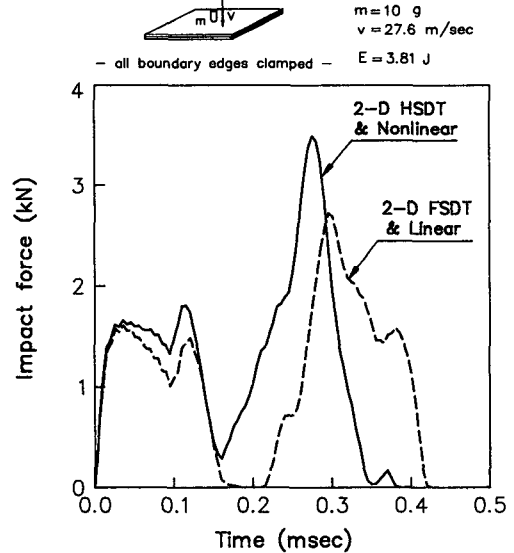


Fig. 13 Impact force history in case of  $m=10$  g

격거동은 거의 준정적(quasi-static) 거동을 보이고 있음을 알 수 있다.

다음의 Fig. 13부터 Fig. 15까지는 충격체의 충격 에너지는 앞의 Fig. 9부터 Fig. 12까지의 충격조건과 동일하지만 충격체의 질량이 작고 충격속도는 큰 경우에 대한 해석결과이다. 먼저 Fig. 13은 충격하중이력곡선이다. 이 경우에도 비선형해석의 경우가 선형해석의 경우보다 충격하중이 크게 나타났다. 그러나 이 경우에는 앞의 Fig. 9의 경우와는 달리 충격하중의 변화가 심하며 충격하중이 존재하는 충격체와 적층판과의 접촉이 대략적으로 두 번으로 나누어져 발생하였다.

Fig. 14는 충격받은 지점에서 처짐에 대한 이력곡선이다. 이 경우에도 앞의 Fig. 10에서와 같이 비선형해석의 결과가 처짐을 작게 평가하였다. 또한 이 경우에는 앞의 충격체의 질량이 큰 경우와 비교하여 충격체와의 접촉이 끝난 후에도 적층판의 거동이 매우 크게 계속되었다. 따라서 충격체의 질량이 작고 속도가 큰 경우에는 충격시에 발생하는 적층판의 요동(fluctuation)이 심하고 전체적으로 동적효과가 크게 작용하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 13, 14와 앞의 Fig. 9, 10에서 충격체가 동일한 운동에너지를 갖는 경우에 최대 충격하중과 최대 처짐은 거의 동일한 정도의 값으로 나타나고 있다. 다만 충격체의 질량이 작은 경우에 최대충격하

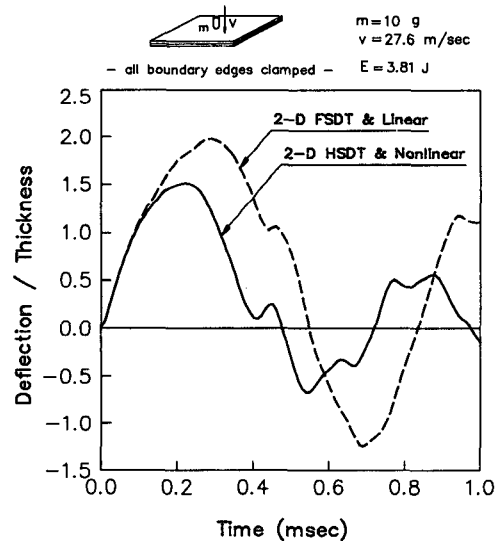


Fig. 14 Normalized deflection history in case of  $m=10$  g

중은 약간 더 크게 나타나고 최대처짐은 약간 더 작게 나타나고 있는데, 이는 충격체의 질량이 작은 경우에는 접촉시간이 짧고 따라서 적층판의 관성에 의한 강성이 더 크게 작용하기 때문이다.

Fig. 15는 면내변형률,  $\epsilon_{xx}$ 의 이력곡선을 보여주고 있는데, 최대 인장변형률의 크기에 있어서 비선형해석의 결과가 선형해석의 결과보다 크지 않고 거의 같은 정도로 평가되고 있다. 이것은 적층판의

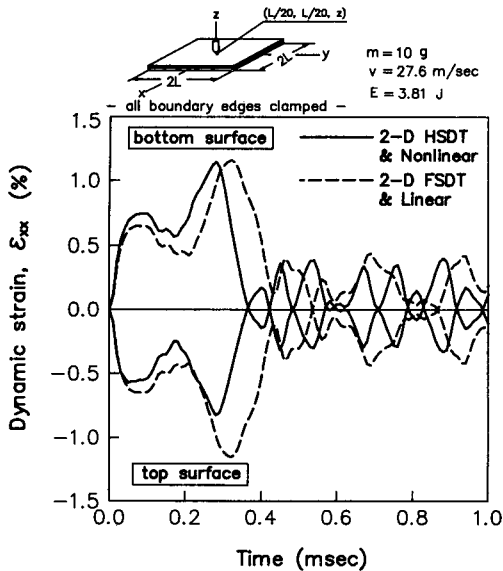


Fig. 15 Dynamic strain history of the laminate at a point  $(L/20, L/20, z)$  in case of  $m=10$  g

동적효과로 인하여 요동이 심하게 나타나고 따라서 적층판의 기울기의 변화가 심하기 때문에 앞의 충격체의 질량이 큰 경우에서와 같이 일관성있게 대처짐의 효과가 나타나지 않기 때문이다. 또한 이 충격조건에 Fig. 14의 처짐에 대한 이력의 경향과 Fig. 15의 변형률에 대한 이력의 경향에 있어서 차이가 존재하는 것도 충격으로 인한 접촉과정에서 적층판의 요동이 심하기 때문이다.

#### 4. 결 론

본 연구의 정적해석 및 충격거동해석 결과로부터 다음의 사실을 알 수 있었다.

(1) 적층판의 면내변형률에 대해서는 2차원 판이론에 의해서도 정확히 해석되며, 본 연구에서 가정한 고차변위모델에 의해서 해석된 중간전단변형률은 일차전단변형이론에 의한 결과보다 3차원 이론에 의한 결과에 접근하였다.

(2) 적층판의 전체적인 충격거동은 대처짐의 효과를 고려하여 비선형해석을 수행하여야 정확히 해석할 수 있으며, 고차전단변형의 효과는 크지 않은 것으로 나타났다.

(3) 충격체의 질량이 적층판의 질량에 비하여 상대적으로 매우 크고 충격속도가 작은 충격조건인 경우에는 대처짐의 효과가 중요하게 나타났다. 즉,

선형해석의 결과는 충격하중과 충격시 발생하는 변형률을 과소평가하고 처짐은 과대평가하였다. 그리고 이 경우에는 전체적인 충격거동에 있어서 준정적인 거동을 보였다.

(4) 충격체의 질량이 적층판의 질량에 비하여 상대적으로 크지 않고 충격속도가 큰 충격조건인 경우에는 동적효과가 크게 나타나며 접촉이 끝난 후에도 판의 진동이 크게 계속되었다. 이 경우에는 충격시 발생하는 적층판의 심한 요동으로 인하여 변형률의 크기에 있어서는 대처짐의 효과가 일관성 있게 나타나지 않았다.

#### 후 기

본 연구는 1992년도 국방과학연구소의 장기기초연구비(과제번호 ADD-90-5-2)의 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Sun, C. T. and Chattopadhyay, S., 1975, "Dynamic Response of Anisotropic Laminated Plates Under Initial Stress to Impact of a Mass," *Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics*, pp. 693~698.
- (2) Ramkumar, R. L. and Chen, P. C., 1983, "Low-Velocity Impact Response of Laminated Plates," *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1448~1452.
- (3) Lee, J. D., Du, S. and Liegowitz, H., 1984, "Three-Dimensional Finite Element and Dynamic Analysis of Composite Laminate Subjected to Impact," *Computers & Structures*, Vol. 19, pp. 807~813.
- (4) Shivakumar, K. N., Elber, W. and Ilg, W., 1985, "Prediction of Impact Force and Duration Due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates," *Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 674~680.
- (5) Cairns, D. S. and Lagace, P. A., 1989, "Transient Response of Graphite/Epoxy and Kevlar/Epoxy Laminates Subjected to Impact," *AIAA Journal*, Vol. 27, pp. 1590~1596.
- (6) Yang, S. H. and Sun, C. T., 1982, "Indentation Law for Composite Laminates," *Composite*

- Materials : Testing and Design, ASTM STP 787, pp. 425~449.
- (7) Sankar, B. V. and Sun, C. T., 1985, "Low-Velocity Impact Response of Laminated Beams Subjected to Initial Stresses," AIAA Journal, Vol. 23, pp. 1962~1985.
- (8) Tan, T. M. and Sun, C. T., 1985, "Use of Static Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite," Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 6~12.
- (9) Sun, C. T. and Chen, J. K., 1985, "On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates," Journal of Composite Materials, Vol. 19, pp. 490~504.
- (10) Chen, J. K. and Sun, C. T., 1985, "Dynamic Large Deflection Response of Composite Laminates Subjected to Impact," Composite Structures, pp. 59~73.
- (11) Chen, J. K. and Sun, C. T., 1985, "Analysis of Impact Response of Buckled Composite Laminates," Composite Structures, pp. 97~118.
- (12) 이영신, 박 웅, 1990 "고차전단변형이론에 의한 복합재료 적층판의 저속충격응답," 대한기계학회논문집, 제14권, 제6호, pp. 1365~1381.
- (13) 최익현, 홍창선, 이 인, 1991, "복합적층판의 저속충격거동에 대한 비선형해석," 대한기계학회 논문집, 제15권, 제3호, pp. 757~770.
- (14) Wu, H. Y. and Springer, G. S., 1988, "Impact Induced Stresses, Strains, and Delamination in Composite Plates," Journal of Composite Materials, Vol. 22, pp. 533~560.
- (15) 고종인, 홍창선, 이인, 1991, "저속충격에 의한 복합적층판의 손상해석," 한국항공우주학회지 제19권, 제1호, pp. 33~42.
- (16) Lo, K. H., Cristensen, R. M. and Wu, E. M., 1977, "A High Order Theory of Plate Deformation," Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 44, pp. 663~676.
- (17) Phan, N. D. and Reddy, J. N., 1985, "Analysis of Laminated Composite Plates Using a Higher-Order Shear Deformation Theory," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, pp. 2201~2219.
- (18) Mallikarjuna and Kant, T., 1988, "Dynamics of Laminated Composite Plates with a Higher Order Theory and Finite Element Discretization," Journal of Sound and Vibration, Vol. 126, pp. 463~475.
- (19) Jones, R. M., 1975, Mechanics of Composite Materials, McGraw-Hill, New York.
- (20) Reddy, J. N., 1984, Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley & Sons, New York.
- (21) Taylor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L., 1976, "A Non-Conforming Element for Stress Analysis," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, pp. 1211~1219.
- (22) Akay, H. U., 1980, "Dynamic Large Deflection Analysis of Plates Using Mixed Finite Elements," Computers & Structures, Vol. 11, pp. 1~11.
- (23) Reddy, J. N., 1983, "Geometrically Nonlinear Transient Analysis of Laminated Composite Plate," AIAA Journal, Vol. 21, pp. 621~624.

부 록

본 연구에서 유도된 유한요소방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{\dot{U}\} + [[K^L] + [K^N(U)]]\{U\} = \{F\} \quad (A. 1)$$

여기서 질량행렬,  $[M]$ 과 선형강성행렬,  $[K^L]$  그리고 비선형 강성행렬,  $[K^N(U)]$ 의 자세한 구성은 다음과 같다.

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1[S^{00}] & 0 & 0 & I_2[S^{00}] & 0 & I_4[S^{00}] & 0 \\ & I_1[S^{00}] & 0 & 0 & I_2[S^{00}] & 0 & I_4[S^{00}] \\ & & I_1[S^{00}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & I_3[S^{00}] & 0 & I_5[S^{00}] & 0 \\ & & & & I_3[S^{00}] & 0 & I_5[S^{00}] \\ sym & & & & & I_7[S^{00}] & 0 \\ & & & & & & I_7[S^{00}] \end{bmatrix} \quad (A. 2)$$

$$[K^L] = \begin{bmatrix} [K_L^{11}] & [K_L^{12}] & 0 & [K_L^{14}] & [K_L^{15}] & [K_L^{16}] & [K_L^{17}] \\ & [K_L^{22}] & 0 & [K_L^{24}] & [K_L^{25}] & [K_L^{26}] & [K_L^{27}] \\ & & [K_L^{33}] & [K_L^{34}] & [K_L^{35}] & [K_L^{36}] & [K_L^{37}] \\ & & & [K_L^{44}] & [K_L^{45}] & [K_L^{46}] & [K_L^{47}] \\ & & & & [K_L^{55}] & [K_L^{56}] & [K_L^{57}] \\ & & sym & & & [K_L^{66}] & [K_L^{67}] \\ & & & & & & [K_L^{77}] \end{bmatrix} \quad (A. 3)$$

$$[K^N(U)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & [K_N^{13}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_N^{23}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [K_N^{31}] & [K_N^{32}] & [K_N^{33}] & [K_N^{43}] & [K_N^{53}] & [K_N^{63}] & [K_N^{73}] \\ 0 & 0 & [K_N^{43}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_N^{53}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_N^{63}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_N^{73}] & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A. 4)$$

식(A. 2)에서  $I_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 7)$ 은 질량계수로  
서 다음과 같다.

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_7) \\ = \int_{-\frac{z}{h}}^{\frac{z}{h}} \rho(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (A. 5)$$

또한 식(A. 3)과 식(A. 4)의  $[K_L^i]$ ,  $[K_N^j]$ 의 각  
항중에서  $i, j=1, 2, 3, 4, 5$ 의 항은 일차전단변형이론  
에 의해 유도된 식과 동일하다.<sup>(13)</sup> 이 외의 항은  
다음과 같다.

$$\begin{aligned} [K_L^{16}] &= E_{11}[S^{xx}] + E_{16}[S^{xy}] + E_{16}[S^{yx}] + E_{66}[S^{yy}] \\ [K_L^{17}] &= E_{12}[S^{xy}] + E_{16}[S^{xx}] + E_{26}[S^{yy}] + E_{66}[S^{yx}] \\ &= [K_L^{26}]^T \\ [K_L^{27}] &= E_{22}[S^{yy}] + E_{26}[S^{yx}] + E_{26}[S^{xy}] + E_{66}[S^{xx}] \\ [K_L^{36}] &= 3\bar{D}_{45}[S^{y0}] + 3\bar{D}_{55}[S^{x0}] \\ [K_L^{37}] &= 3\bar{D}_{44}[S^{y0}] + 3\bar{D}_{45}[S^{x0}] \\ [K_L^{46}] &= F_{11}[S^{xx}] + F_{16}[S^{xy}] + F_{16}[S^{yx}] \\ &\quad + F_{66}[S^{yy}] + 3\bar{D}_{55}[S^{x0}] \\ [K_L^{47}] &= F_{12}[S^{xy}] + F_{16}[S^{xx}] + F_{26}[S^{yy}] \\ &\quad + F_{66}[S^{yx}] + 3\bar{D}_{45}[S^{x0}] = [K_L^{56}]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_L^{57}] &= F_{22}[S^{yy}] + F_{26}[S^{yx}] + F_{26}[S^{xy}] \\ &\quad + F_{66}[S^{xx}] + 3\bar{D}_{44}[S^{x0}] \\ [K_L^{66}] &= H_{11}[S^{xx}] + H_{16}[S^{xy}] + H_{16}[S^{yx}] \\ &\quad + H_{66}[S^{yy}] + 9\bar{F}_{55}[S^{x0}] \\ [K_L^{67}] &= H_{12}[S^{xy}] + H_{16}[S^{xx}] + H_{26}[S^{yy}] \\ &\quad + H_{66}[S^{yx}] + 9\bar{F}_{45}[S^{x0}] \\ [K_L^{77}] &= H_{22}[S^{yy}] + H_{26}[S^{yx}] + H_{26}[S^{xy}] \\ &\quad + H_{66}[S^{xx}] + 9\bar{F}_{44}[S^{x0}] \end{aligned} \quad (A. 6)$$

또한 비선형 강성행렬의 구성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [K_N^{36}]/2 &= E_{11}[R_x^{xx}] + E_{16}[R_x^{xy}] + E_{12}[R_y^{yx}] \\ &\quad + E_{26}[R_y^{yy}] + E_{16}[R_x^{yx}] + E_{66}[R_x^{yy}] \\ &\quad + E_{16}[R_y^{xx}] + E_{66}[R_y^{xy}] = [K_N^{63}]^T \\ [K_N^{37}]/2 &= E_{12}[R_x^{xy}] + E_{16}[R_x^{xx}] + E_{22}[R_y^{yy}] \\ &\quad + E_{26}[R_y^{yx}] + E_{26}[R_x^{yy}] + E_{66}[R_x^{yx}] \\ &\quad + E_{26}[R_y^{xy}] + E_{66}[R_y^{xx}] = [K_N^{73}]^T \end{aligned} \quad (A. 7)$$

식(A. 6)과 (A. 7)에서  $[S^{\xi\eta}]_{\sigma} (\xi, \eta=0, x, y)$ 와  
 $[R^{\xi\eta}]_{\sigma} (\xi, \eta=x, y)$ 의 구성은 참고문헌<sup>(13)</sup>의 식  
과 같다. 여기서  $i, j=1, 2, 3, \dots, 9$ 이다.