

〈論 文〉

사각형 유한요소망의 자동생성

채수원* · 신보성** · 민중기***

(1993년 3월 31일 접수)

Automatic Mesh Generation with Quadrilateral Finite Elements

Soo-Won Chae, Bo-Sung Shin and Joon-Ki Min

Key Words : Automatic Mesh Generation(자동요소망구성), Quadrilateral Elements(사각형요소), Looping Algorithm(루핑 알고리즘), Split Line(분할선), Six-Node/Eight-Node Operator(6-절점/8-절점 오퍼레이터), Splitting Criteria(분할기준)

Abstract

An automatic mesh generation scheme has been developed for finite element analysis with two-dimensional, quadrilateral elements. The basic strategies of the method are to transform the analysis domain into loops with key nodes and the loops are recursively subdivided into subloops with the use of best split lines. Finally by using the basic loop operators, the meshes are completed. In this algorithm an eight-node loop operator is proposed, which is useful in the area where the change of element size is large and the splitting criteria for subdividing the loops have also been modified to the existing algorithms. Lines, arcs, and cubic spline curves are used to define the boundaries of analysis domain. Sample meshes for several geometries are presented to demonstrate the robustness of the algorithm.

1. 서 론

유한요소법을 사용하여 문제를 해석하는 경우 대부분의 노력과 시간이 해석대상의 기하학적 자료 산출과 그에 대한 자료의 입력에 소모되고 있다. 따라서 설계 및 해석의 자동화를 위하여 입력 자료 준비를 자동화하는 일 즉, 전처리과정(preprocessing)을 사용자가 힘들이지 않고 쉽게 이용할 수 있도록 하는 일은 실제 문제의 해석에 있어서 매우 중요하다.

최근에 이에 대한 연구가 활발히 진행되어 선형 해석을 위한 삼각형 요소망의 자동생성기법들은 많

이 개발되었다.^(1~6) 그러나 일반적으로 사각형요소가 삼각형요소에 비해 계산효율이 높고, 기존의 프로그램들이 선형 및 비선형문제의 해석에서 주로 사각형 요소를 많이 사용하고 있으므로, 이를 자동적으로 생성하는 기법의 개발이 매우 필요하게 되었다. 그럼에도 불구하고 사각형요소는 그 기하학적 제한성으로 인하여 임의의 해석 영역에서 자유롭게 요소망을 생성하기가 어려우므로, 이의 자동생성기법에 관한 연구는 그다지 많지 않다.

M.L.C. Sluiter^(7,8)는 해석영역을 하나의 연속루프(continuous loop)로 구성하고 이를 분할선(split line)을 사용하여 부루프(subloop)들로 계속해서 나누어 가며 사각형요소를 생성하는 방법을 개발하였고, 이를 토대로 상용프로그램인 TRIQUAMESH를 개발하였다. J.A. Talbert⁽⁹⁾는 Sluiter가 제안한 방법을 기초로 하여 보다 구체적이고 일반화된 방

*정회원, 홍익대학교 기계공학과

**정회원, 한국기계연구원 CAD/CAM실

***홍익대학교 기계공학과 대학원

법을 제안하였다. 즉, 베지에르곡선(Bezier curve)으로 해석영역 경계를 정의하고, Sluiter가 제안한 6-절점 오퍼레이터를 일반화하여 이를 루핑 알고리즘(looping algorithm)이라 하였다. 또 그는 요소망 밀도가 급변하는 영역에 대해서는 개선계수(refinement coefficient)를 사용하여 요소망의 찌그러짐(distortion)을 방지하였으며, 경계에 인접한 요소들은 가능한 한 정사각형요소와 가깝도록 구성하기 위하여 오프셋요소(offset element)를 도입하였다. 한편 W.T. Wu⁽¹⁰⁾는 6-절점 오퍼레이터를 사용하는 대신에 복잡한 패턴(pattern)을 몇가지 기본 패턴으로 나누어 가는 패턴매칭(pattern matching)기법을 도입하여 요소의 밀도가 크게 변하는 경우에도 적용할 수 있게 하였다. 또한 요소망의 밀도함수(density function)를 사용하여 해석영역 내부에서도 요소망밀도를 자유롭게 변화시킬 수 있게 하였다.

그러나 이들 연구는 그 기법들이 구체적으로 공개되어 있지 않거나, 기법의 일반성에 문제가 있어, 이의 구현에는 많은 어려움이 있다. 즉, Talbert가 제안한 6-절점 오퍼레이터만으로는 요소망의 밀도차이가 큰 문제에 적용하기 부적합하며, Wu의 패턴매칭기법은 그 구체적 실현방법이 공개되어 있지 않다. 따라서 본 논문에서는 Talbert가 제안한 방법을 개선하여 보다 일반적인 문제의 해석에 적용할 수 있게 하였다.

일반적으로 4-절점 사각형 유한요소망의 자동생성기법은 임의의 해석영역에 대해서도 모델링이 가능해야 하며 다음의 조건을 최대한 만족해야 한다.

(1) 사용된 기법은 소요된 노력과 비용을 고려해볼때 경제적이어야 한다.

(2) 생성된 사각형요소의 모든 내각(interior angle)들은 가능한 90°에 가까워야 한다.

(3) 사용자가 해석영역의 어느 부분에서나 요소망밀도(mesh density)를 쉽게 조절할 수 있어야 한다.

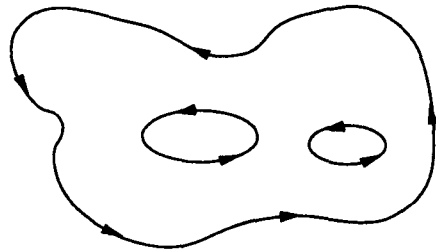
그러나 사각형요소는 기하학적인 형상으로 인하여 위의 조건들을 모두 만족하기가 쉽지 않다. 특히 요소망의 밀도 차이가 큰 곳에서의 요소망 자동생성은 매우 까다로운 사항이다. 따라서 본 논문에서는 루핑 알고리즘을 기초로 하여 요소망 밀도가 크게 변하는 영역에서의 요소망 구성을 위하여 기존의 6-절점 루프 오퍼레이터외에 새로 8-절점 루프 오퍼레이터를 개발하고 이를 일반화하였다. 또

한 최적 분할선의 선정기준을 개선하였고, 6-절점/8-절점 루프 오퍼레이터 및 레이어 오퍼레이터에 의한 영역 분할과정의 연속적인 흐름을 위하여 루프트리(loop-tree) 자료구조를 사용하였다. 또한 얻어진 요소망에서 강성행렬의 밴드폭(bandwidth)을 줄이기 위하여 밴드폭 최소화기법으로 널리 사용되고 있는 Reverse-Cuthill McKee방법을 적용하였다. 이와 같이 얻은 요소망은 4-절점 또는 8-절점 사각형요소를 사용할 수 있게 되어 있다.

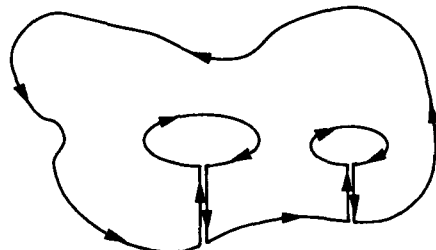
2. 요소망의 자동생성기법

2.1 루프의 정의

Fig. 1에서 보는 바와 같이 해석영역의 경계를 루프(loop)라 하고 경계가 독립적으로 존재하는 n개의 루프를 (n-1)개의 절취선(cut line)을 이용하여 하나의 연속루프(continuous loop)로 만든다. 해석영역의 경계는 직선, arc, cubic spline 등의 조합으로 정의될 수 있게 하였으며, 그 결과 임의의 해석영역에 대해서도 경계를 표현할 수 있다. 또 절취선의 위치에 따라 최종 요소망은 달라지므로 사용자는 가능한 한 정사각형요소가 생성될 수



(a) A boundary made of three independent closed loops



(b) One continuous loop is formed by making the cuts shown

Fig. 1 Creating a continuous loop

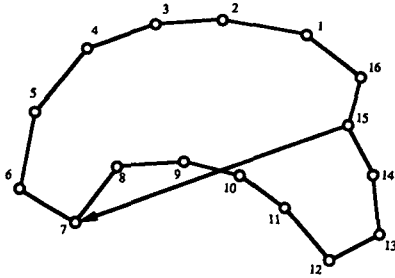


Fig. 2 A concave loop showing an incorrect split line between node 15 and 7

있도록 해석영역의 기하학적 형상을 고려하여 절취선이 해석영역 경계에 수직이 되도록 정하는것이 바람직하다. 해석영역 경계에서의 절점들은 사용자가 지정한 요소크기 변화율에 따라 생성된다. 또한 본 연구에서는 사용자의 편의를 위하여 전체 해석영역에 걸쳐 요소의 크기를 일정하게 지정할 수도 있게 되어 있다. 여기서 루프상의 절점번호는 루프의 진행방향으로 볼 때 해석영역이 왼쪽에 위치하도록 경계절점을 배치한다. 루프상의 모든 절점에서 절점과 이웃한 절점사이의 각으로 내각(interior angle)을 계산한다. 모든 내각이 180°보다 작은 경우의 루프를 볼록루프(convex loop)라 하고 어느 한 내각이라도 180°보다 큰 경우의 루프를 오목루프(concave loop)라 한다. 이때 Fig. 2에서 보는 바와 같이 오목루프에서는 분할선(spilt line)이 루프를 벗어나는 경우가 발생한다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 최초의 연속루프가 오목루프이면 먼저 분할선을 사용하여 부루프로 분할하되 부루프가 볼록루프가 될때까지 영역분할을 계속한다. 이때 부루프에서 절점수가 4개인 4-절점 루프, 6개인 6-절점 루프, 8개인 8-절점 루프가 나타날 수 있으며, 이들 루프는 대부분 볼록루프이지만 특수한 경우 6-절점 루프, 8-절점 루프에서도 오목루프가 생길 수 있다. 이들 루프에 대해서는 뒤에 다시 설명될 별도의 6-절점/8-절점 루프 오퍼레이터에 의해 여러개의 사각형요소들로 한번에 분할된다.

2.2 루프에서 가시절점의 결정

앞에서 설명한 바와 같이 경계선상의 절점 i 와 j 의 연결선이 분할선이 되려면 무엇보다도 절점 i 와 j 의 연결선이 루프의 경계선을 벗어나지 않아야 한다. 즉 주어진 루프에서 임의의 한 점 j 가 절점 i

로부터 가시절점이 되어야 한다. Sluiter와 Talbert 등은 오목루프상에서 기준선(reference line)과 절점 i 와 j 를 연결한 직선과의 사이각을 절점번호에 따라 도시한 절점번호-사이각 도표를 그리고 절점번호 증가에 따라 나타나는 각도의 국부최대값(local maximum)과 국부최소값(local minimum)을 분할선을 결정하는 기준(criteria)으로 사용하였다. Fig. 3에서 절점 i 와 절점 $i+1$ 을 연결한 직선을 기준선이라 한다. 특히 Talbert의 기준은 국부최대값과 국부최소값 근처의 절점들을 제외시킴으로써 보다 간단하게 가시절점들을 결정할 수 있는 장점이 있으나 정확성이 떨어지는 근사적 기준이다.^(7,8,9) 본 논문에는 이들의 방법보다 더욱 간단한 기준을 사용하였다. 즉 기준선과 일정한 각도내에 있는 루프상의 모든 절점에 대해서 거리를 계산하여 거리가 먼 절점은 앞의 절점을 통과하는 것과 동일한 결과이므로 비가시절점(invisible node)으로 간주한다. 여기서 일정한 각도란 절점번호 순서에 따라 인접한 두 절점과 절점 i 사이의 각을 사용한다. 절점 $i-1, i, i+1$ 을 제외한 모든 절점에 대하여 루프의 절점번호 순서에 따라 위에서 제안한 기준을 적용하여 가시절점들만 선택할

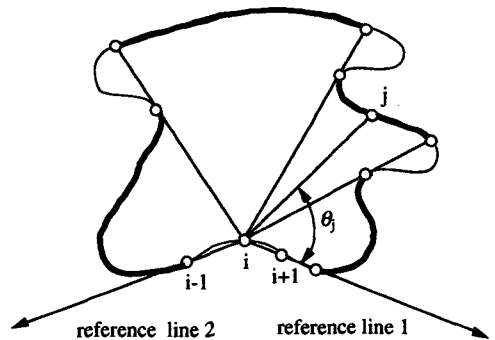


Fig. 3 Determination of visible nodes from boundary node i

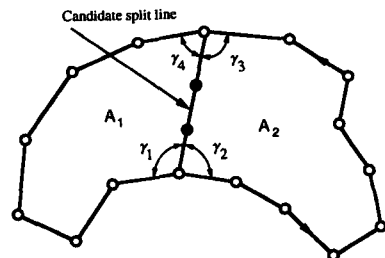


Fig. 4 A loop showing a candidate split line and the split line parameters

수 있다. Fig. 3에 굵은 실선으로 표시된 영역은 절점 i 에서 구한 가시절점들을 표시한 영역으로서 최적분할선(best split line)이 될수 있는 후보분할선(candidate split line)의 후보절점들이다. 후보절점이 되는 절점 i 의 선택은 현재 루프가 오목루프인 경우 오목한 절점들 중에서 최적분할선을 찾아 분할하며, 현재 루프가 볼록루프이면 Fig. 4에서와 같이 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 모두 60° 이상되는 후보절점 쌍 중에서 최적분할선을 찾아 분할한다.

2.3 최적분할선의 정의

최적분할선은 하나의 가시절점쌍(visible nodes pair)으로 구성되며 이 선으로 루프가 두개의 부루프(subloop)로 나누어진다. 최적분할선을 사용하여 최초의 연속루프를 분할해 나가면서 부루프가 4-절점 루프(사각형요소), 6-절점 루프 또는 8-절점 루프가 되면 더 이상 분할하지 않는다.

최적분할선을 정하기 위하여 Sluiter와 Talbert 등은 분할각도, 분할선 길이 및 분할선상의 절점간격 등을 그 기준으로 하였으나, 본 연구에서는 이들의에 분할선에 의해 나누어지는 부루프들의 면적도 기준에 포함시킴으로서 보다 좋은 결과를 얻을 수 있도록 하였다. 모든 후보분할선중에서 식(1)과 같은 네 개의 무차원화된 매개변수 즉, 분할 각도, 분할 면적, 분할선 길이 및 절점 간격 의 오차들로 이루어진 값을 최소로 하는 분할선을 선택함으로써, 생성되는 요소들의 내각이 90° 에 가깝고 요소의 형상이 정사각형에 가까우며, 분할선에 의해 얻어지는 두 부루프의 면적이 가급적 서로 같게 되고 새로 생성될 요소의 크기에 대한 오차값이 최소로 되는 방향으로 새로운 요소망이 구성되게 된다.

$$S_L = C_1\alpha + C_2\beta + C_3\gamma + C_4\epsilon \tag{1}$$

여기서 C_1, C_2, C_3, C_4 는 경험적으로 구해지는 가중치로서 상수값이며 $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1$ 을 만족하는 범위에서 적절한 값을 사용하였다. α 는 실제의 분할각도(split angle)와 이론적인 분할각도인 90° 와의 차이에 대한 무차원화된 매개변수이고, β 는 분할된 각 부루프의 면적과 이들의 평균면적과의 차이를 무차원화한 매개변수, γ 는 분할선의 길이에 대한 무차원화된 매개변수, ϵ 은 절점간격의 오차에 대한 무차원화된 매개변수를 나타낸다.

(1) 분할각도 매개변수(α)

후보분할선은 인접한 절점들과 연결된 네개의 분

할각도를 갖게되며 이론적으로 이러한 각도들이 90° 가 되면 그 요소는 직사각형요소가 된다. 실제의 분할각도들과 이론적인 분할각도 90° 와의 차이의 합을 360° 로 나누어 무차원화시킨 매개변수를 α 로 정의한다. 이를 수식으로 표현하면 식(2)와 같다. 여기서 $\gamma_i (i=1, \dots, 4)$ 는 실제 분할각도를 나타낸다. 이에 대한 설명은 Fig. 4에 나타나 있다.

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^4 \left| \gamma_i - \frac{\pi}{2} \right|}{2\pi} \tag{2}$$

(2) 분할면적 매개변수(β)

분할선에 의해 하나의 루프를 두개의 부루프로 나눌때 가급적 같은 면적을 갖도록 하기 위하여, 두 부루프의 면적 A_1, A_2 와 이들의 평균면적과의 차이를 전체 면적으로 나누어 식(3)과 같이 무차원화 시킨 매개변수를 분할면적 매개변수(β)로 사용한다.

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^2 |A_i - A_{average}|}{\sum_{i=1}^2 A_i} \tag{3}$$

(3) 분할길이 매개변수(γ)

긴 분할선은 길고 좁은 영역으로 분할하므로 정사각형의 요소에 가깝게 되기 위해서는 분할선이 가능한 짧아야 한다. 분할선 길이에 대한 매개변수는 분할선의 길이를 "특정길이(characteristic length)"로 나누어 무차원화시킨 매개변수 γ 를 사용한다. Fig. 5에서와 같이 이때의 특정길이는 루프를 포함하는 최소 직사각형의 대각선 길이를 사용한다.

$$\gamma = \frac{\text{split line length}}{\text{diagonal line length}} \tag{4}$$

(4) 분할오차 매개변수(ϵ)

모든 분할선들은 여러가지 요소크기를 갖는 절점

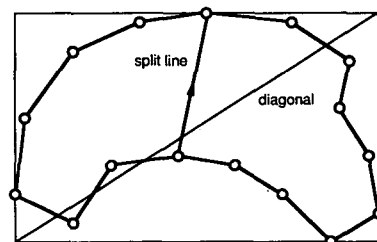


Fig. 5 Characteristic length of a loop

짝(node pair)으로 구성되어 있으므로 주어진 요소 크기의 변화율을 가지게 된다. 분할선상에 새로운 절점을 생성할 때, 이러한 분할선 양단에서 요소 크기가 적합하여야 한다. 그러나 이론적인 절점간격 크기에 정확히 일치하도록 절점개수를 결정하는 일은 매우 어려운 일이다. 따라서 분할선상의 양끝단에서 요소 크기 변화율을 고려하여 정한 절점간격과 절점개수에 의해 얻는 이론분할선길이(ideal spilt line length)와 절점간격에서 발생오차를 균일하게 배분하여 얻는 실제분할선길이(actual spilt line length)와의 차이를 실제분할선길기로 나누어 무차원화시킨 값을 식(1)의 네번째 매개변수 ϵ 로 정의한다.⁽⁹⁾

$$\epsilon = \frac{\text{actual length} - \text{length}}{\text{actual length}} \quad (5)$$

이 때 분할선상에 새로 생성되는 절점수는 다음 두 가지 조건을 만족해야 한다. 첫째, 생성된 절점수를 포함한 부루프의 절점수의 총합은 반드시 짝수가 되어야 하며, 둘째 분할선에서의 절점간격 오차를 최소화가 되도록 새로 생성할 절점수를 결정한다. 즉 새로 생성되는 부합선상의 최적 절점개수는 짝수개씩 더하거나 빼서 오차값을 계산함으로써 오차가 최소값을 가지게 될 때의 값이 최적 절점수가 된다.

2.4 6-절점/8-절점 루프 오퍼레이터

분할선으로 인하여 루프는 양분되면서 모든 루프가 6-절점루프, 8-절점 루프 또는 4-절점 루프(사각형요소)가 되면 분할을 중지한다. 6-절점/8-절점 루프는 분할선을 사용하지 않고 독립된 방법에 의해서 사각형요소들을 한번에 구성한다. 6-절점 루프는 Fig. 6에서 보는 바와 같이 루프의 형태에 따라 사각형요소가 2개, 3개, 4개 혹은 5개로 분할되고 이 4가지 유형중의 하나로 결정된다. 또 같은 유형이라도 내각이 180°에 가까운 내각 개수에 따른 루프의 형태가 여러가지로 구분된다. 이는 Talbert⁽⁹⁾가 일반화시킨 것을 본 연구에서 약간 수정한 것이다. 그러나 요소의 크기가 크게 변하는 영역에서는 6-절점 루프 오퍼레이터만으로는 요소망 구성이 곤란한 경우가 많이 발생한다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 8-절점 루프 오퍼레이터를 개발하였다. 8-절점 루프 오퍼레이터는 Fig. 7에 나타나 있다. 이는 6-절점루프 오퍼레이터와 같이 루프의 한번에 존재하는

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
Six-node loop Configuration				
Concave Six-node loops				
Convex Six-node loops with No 180° interior angles				
Convex Six-node loops with ONE 180° interior angles				
Convex Six-node loops with TWO 180° interior angles				
Convex Six-node loops with THREE 180° interior angles				

Fig. 6 A chart showing the different possible six-node loop operators⁽⁹⁾

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
Eight-node loop Configuration					
Convex loops with NO 180° interior angles					
Convex loops with ONE 180° interior angles					
Convex loops with TWO 180° interior angles					
Convex loops with THREE 180° interior angles					
Convex loops with FOUR 180° interior angles					
Concave loops & etc.					

Fig. 7 A chart showing the different possible eight-node loop operators

180°에 가까운 내각의 수에 따라서 루프의 형태가 결정되며, 한번에 3개에서 7개까지의 요소가 생성된다. Fig. 7에서 보는 바와 같이 8-절점루프 오퍼레이터에서 case 3, case 4, case 5 등에서와 같은 몇가지 경우는 6-절점 루프 오퍼레이터로는 할 수

없는 것이며, 그 외에는 분할선과 6-절점 오퍼레이터를 사용하여서도 해결할 수 있다. 그러나 이러한 경우도 8-절점 루프 오퍼레이터를 사용함으로써 생성된 요소의 형태가 훨씬 좋아질 수 있으므로, 본 연구에서는 모든 경우를 포함하여 Fig. 7과 같은 8-절점루프 오퍼레이터를 일반화 하였다. 단, 8절점 루프가 오목루프인 경우에는 최적분할선과 6-절점 루프 오퍼레이터를 사용하여 해결하도록 하였다.

새로 형성되는 사각형요소의 수는 Fig. 6과 Fig. 7에서 보는 바와 같이 루프내에 새로 생성되는 절점의 수에 따라 결정된다. 즉, 루프내에 새로 생성되는 절점수를 n , 새로 생성되는 사각형요소의 수를 m 이라 하면 이들 사이에는 6-절점 루프일때 $m=n+2$, 8-절점 루프일 때 $m=n+3$ 의 관계가 성립한다.

2.5 레이어 오퍼레이터

레이어(layer)는 분할선을 이용하여 루프를 분할시켜가는 과정중에 생성되는 루프의 한 종류이다. 레이어는 루프 양끝단에 이웃한 내각이 90°에 가깝고 나머지 내각은 180°에 가깝게 구성되어 있는 루프의 형태이다. 레이어에서는 별도의 방법에 의하여 사각형요소들이 연속적으로 생성된다. Fig. 8은 레이어를 분할하여 사각형요소를 구성하는 방법을 보여주고 있다. 레이어를 구성하고 있는 루프의 절점간격과 내각을 계산한 다음 사각형요소가 될 경우에만 레이어에서 요소가 생성되도록 한정한다. Fig. 8과 같은 레이어에서는 절점 IJKM이 사각형요소로 구성된다.

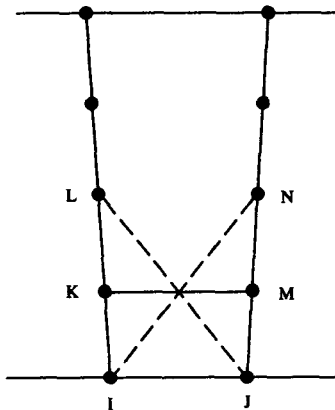
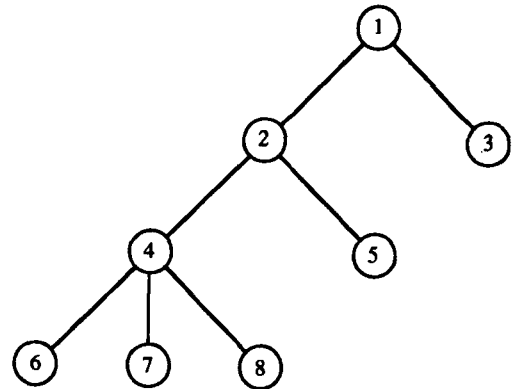


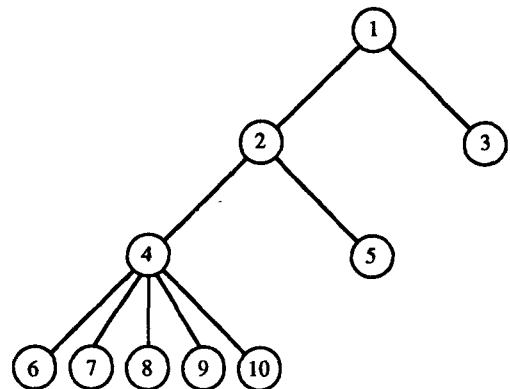
Fig. 8 Layer operator

2.6 루프트리 자료구조

분할선, 6-절점/8-절점 루프 오퍼레이터 혹은 레이어 오퍼레이터를 사용하여 연속루프를 계속적으로 부루프들로 분할 할때 현재 작업중인 부루프의 위치 인식과 영역분할 과정의 일관성있는 흐름을 위하여 본 연구에서는 루프트리(loop-tree)를 사용하였다. Fig. 9는 간단한 루프트리의 예를 나타낸다. 이는 분할선을 이용한 영역분할 과정을 보여주는 것으로서 최초의 루프 1은 첫번째 분할선에 의하여 루프 2와 루프 3으로 분할된다. 루프 3이 4-절점루프(사각형요소)이면 더 이상 분할되지 않고 루프2가 10-절점 이상이면 다시 루프4와 루프5로 계속 분할된다. 루프5가 4-절점 루프이고 루프4가 6-절점 루프이면 Fig. 9(a)와 같이 분할되고, 8-절점 루프이면 Fig. 9(b)와 같이 분할된다. 일반적으로 6-절점/8-절점 루프의 경우에 요소가 2~7



(a) 6-node loop



(b) 8-node loop

Fig. 9 Loop-tree examples of a 6-node loop and an 8-node loop

개로 한번에 분할되므로 이에 해당하는 루프트리도 2~7개씩 동시에 생성된다.

2.7 다듬질

위와 같이 얻은 요소망은 다듬질(smoothing)기법을 사용하여 개선할 수 있다. 본 연구에서는 일반적으로 가장 많이 사용되는 Laplacian smoothing 기법⁽¹¹⁾을 사용하였으며, 이는 경계선 내부에 생성된 절점의 위치를 현재 위치와 주위에 연결된 절점들의 평균위치와의 평균값으로 재조정하는 것이다.

2.8 밴드폭 최소화

요소망생성기(mesh generator)등을 사용하여 유한요소망을 자동적으로 구성하는 경우 요소와 절점의 번호가 불규칙하게 배열되므로 이로부터 얻어지는 강성행렬(stiffness matrix)은 밴드폭(bandwidth)이 매우 큰 희소(sparse)행렬이 되므로, 이를 실제 해석에 직접 사용하는 것은 매우 비효율적이다. 따라서 이러한 요소망은 밴드폭 최소화기법을 적용하여 밴드폭을 줄여야 한다. 이를 위하여 본 연구에서는 현재 널리 사용되고 있는 Reverse-Cuthill McKee(RCM)의 방법^(12,13)을 사용하였다. 이 방법에서 사용자가 시작절점(starting node)을 지정하는 경우에는 구조물의 가장자리나 모서리에 있는 절점을 지정하여야 하며, 시작절점을 지정하지 않는 경우에는 프로그램이 가상의 가장자리 절점을 찾아서 수행하게 된다. 이때 시작절점의 선정은 Gibbs-Poole-Stockmeyer⁽¹⁴⁾가 제안한 방법을 토대로 하였다. 밴드폭을 최적화시켜 얻은 결과에는, 기존의 절점번호는 변경시키지 않고 각 절점의 자유도에 부여되는 식의 번호만을 내부적으로 바꾸는 경우와 기존의 절점번호 자체를 바꾸는 두가지 경우가 있으며, 본 연구에서는 두가지 모두 선택적으로 사용할 수 있게 하였다.

3. 적용 사례

본 연구에서 개발된 사각형 유한요소망의 자동생성기법을 여러가지 문제들에 적용시켜 본 결과는 다음과 같다. Fig. 10은 원형단면에 네 개의 구멍이 있는 형상에 대해 유한요소망을 구성하고 다듬질을 행한 결과를 보여준다. 먼저 본래의 해석영역을 하나의 루프로 구성하기 위하여 사용자가 입력한 네 개의 절취선을 사용하였다. Fig. 10(a)는 요

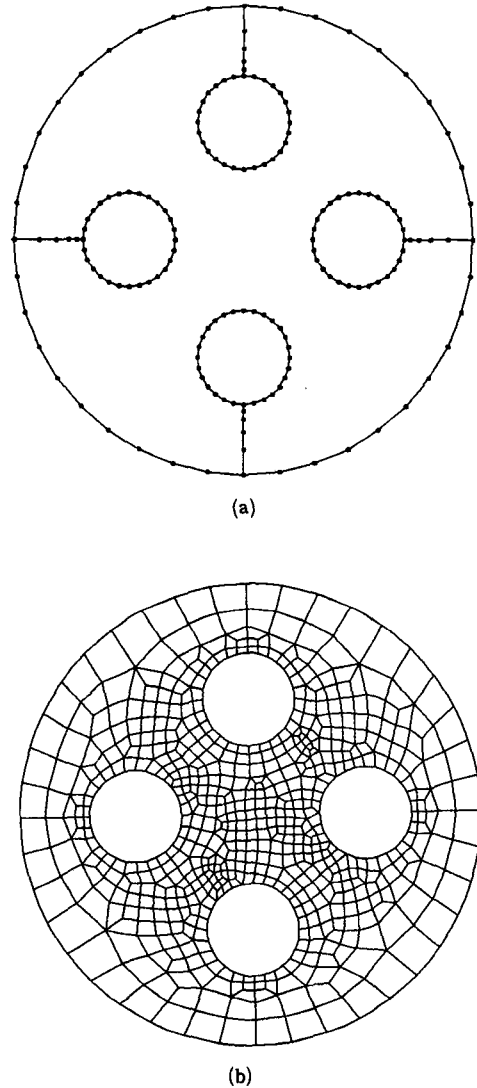


Fig. 10 (a) Key nodes distribution for a circle with four holes
(b) Constructed mesh with 608 elements

소망 구성을 위한 주요 절점들이 배치된 모습을 보여주며, 이와 같이 얻은 요소망은 Fig. 10(b)에 나타나 있다. Fig. 10에서 얻은 요소망은 네 개의 구멍 주위에서의 요소크기에 영향을 받아 해석영역의 중심부에서 작은 요소들이 생성되었다. 이 때 해석영역의 중심부에서 요소의 크기를 임의로 지정하고자 하는 경우에는 Fig. 11(a)에서 보는 바와 같이 중심부를 지나는 절취선을 이용하여 해석영역을 여러개의 loop로 나눔으로써 가능하며, 그 결과는

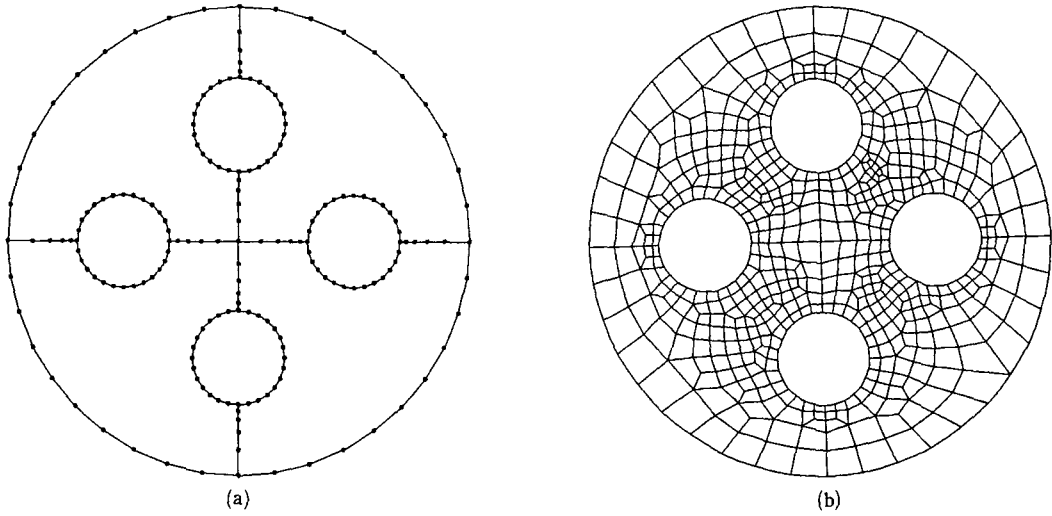


Fig. 11 (a) Key nodes distribution for four subloops
(b) Constructed mesh with 551 elements

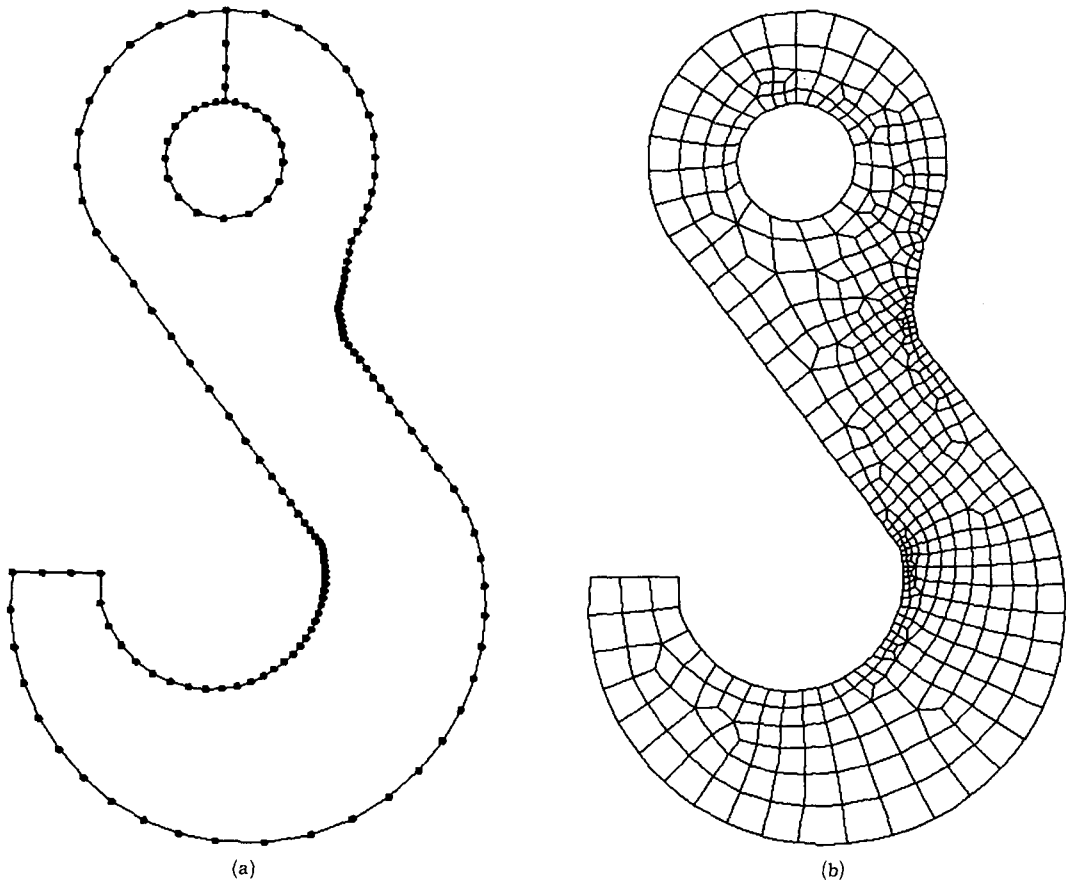


Fig. 12 (a) Key nodes distribution for a crane hook
(b) Constructed mesh for a crane hook with 471 elements

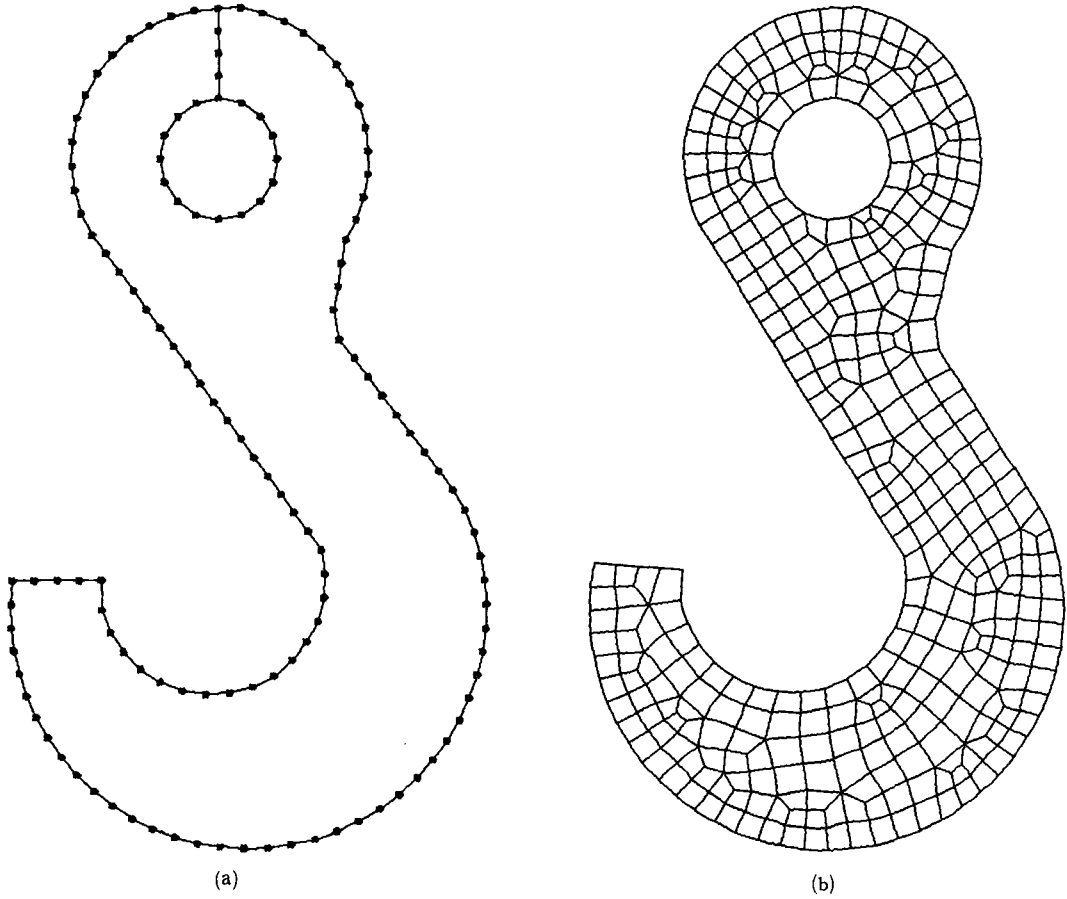


Fig. 13 (a) Uniform key nodes distribution for a crane hook
(b) Constructed mesh for a crane hook with 377 elements

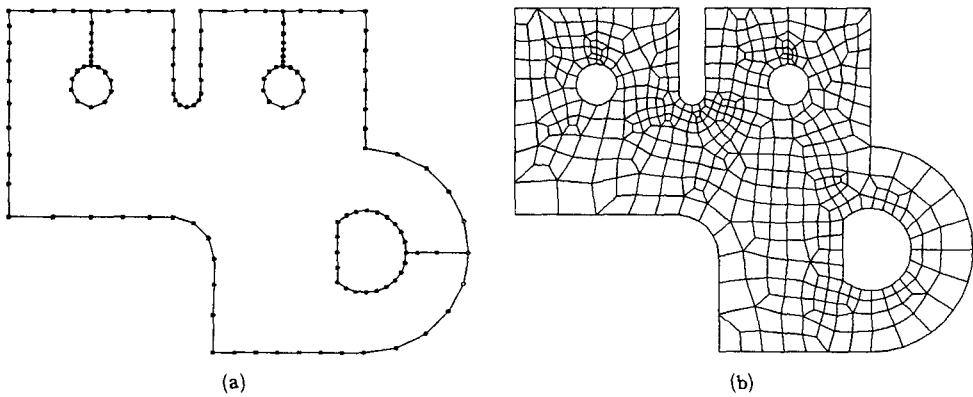


Fig. 14 (a) Key nodes distribution for a machine part geometry
(b) Constructed mesh for a machine part geometry with 460 elements

Fig. 11(b)에 나타나 있다. Fig. 12은 직선과 원으로 구성된 크레인후크(crane hook)의 형상에 대해 요소망을 구성한 예를 보여주며, 응력집중을 고려하여 요소의 크기가 부위에 따라 다르게 생성되도록 구성한 것이다. 또한 본 연구에서 개발된 프로그램은 사용자의 편의를 위하여 해석영역의 각 부위마다 요소의 크기를 지정하는 대신에 전체영역에 걸쳐 일정한 요소의 크기를 지정할 수도 있게 되어 있으며, 이와 같이 하여 얻은 균일한 요소망은 Fig. 13에 나타나 있다. Fig. 14는 기계부품에 대하여 요소망을 구성한 것으로 해석영역의 경계가 매우 복잡하여 요소망 구성이 어려운 경우이나, Fig. 14(a)에서와 같이 하나의 루프만으로 해석영역을 구성하여도 Fig. 14(b)와 같이 좋은 요소망을 얻었다. Fig. 15는 구멍이 있는 평판이 인장력을 받고 있는 경우이며, 이 때 응력집중을 고려하여 요소의 크기를 다르게 하여 얻은 결과를 보여준다. Fig. 16은 타이어 팽창해석에 사용되는 타이어의 단면을 나타낸다. 이때 타이어의 단면은 3차 스플라인(cubic spline)과 직선으로 구성되어 있으며, 일

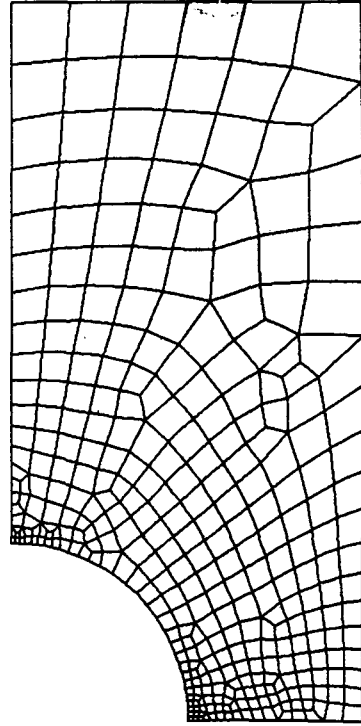


Fig. 15 Constructed mesh with 329 elements for a plate with a hole

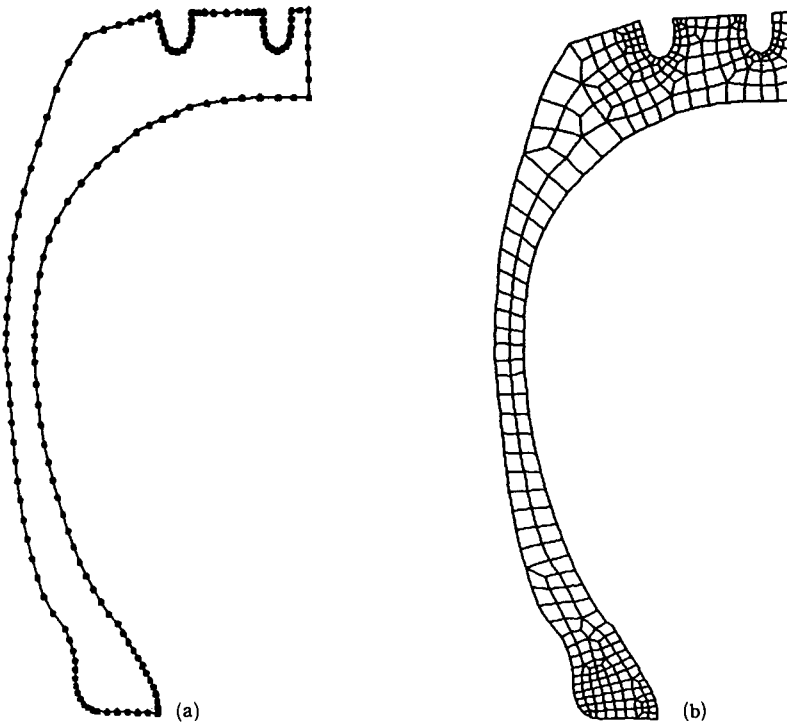


Fig. 16 (a) Key nodes distribution for a tire section
 (b) Constructed mesh with 281 elements for a tire inflation analysis

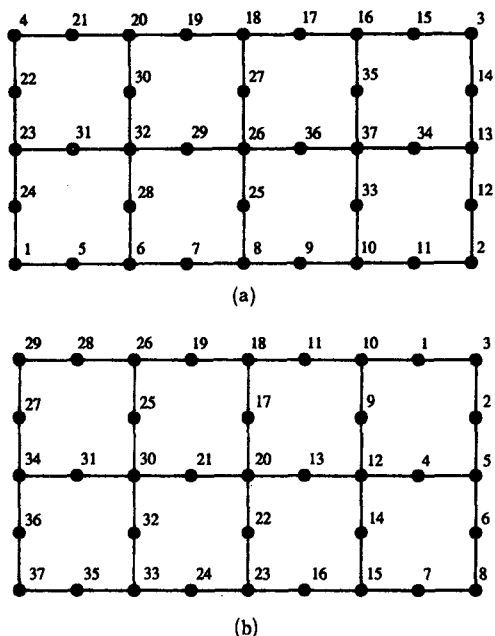


Fig. 17 (a) Before bandwidth minimization(maximum bandwidth : 72, profile : 2239)
 (b) After bandwidth minimization(maximum bandwidth : 28, profile : 1047)

력된 주요절점의 위치와 얻어진 요소망은 Fig. 16에 나타나 있다. Fig. 17은 사각형의 해석영역에 대하여 얻은 요소망에 밴드폭 최소화기법을 적용한 예를 보여준다. Fig. 17(a)는 밴드폭 최소화기법을 실행하기 전의 모습으로 절점번호가 불규칙하게 분산되어 있는 것을 알 수 있으며, 이 때 최대 밴드폭은 72, 윤곽(profile)은 2239가 되었다. Fig. 17(b)는 밴드폭을 최소화한 후의 모습으로 절점의 번호가 오른쪽에서 왼쪽으로 비교적 규칙적으로 재배치되어 있는 것을 알 수 있으며, 그 결과 최대 밴드폭이 28, 윤곽이 1047로 상당히 많이 감소하였다. 이론적으로는 위와 같은 요소망에서 최대 밴드폭을 22까지 줄일 수도 있으며 다른 최적화기법을 적용하면 현재 보다 더 줄일 수도 있겠으나, RCM 방법은 위와 같이 단순한 형상보다는 복잡한 형상의 경우에 더욱 효율적이므로 이 정도의 결과로도 만족할만 하다고 할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서 개발한 사각형 유한요소망 자동생성

기법은 분할선, 6-절점/8절점 오퍼레이터 및 레이어 오퍼레이터를 이용하여 해석영역을 사각형 유한요소망으로 분할하는 것으로 루프트리기법을 사용하여 연속적인 분할을 가능하게 하였다. 요소망 밀도가 크게 변하는 영역과 영역경계에서 요소의 저그러짐을 방지하기 위하여 기존의 6-절점 루프 오퍼레이터 외에 새로 8-절점 루프 오퍼레이터를 도입하고 이를 일반화하였다. 또한 최적분할선을 결정하는 데 있어서 분할면적 매개변수를 추가함으로써 보다 좋은 결과를 얻을 수 있게 하였다. 이렇게 얻어진 유한요소망을 Laplacian smoothing으로 개선하면 만족할 만한 사각형 유한요소망을 얻게 되며, 여기서 다시 밴드폭 최소화기법을 적용함으로써 강성행렬의 밴드폭을 실제 사용 가능하도록 줄였다. 또한 해석영역에서 사용자가 해석경계와 그 경계선의 요소크기 변화율만을 입력함으로써 생성된 내부 요소망 밀도를 변화시킬수 있게 하였다. 즉 사용자가 최소한의 입력자료만을 입력하고 원하는 임의의 형상에서 요소망 밀도를 고려한 최종 요소망을 쉽게 구할 수 있게 된다.

후 기

본 연구의 일부는 1991년도 한국과학재단의 목적 기초연구 지원사업에 의해 수행된 것으로, 이에 관계자 제위께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Thacker, W. C., 1980, "A Brief Review of Techniques for Generating Irregular Computational Grids," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 15, pp. 1335-1341.
- (2) Chae, S. W. and Bathe, K. ., 1989, "On Automatic Mesh Construction and Mesh Refinement in Finite Element Analysis," *J. Computer & Structure*, Vol. 32, No. 3/4, pp. 911~936.
- (3) Sadek, E. A., 1980, "A Scheme for the Automatic Generation of Triangular Finite Elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, pp 1813~1822.
- (4) Jain, A., 1988, "Generation FE Meshes on Geometry from a Solid Modeller," *Finite Element News* (10), pp 13~18.

- (5) Lo, S. H., 1985, "A New Method Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 21, pp. 1403~1426.
- (6) Yerry, M. A. and Shephard, M. S., 1983, "A Modified Quadtree Approach to Finite Element Mesh Generation," *IEEE Comput. Graph. & Appl.*, pp. 39~46.
- (7) Schoofs, A. J. G., L. H. Th. M. van Beukering and Sluiter, M.L.C., 1979, "A General Purpose Two-Dimensional Mesh Generator," *Adv. in Eng. Soft.*, Vol. 1, No. 3.
- (8) Sluiter, M. L. C. and Hansen, D.C., 1982, "A General Purpose Two-Dimensional Mesh Generator for Shell and Solid Finite Elements," L. E. Hulbert(ed), *Computer in Eng.*, Vol. 3, ASME, pp. 29~34.
- (9) Talbert, J. A., and Parkinson, A. R., 1990, "Development of an Automatic, Two Dimensional Finite Element Mesh Generator using quarilateral Elements and Bezier Curve Boundary Definition," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 29, pp. 1551~1567.
- (10) Wu, W. T., 1990, Ph. Doc. Thesis, The Ohio State University.
- (11) Hermann, L. R., 1976, "Laplacian-Isoparametric Grid Generation Scheme," *J. of Eng. Mech., Division, ASME*, Vol. 102, pp. 749~756.
- (12) Cuthill, E. and J. McKee, "Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices," *Proc., ACM Nat. Conf. New York*, 1969.
- (13) George, A., "Computer Implementation of the Finite Element Method," *Tech. Rep. STAN-CS-71-208*, Computer Science Dept., Stanford Univ., 1971.
- (14) Gibbs, N., Poole, W. and Stockmeyer, P., "An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparse Matrix," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 13, No. 2, April 1976.