

(論 文)

6절점 2차원 Isoparametric요소의 가우스적분점 수정에 관하여

-선형, 비선형의 정적 및 동적 굽힘해석-

김정운* · 정래훈** · 권영두***

(1993년 4월 10일 접수)

On the Modification of Gauss Integral Point of 6 Node Two Dimensional Isoparametric Element

-Linear and Nonlinear Static and Dynamic Bending Analyses-

Jeong-Oun Kim, Rae-Hoon Jung and Young-Doo Kwon

Key Words : Large Displacement Static and Dynamic Problem(대변위 정적 및 동적문제), Relative Stiffness Stiffening Phenomena(상대적 강성과잉현상), Modified Gauss Integral Point(수정 가우스적분점), Newton-Raphson Iteration Method(뉴턴-랩슨 반복법), Direct Integration Method(직접적분법)

Abstract

For the same configuration, the stiffness of 6-node two dimensional isoparametric element is stiffer than that of 8-node two dimensional isoparametric element. This phenomenon may be called 'Relative Stiffness Stiffening Phenomenon.' In this paper, the relative stiffness stiffening phenomenon was studied, and could be corrected by modifying the position of Gauss integral points used in the numerical integration of the stiffness matrix. For the same deformation (bending) energy of 6-node and 8-node two dimensional isoparametric elements, Gauss integral points of 6-node element have to move closer, in comparison with those of 8-node element, in the case of numerical integration along the thickness direction.

기 호 설 명

- [K_L] : 선형 강성행렬
- [K_{NL}] : 비선형 강성행렬
- [M] : 질량행렬
- { F } : 등가 절점력벡터
- { P } : 외력벡터
- { U } : 계의 변위벡터
- { \dot{U} } : 계의 가속도벡터

- R : 외부 가상일
- C_{ijrs} : 재료 특성텐서
- ϵ_{ij} : Green-Lagrange 변형률텐서
- S_{ij} : 제2 Piola-Kirchhoff 응력텐서

1. 서 론

구조해석용 유한요소로는 보요소, 플레이트요소, 플레이트/셸요소 등이 있고, 2차원 요소, 3차원 요소 등도 구조해석용으로 사용이 가능하다. 그러나

*정회원, 국방과학연구소

**정회원, 기아정기(주)

***정회원, 경북대학교 기계공학과

2차원 요소, 3차원 요소는 각각 보요소, 플레이트/셀요소에 비해 자유도수가 많은 단점이 있어 구조용으로 널리 사용이 되지 않으나, 몇개의 절점을 없앤 상태(degenerated condition)로 사용이 되고 있다.^(1~3) 이렇게 자유도수를 줄인 2차원, 3차원 요소도 완전히 자유도수를 줄인(fully degenerated) 요소인 구조용요소(보, 플레이트/셀요소)보다는 아직도 자유도수가 많은 상태이다.

따라서 많은 구조용요소가 제안^(4,5)이 되었으며, 이 때 발생할 수 있는 강성과잉현상이나 부적합성을 해결하기 위해 많은 수정방법이 제안되었다.^(6,7) 이러한 구조용요소는 선형문제에는 물론 기하학적 비선형문제에도 적용이 가능하다. 기하학적인 비선형문제에서는 자유도에 비 벡터량이 포함되어 있기 때문에, 하나의 하중증분내에서 많은 단계로 세분하여 선형화를 한 다음 적분을 하여야 하는 까닭에, 효과적인 선형화를 위한 방안⁽⁸⁾들이 제시되고 있으나, 이는 구조용요소의 복잡한 수학적 형식과 함께 또 하나의 단점으로 취급될 수 밖에 없다.

본 연구에서는 우선 2차원적인 문제에 국한하여 보요소를 대체할 수 있는 2차원 요소를 논의하고자 한다. 이 때의 2차원 요소는 8절점 요소중 두께방향으로 중간에 있는 두 절점을 없앤 6절점 요소이다. 이 요소의 자유도 수는 3절점 보요소의 9자유도에 비해 12자유도로 약간 크나, 이는 수식의 단순성과 전 자유도의 벡터량인 점 등으로 상쇄될 수 있다고 생각된다. 다만 이 때의 문제점으로 8절점 요소에 버금가는 정확성(강성행렬의 평가 등에서)의 결여가 있다. 이를 해결하기 위하여 본 연구에서는 가우스적분점의 이동방법을 제시하며, 이 때의 이동량은 8절점 요소와 6절점 요소의 굽힘시 변형에너지를 같게 함으로서 유도될 수 있었다. 그리고 이 결과를 실증하기 위하여 단순지지보와 내다지보를 모델로 하여, 정적선형 및 비선형해석을 하여 8절점 모델과 수정된 6절점 모델의 결과를 비교하였으며, 또한 동적문제에서의 효과를 검증하기 위하여 선형 및 비선형문제에 대한 동적해석을 Newmark의 직접적분법(비선형문제의 경우는 Newton-Raphson 방법에 기초한)으로 수행하고 비교하였다.

2. 평형식 및 운동방정식

대변위 문제는 비선형적인 것으로 이를 해석하는

방법중 total-Lagrange방법과 updated-Lagrange방법이 많이 사용되고 있다.^(1~4) Total-Lagrange방법은 초기 상태를 기준으로, updated-Lagrange방법은 변형된 상태를 기준으로 해서 해석이 수행된다. 여기서는 total-Lagrange방법을 사용하여 증분형의 반복 평형식(incremental iterative equilibrium equation)과 반복운동방정식(incremental iterative equation of motion)을 구한다.

먼저 평형식을 구하기 위해 가상일의 원리를 적용하면 다음식이 얻어진다.

$$\int_{0_V} \delta S_U \delta \epsilon_U d^0 V = {}^t R \quad (1)$$

여기서,

δS_U = 초기 상태를 기준으로 한 시간 t 에서의 제2차 Piola-Kirchhoff 응력텐서

$\delta \epsilon_U$ = 초기 상태를 기준으로 한 시간 t 에서의 Green-Lagrange 변형률텐서

${}^t R$ = 외력에 의한 외부 가상일

2차원 문제에서의 Green-Lagrange 변형률 텐서 형상함수 h_k 를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_U &= \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + \delta u_{k,i} \delta u_{k,j}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \delta h_{k,j} {}^t U_i^k + \sum_{k=1}^N \delta h_{k,i} {}^t U_j^k \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \delta h_{k,i} {}^t U_i^k \sum_{k=1}^N \delta h_{k,j} {}^t U_j^k \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N \delta h_{k,i} {}^t U_j^k \sum_{k=1}^N \delta h_{k,i} {}^t U_j^k \right] \quad (2) \end{aligned}$$

여기서 $\delta h_{k,i} = \partial h_k / \partial^0 X_i$, ${}^t U_i^k$ = 시간 t 에서 k 번째 절점의 i 방향변위, N = 유한요소의 절점수를 의미한다.

식(2)를 행렬형태로 나타내면 식(3)과 같다.

$$\{\delta E\} = [\delta B_L] \{\delta U\}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{\delta E\} &= [\delta \epsilon_{11} \delta \epsilon_{22} \delta \epsilon_{12} \delta \epsilon_{33}]^T \\ \{\delta U\} &= [{}^t u_1^1 \quad {}^t u_2^1 \quad {}^t u_1^2 \quad {}^t u_2^2 \quad \cdots \quad {}^t u_1^N \quad {}^t u_2^N]^T \\ \{\delta B_L\} &= [\delta B_{L0}] + [\delta B_{L2}] \quad (3) \end{aligned}$$

$$[\delta B_{L0}] = \begin{bmatrix} \delta h_{1,1} & 0 & \delta h_{2,1} & 0 & \cdots & \delta h_{N,1} & 0 \\ 0 & \delta h_{1,2} & 0 & \delta h_{2,2} & \cdots & 0 & \delta h_{N,2} \\ \delta h_{1,2} & \delta h_{1,1} & \delta h_{2,2} & \delta h_{2,1} & \cdots & \delta h_{N,2} & \delta h_{N,1} \end{bmatrix}$$

$$[\delta B_{L2}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_{11} \delta h_{1,1} & P_{21} \delta h_{1,1} \\ P_{12} \delta h_{1,2} & P_{22} \delta h_{1,2} \\ (P_{11} \delta h_{1,2} + P_{12} \delta h_{1,1}) & (P_{21} \delta h_{1,2} + P_{22} \delta h_{1,1}) \\ \dots\dots P_{21} \delta h_{N,1} \\ \dots\dots P_{22} \delta h_{N,2} \\ \dots\dots (P_{21} \delta h_{N,2} + P_{22} \delta h_{N,1}) \end{bmatrix}$$

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^N h_{k,j} \delta u_k^i \quad (4)$$

변위구배와 절점변위와의 관계는 식 (5)와 같이 표시된다.

$$\{\delta u_{k,i}\} = [\delta u_{1,1} \delta u_{1,2} \delta u_{2,1} \delta u_{2,2} \delta u_{3,3}]^T = [\delta B_{NL}] \{\delta U\} \quad (5)$$

여기서,

$$[\delta B_{NL}] = \begin{bmatrix} \delta h_{1,1} & 0 & \delta h_{2,1} & 0 & \dots & \delta h_{N,1} & 0 \\ \delta h_{1,2} & 0 & \delta h_{2,2} & 0 & \dots & \delta h_{N,2} & 0 \\ 0 & \delta h_{1,1} & 0 & \delta h_{2,1} & \dots & 0 & \delta h_{N,1} \\ 0 & \delta h_{1,2} & 0 & \delta h_{2,2} & \dots & 0 & \delta h_{N,2} \end{bmatrix}$$

$\{\delta S_{ij} \delta u_{k,i} \delta u_{k,j}\}$ 를 식 (5)을 이용하여 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\{\delta S_{ij} \delta u_{k,i} \delta u_{k,j}\} = \{\delta U\}^T [\delta B_{NL}]^T [\delta S] [\delta B_{NL}] \{\delta U\} \quad (6)$$

여기서 $[\delta S]$ 는 초기응력을 나타내는 2nd Piola-Kirchhoff 응력행렬로 다음과 같다.

$$[\delta S] = \begin{bmatrix} \delta S_{11} & \delta S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \delta S_{21} & \delta S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta S_{11} & \delta S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \delta S_{21} & \delta S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta S_{33} \end{bmatrix}$$

$\delta S_{ij} = \delta C_{ijrs} \delta \epsilon_{rs}$ 를 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\{\delta S\} = [D] [\delta B_{L0} + \delta B_{L2}] \{\delta U\} \quad (7)$$

여기서,

$$\{\delta S\} = [\delta S_{11} \delta S_{22} \delta S_{12} \delta S_{33}]^T$$

$$[D] = \text{구성물질의 특성행렬}$$

따라서 식 (1)은

$$\delta R = \int_{0V} \delta S_{ij} \delta (\delta \epsilon_{ij}) d^0 V$$

$$= \int_{0V} \delta C_{ijrs} (\delta \epsilon_{rs} + \delta \eta_{rs}) \delta (\delta \epsilon_{ij}) d^0 V$$

$$+ \int_{0V} \delta S_{ij} \delta (\delta \eta_{ij}) d^0 V \quad (8)$$

와 같이 표시되고 이를 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\delta \{\delta U\}^T \{\delta P\} = \int_{0V} \delta \{\delta U\}^T [\delta B_{L0}]^T [D] \cdot [\delta B_{L0} + \delta B_{L2}] \{\delta U\} d^0 V$$

$$+ \int_{0V} \delta \{\delta U\}^T [\delta B_{NL}]^T [\delta S] [\delta B_{NL}] \{\delta U\} d^0 V \quad (9)$$

상법칙 (quotient law)를 이용하면 식 (9)로부터 다음과 같은 평형식이 얻어진다.

$$\{\delta P\} = \{\delta F\} \quad (10)$$

여기서,

$\{\delta P\}$ = 의력벡터

$\{\delta F\}$ = 등가절점력 벡터

$$= \int_{0V} [\delta B_{L0}]^T [D] ([\delta B_{L0}] + [\delta B_{L2}]) \{\delta U\} d^0 V$$

$$+ \int_{0V} [\delta B_{NL}]^T [\delta S] [\delta B_{NL}] \{\delta U\} d^0 V$$

등가 절점력 $\{\delta F\}$ 는 다음의 여러 형태로 표시가 가능하며, 필요에 따라 적당한 표현식을 사용할 수가 있다. 즉

$$\{\delta F\} = \int_{0V} [\delta B_{L0}]^T [D] ([\delta B_{L0}] + [\delta B_{L2}]) \{\delta U\} d^0 V$$

$$+ \int_{0V} [\delta B_{NL}]^T [\delta S] [\delta B_{NL}] \{\delta U\} d^0 V$$

$$= \int_{0V} [\delta B_{L0}]^T [D] ([\delta B_{L0}] + [\delta B_{L2}]) \{\delta U\} d^0 V$$

$$+ \int_{0V} [\delta B_{L1}]^T [\delta S] d^0 V$$

$$= \int_{0V} ([\delta B_{L0}]^T [\delta B_{L2}])^T [D] ([\delta B_{L0}] + [\delta B_{L2}])$$

$$\{\delta U\} d^0 V + \frac{1}{2} \int_{0V} [\delta B_{L1}]^T [\delta S] d^0 V$$

$$= \int_{0V} ([\delta B_{L0}] + [\delta B_{L2}])^T [D] ([\delta B_{L0}] + [\delta B_{L2}])$$

$$\{\delta U\} d^0 V + \frac{1}{2} \int_{0V} [\delta B_{NL}]^T [\delta S] [\delta B_{NL}] \{\delta U\} d^0 V$$

$$= \int_{0V} ([\delta B_{L0}] + [\delta B_{L1}])^T [D]$$

$$([\delta B_{L0}] + [\delta B_{L2}]) \{\delta U\} d^0 V$$

$$= \int_{0V} ([\delta B_{L0}] + [\delta B_{L1}])^T [\delta S] \quad (11)$$

여기서, $[\delta B_{L1}] = 2[\delta B_{L2}]$

식 (10)으로부터 시간 $(t + \Delta t)$ 에서의 평형식을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[{}^{t+\Delta t}K]({}^{t-1}) \{\Delta U\}^{(i)} = \{\delta P\} - \{\delta F\}^{(i-1)} \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 d\{^{t+\Delta t}F\}^{(i-1)} &= [^{t+\Delta t}K]^{(i-1)} d\{U\} \\
 [^{t+\Delta t}K]^{(i-1)} &= [^{t+\Delta t}K_{LO}]^{(i-1)} + [^{t+\Delta t}K_{NL}]^{(i-1)} \\
 [^{t+\Delta t}K_{LO}]^{(i-1)} &= \int_0^V \{([^{t+\Delta t}B_{LO}] + [^{t+\Delta t}B_{L1}])^T [D] \\
 &\quad ([^{t+\Delta t}B_{LO}] + [^{t+\Delta t}B_{L1}])\}^{(i-1)} d^0 V \\
 [^{t+\Delta t}K_{NL}]^{(i-1)} &= \int_0^V \{([^{t+\Delta t}B_{NL}]^T [^{t+\Delta t}S] \\
 &\quad [^{t+\Delta t}B_{NL}])\}^{(i-1)} d^0 V \\
 \{^{t+\Delta t}F\}^{(i-1)} &= \int_0^V \{([^{t+\Delta t}B_{LO}] + [^{t+\Delta t}B_{L1}])^T [D] \\
 &\quad [^{t+\Delta t}S]\}^{(i-1)} d^0 V
 \end{aligned}$$

식(12)는 정적 비선형 평형방정식을 나타내며, 동적인 문제에 있어서는 관성력이 부가되므로 운동방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 [^{t+\Delta t}K]^{(i-1)} \{\Delta U\}^{(i)} \\
 = \{^{t+\Delta t}P\} - \{^{t+\Delta t}F\}^{(i-1)} - [M] \{^{t+\Delta t}\dot{U}\}^{(i)} \quad (13)
 \end{aligned}$$

단, $[M] = \int_0^V \rho [N]^T [N] d^0 V$

여기서 식(11)의 여러가지로 표시된 등가 절점력 중

$$\begin{aligned}
 \{^{t+\Delta t}F\}^{(i-1)} &= \int_0^V \{([^{t+\Delta t}B_{LO}]^T [d] ([^{t+\Delta t}B_{LO}] + [^{t+\Delta t}B_{L2}]) \\
 &\quad \{^{t+\Delta t}U\})\}^{(i-1)} d^0 V \\
 &+ \int_0^V \{([^{t+\Delta t}B_{NL}]^T [^{t+\Delta t}S] \\
 &\quad [^{t+\Delta t}B_{NL}] \{^{t+\Delta t}U\})\}^{(i-1)} d^0 V \quad (14)
 \end{aligned}$$

을 선택하여 초기응력이 있는 소변위문제에 적용을 하면 운동방정식이 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 ([^{t+\Delta t}K_{LO}] + [^{t+\Delta t}K_{NL}])^{(i-1)} \{^{t+\Delta t}U\}^{(i)} \\
 = \{^{t+\Delta t}P\} - [M] \{^{t+\Delta t}\dot{U}\}^{(i)} \quad (15)
 \end{aligned}$$

단,

$$\begin{aligned}
 [^{t+\Delta t}K_{LO}]^{(i-1)} &= \int_0^V [^{t+\Delta t}B_{LO}]^T \\
 &= [^{t+\Delta t}S] [^{t+\Delta t}B_{LO}]^{(i-1)} d^0 V
 \end{aligned}$$

따라서 식(14)의 등가 절점력 식을 선택함으로써 초기응력이 있는 동적 소변위문제에서 등가 절점력을 구할 필요가 없게 되며, 문헌(9)의 운동방정식과 동일한 것을 알 수 있다.

초기응력이 있는 정적 소변위문제에서도 마찬가지로 등가 절점력을 계산할 필요가 없으며, 식(16)과 같은 평형식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 ([^{t+\Delta t}K_{LO}] + [^{t+\Delta t}K_{NL}])^{(i-1)} \{^{t+\Delta t}U\}^{(i)} = \{^{t+\Delta t}P\} \\
 (16)
 \end{aligned}$$

끝으로 운동방정식 (13)을 Newmark의 직접적 분법으로 나타내면 다음식(17)과 같다.(10)

$$\begin{aligned}
 (\frac{4}{\Delta t})^2 [M] + [^{t+\Delta t}K_L + ^{t+\Delta t}K_{NL}]^{(i-1)} \{^{t+\Delta t}\Delta U\}^{(i)} \\
 = \{^{t+\Delta t}P\} - \{^{t+\Delta t}F\}^{(i-1)} - [M] (\frac{4}{\Delta t})^2 \{^{t+\Delta t}U\}^{(i-1)} \\
 - \{^tU\} - \frac{4}{\Delta t} \{^tU\} - \{^t\dot{U}\}) \quad (17)
 \end{aligned}$$

3. 보의 굽힘현상

3.1 8절점 요소의 굽힘

Fig. 1에 평면응력상태의 8절점 2차원 평면요소의 굽힘상태를 나타내었다. 여기서 ρ 는 중립면의 곡률반경을 나타낸다.

X, Y좌표계에서 절점 i의 X, Y방향의 변위를 U_i, V_i 라 하면 각 절점의 변위는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 \rho\theta &= 1 \\
 U_1 &= \sin\theta \approx \theta, & V_1 &= \cos\theta - 1 \approx -\theta^2/2 \\
 U_2 &= -\sin\theta \approx -\theta, & V_2 &= \cos\theta - 1 \approx -\theta^2/2 \\
 U_3 &= \sin\theta \approx \theta, & V_3 &= 1 - \cos\theta \approx \theta^2/2 \\
 U_4 &= -\sin\theta \approx -\theta, & V_4 &= 1 - \cos\theta \approx \theta^2/2 \\
 U_5 &= 0, & V_5 &= \rho(1 - \cos\theta) \approx \theta/2 \\
 U_6 &= 0, & V_6 &= \rho(1 - \cos\theta) \approx \theta/2 \\
 U_7 &= 0, & V_7 &= 0 \\
 U_8 &= 0, & V_8 &= 0 \quad (18)
 \end{aligned}$$

위의 관계를 벡터형으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

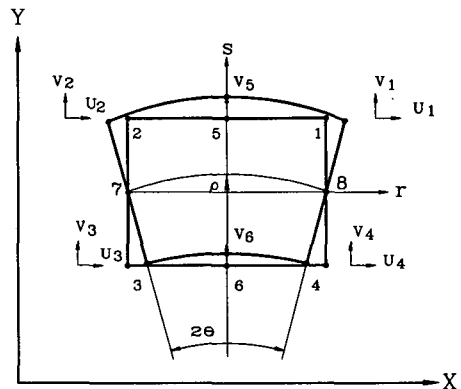


Fig. 1 Deformed configuration of 8-node element in pure bending(r, s: natural coordinate system; -1~+1)

$$\{U\}_8 = [\theta, -\theta^2/2, -\theta, -\theta^2/2, \theta, \theta^2/2, -\theta, \theta^2/2, 0, \theta/2, 0, \theta/2, 0, 0, 0, 0]^T \quad (19)$$

한편 8절점 요소의 선형변위-변형률행렬을 $[B_{L0}]_8$ 이라고 하면, 8절점 요소의 변형률 $\{\epsilon\}_8$ 은 식(18)의 변위에 의해 다음과 같이 표시된다.

$$\{\epsilon\}_8 = [B_{L0}]_8 \{U\}_8 = \begin{bmatrix} s & \theta \\ 0 & \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -2r^2 \\ -4rs \end{bmatrix} \theta^2 \approx \begin{bmatrix} s & \theta \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} \quad (20)$$

여기서 r, s 는 무차원 국소좌표계를 나타내며, θ^2 항은 무시한다. 그리고 재료의 구성행렬 $[D]$ 는 평면응력의 경우에 다음과 같다.

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

여기서 E 는 종탄성계수, ν 는 푸아송비를 나타낸다. ⁽¹¹⁾

8절점 요소의 평면응력은 $\{\sigma\}_8 = [D] \{\epsilon\}_8$ 이며, 8절점 보요소소의 등가 절점력 $\{F\}_8$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \{F\}_8 &= \int_{\Omega} [B_{L0}]_8^T [D] [B_{L0}]_8 \{U\}_8 d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [B_{L0}]_8^T [D] [B_{L0}]_8 \{U\}_8 [J] W_i W_j h \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{[J] W_j h \theta E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} s_j^2 & 2\nu s_j^2 & -s_j^2 & 2\nu s_j^2 \\ s_j^2 & 2\nu s_j^2 & -s_j^2 & 2\nu s_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\nu s_j^2 & 0 & -4\nu s_j^2 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 N 은 가우스적분점 수, W_i 와 W_j 는 가우스 수치적분의 weight factor, s_j 는 sampling point, $[J]$ 은 Jacobian 행렬 그리고 h 는 폭을 나타낸다.

식(21)에 나타난 힘의 각 성분을 보면, 변위를 구속한 절점 7과 절점 8에 Y방향의 하중이 존재하며, 이 하중에 의하여 각 모서리에 부적합한 Y방향의 하중들이 나타남을 알 수 있다. 이러한 관계를 그림으로 나타내면 Fig. 2와 같다. Fig. 2(a)는 각 절점에서의 등가 절점력을, Fig. 2(b)는 변위를 나타낸다. 따라서 적합한 등가 절점력을 가지기 위해서 절점 7과 절점 8은 구속되지 않아야 한다고 할 수가 있다.

부적합한 Y방향의 하중 $F_2, F_4, F_6, F_8, F_{14}, F_{16}$

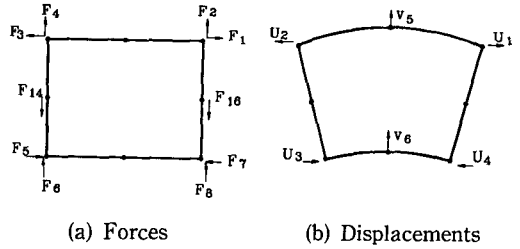


Fig. 2 Forces and displacements of the nodes

을 제거하기 위하여 변위 구속조건을 해지한 절점 7과 절점 8의 변위를 U_7, U_8, V_7, V_8 이라 하고, 이때의 변위벡터를 $\{U\}_8$, 변형률을 $\{\epsilon\}_8$ 이라 하면,

$$\{U\}_8 = [\theta, -\frac{\theta^2}{2}, -\theta, -\frac{\theta^2}{2}, \theta, \frac{\theta^2}{2}, -\theta, \frac{\theta^2}{2}, 0, \frac{\theta}{2}, 0, \frac{\theta}{2}, U_7, V_7, U_8, V_8]^T \quad (22)$$

$$\{\epsilon\}_8 = [B_{L0}]_8 \{U\}_8 = \begin{bmatrix} s & \theta \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s(V_7 + V_8) \\ s(U_7 + U_8) \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서 $U = U_7 = U_8, V = V_7 = V_8$ 로 두고 U 를 무시하면 다음과 같이 된다.

$$\{\epsilon\}_8 = \begin{bmatrix} s & \theta \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2sV \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

U 를 무시하고, 구속조건이 풀린 변위에 의한 8절점 요소의 등가 절점력을 $\{F\}_8$ 라 하면,

$$\{F\}_8 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [B_{L0}]_8^T [D] [B_{L0}]_8 \{U\}_8 [J] W_i W_j h = \sum_{j=1}^N \frac{[J] W_j h E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} s_j^2(\theta - 2\nu V) \\ 2s_j^2(\nu\theta - 2V) \\ -s_j^2(\theta - 2\nu V) \\ 2s_j^2(\nu\theta - 2V) \\ s_j^2(\theta - 2\nu V) \\ 2s_j^2(\nu\theta - 2V) \\ -s_j^2(\theta - 2\nu V) \\ 2s_j^2(\nu\theta - 2V) \\ 0 \\ 2s_j(\nu\theta - 2V) \\ 0 \\ -4s_j^2(\nu\theta - 2V) \\ 0 \\ -2s_j(\nu\theta - 2V) \\ 0 \\ -4s_j^2(\nu\theta - 2V) \end{bmatrix} \quad (25)$$

식(25)에서 보면 부적합한 Y방향의 절점력을 제거하기 위해서 필요한 절점 7과 절점 8의 변위 V로 인하여 각 절점에서의 Y방향의 힘은 각각 $(\nu\theta - 2V)$ 의 곱으로 나타남을 알 수있다. 따라서 Y방향의 등가 절점력이 0이 되기 위해서는 $(\nu\theta - 2V) = 0$ 이 만족되어야 한다.

$V = \nu\theta - 2V = 0$ 의 조건으로부터 $V = \nu\theta/2$ 가 되며, 이 때의 V를 식(25)에 다시 대입하면, 순수 굽힘시의 변위에 의해 대응되는 등가 절점력 $\{F\}_8$ 는 다음 식(26)과 같이 된다.

$$\{F\}_8 = \sum_{j=1}^N \frac{[{}^0J] W_j h \theta E}{2(1-\nu^2)} [s_j^2(1-\nu^2), 0, -s_j^2(1-\nu^2), 0, s_j^2(1-\nu^2), 0, -s_j^2(1-\nu^2), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (21)$$

식(26)과 같은 변위상태에 있어서의 변형에너지를 E_8 라 하면 다음 식(27)과 같이 표시될 수 있다.

$$E_8 = \frac{1}{2} \{U\}_8^T [K]_8 \{U\}_8 = \frac{1}{2} \{U\}_8^T \{F\}_8 \quad (27)$$

3.2 6절점 요소의 굽힘

Fig. 3에 평면응력상태의 6절점 2차원 평면요소의 굽힘상태를 나타내었다. 여기서는 중립면의 곡률반경을 나타낸다.

Fig. 3에서 X, Y좌표계에서 절점 i의 X, Y방향의 변위를 U_i, V_i 라 하면 각 절점의 변위는 다음과 같다.

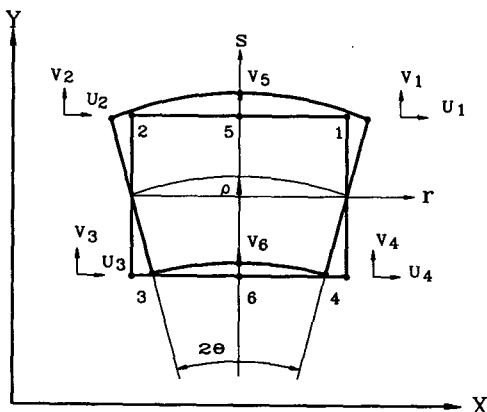


Fig. 3 Deformed configuration of 6-node element in pure bending(r, s : natural coordinate system; $-1 \sim +1$)

$$\rho\theta = 1$$

$$U_1 = \sin\theta \approx \theta, \quad V_1 = \cos\theta - 1 \approx -\theta^2/2$$

$$U_2 = -\sin\theta \approx -\theta, \quad V_2 = \cos\theta - 1 \approx -\theta^2/2$$

$$U_3 = \sin\theta \approx \theta, \quad V_3 = 1 - \cos\theta \approx \theta^2/2$$

$$U_4 = -\sin\theta \approx -\theta, \quad V_4 = 1 - \cos\theta \approx \theta^2/2$$

$$U_5 = 0, \quad V_5 = \rho(1 - \cos\theta) \approx \theta/2$$

$$U_6 = 0, \quad V_6 = \rho(1 - \cos\theta) \approx \theta/2 \quad (28)$$

위의 관계를 벡터형으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\{U\}_6 = [\theta, -\theta^2/2, -\theta, -\theta^2/2, \theta, \theta^2/2, -\theta, \theta^2/2, 0, \theta/2, 0, \theta/2]^T \quad (29)$$

한편 6절점 요소의 변위-변형률행렬을 $[B]_{L0}_6$ 라고 하면, 6절점 요소의 변형률 $\{\epsilon\}_6$ 는 다음과 같이 된다.

$$\{\epsilon\}_6 = [B]_{L0}_6 \{U\}_6 = \begin{bmatrix} s & \theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -2r^2 \\ -4rs \end{bmatrix} \theta^2 \approx \begin{bmatrix} s & \theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

여기서 r, s 는 무차원 국소좌표계를 나타내며, θ^2 항은 무시한다.

6절점 요소의 평면응력은 $\{\sigma\}_6 = [D] \{\epsilon\}_6$ 이며, 6절점 요소의 등가 절점력 $\{F\}_6$ 는 다음 식(31)과 같다.

$$\begin{aligned} \{F\}_6 &= \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] \{U\}_6 d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [B]^T [D] [B] \{U\}_6 [{}^0J] W_i W_j h \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{[{}^0J] W_j h \theta E}{2(1-\nu^2)} [s_j^2, 0, -s_j^2, 0, s_j^2, 0, -s_j^2, 0, 0, 0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (31)$$

그리고 $\{F\}_6$ 에 의한 6절점 요소의 변형에너지를 E_6 라 하면 다음과 같다.

$$E_6 = \frac{1}{2} \{U\}_6^T [K]_6 \{U\}_6 = \frac{1}{2} \{U\}_6^T \{F\}_6 \quad (32)$$

3.3 6절점 요소와 8절점 요소의 굽힘변형에너지

식(27)의 8절점 요소의 굽힘변형에너지와 식(32)의 6절점 요소의 굽힘변형에너지가 같아야 함으로 다음의 식이 만족되어야 한다.

$$\{F\}_8 = \{F\}_6 \quad (33)$$

단, $\{F\}_6$ 는 $\{F\}_8$ 의 차원으로 확장된 $\{F\}_6$

식(33)을 만족하기 위하여 두께방향으로의 가우스적분점의 위치를 6절점 요소에서는 S_{6j} , 8절점 요소에는 S_{8j} 이라고 하면,

$$S_{6j} = S_{8j}(1 - \nu^2)^{1/2} \quad (34)$$

가 되어야 함을 알 수 있다. 따라서 6절점 요소를 사용하면서 s방향의 가우스적분점 위치를 식(34)와 같이 수정해 주면 8절점 요소와 같은 굽힘변형에너지를 갖게 된다고 할 수 있다.

4. 유한요소해석 및 고찰

이 장에서는 6절점 요소에 대해 식(34)와 같이 제시한 가우스적분점 수정의 실효성을 확인하기 위하여 굽힘상태에 있는 몇가지 예, 즉 순수굽힘보, 단순지지보 및 내다지보 등에 대하여 정적 및 동적 선형해석과 비선형해석을 하였다. 이러한 예의 보들의 재료상수⁽¹²⁾는 동일하며, 보의 상태는 평면응력상태이며, 요소의 강성행렬 적분에는 2차 가우스-르장드르(Gauss-Legendre)적분법을 사용하였다. 비선형해석에서의 수렴조건은 정적해석과 동적해석 모두 오차(ϵ) < 0.0001로 하였다.

4.1 순수굽힘보의 정적해석

집중하중을 받고 있는 순수굽힘보의 형상과 유한요소 모델이 Fig. 4에 나타나 있다. 이 보를 각각 5개의 6절점과 8절점을 갖는 요소로 분할하여, 정적 선형해석과 비선형해석을 하였다. 그 결과를 Fig. 5에 나타내었다.

Fig. 5에서 보면 적분점을 수정한 경우가 수정하지 않은 경우보다, 선형 및 비선형에서, 8절점 요소의 해석결과와 더욱 잘 일치함을 알 수 있다. 또한 선형해석의 경우는 적분점을 수정한 경우가 이론해⁽¹³⁾와도 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 적분점을 수정하지 않은 경우는 변위가 작게 나타나 강성행렬이 과다 평가되었음을 알 수 있다.

4.2 단순지지보의 정적해석

집중하중을 받고 있는 단순지지보의 형상과 유한요소 모델을 Fig. 6에 나타 내었다. 이 보를 각각 6절점과 8절점을 갖는 요소로 분할하여, 정적 선형해석과, 비선형해석을 하여 그 결과를 Fig. 7에 나타내었다. 아울러 Fig. 6과 같은 모델에 균일 분포하중이 작용하는 경우에 있어서도 정적 선형해석

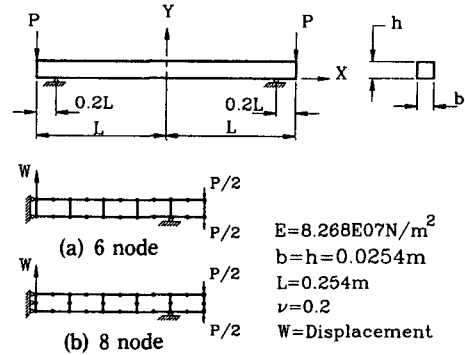


Fig. 4 Geometry and finite element model of pure bending beam

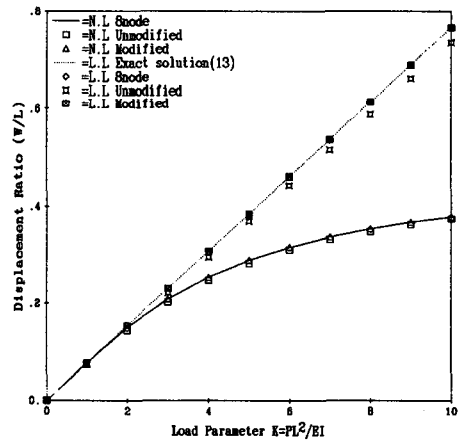


Fig. 5 Static linear and nonlinear displacements of a pure bending beam under concentrated load

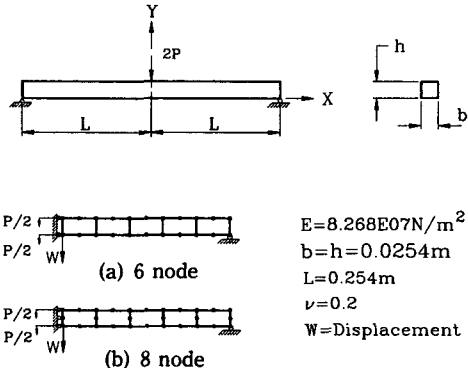


Fig. 6 Geometry and finite element model of a simply-supported beam under concentrated load

과 비선형해석을 수행하고, 그 결과를 Fig. 8에 나타내었다.

Fig. 7과 Fig. 8에서 보면 적분점을 수정한 경우가 수정하지 않은 경우보다, 집중하중조건에서나 균일 분포하중조건 모두에서, 8절점 요소의 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있으며, 또한 선형해석의 경우는 적분점을 수정한 경우가 이론해⁽¹³⁾와도 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

4.3 내다지보의 정적해석

집중하중을 받고 있는 내다지보의 형상과 유한

요소 모델을 Fig. 9에 나타내었다. 이 보를 각각 5개의 6절점과 8절점을 갖는 요소로 나누어 정적 선형해석과 비선형해석을 하였으며, 그 결과를 Fig. 10에 나타내었다. 또한 같은 모델에 균일 분포하중이 작용하는 경우에서도 정적 선형해석과 비선형해석을 수행하여 그 결과를 Fig. 11에 나타내었다.

Fig. 10과 Fig. 11에서 보면 적분점을 수정한 경우가 수정하지 않은 경우보다, 집중하중조건에서나 균일 분포하중조건 모두에서, 8절점 요소의 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있으며, 또한 선형해석의 경우는 적분점을 수정한 경우가 이론해⁽¹³⁾와도 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

4.4 예 1의 동적해석

정적 문제 1의 형상과 유한요소모델에 대하여 동적 선형 및 비선형해석을 하였다. 수치계산에 사용한 시간증분 Δt 의 크기는 $1.02 E-04$ sec이다.

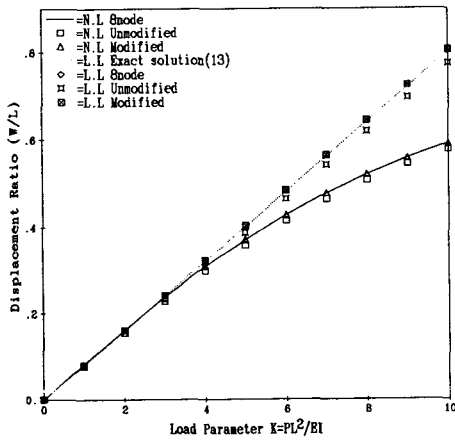


Fig. 7 Static linear and nonlinear displacements of simply-supported beam under concentrated load

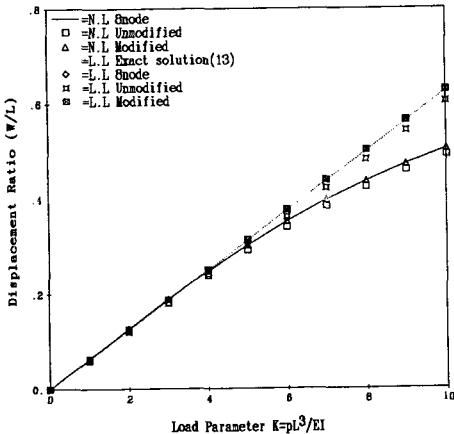


Fig. 8 Static linear and nonlinear displacements of a simply-supported beam under uniformly distributed load

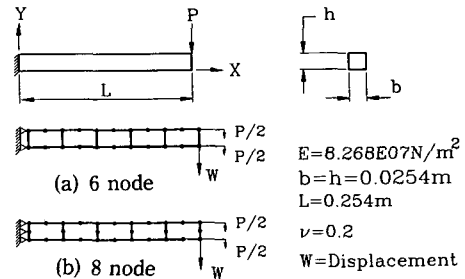


Fig. 9 Geometry and finite element model of a cantilever beam under concentrated load

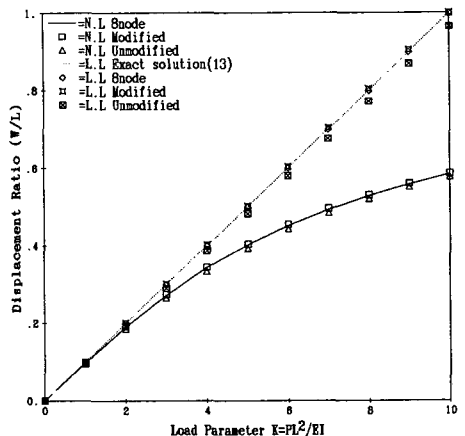


Fig. 10 Static linear and nonlinear displacements of a beam under concentrated load

변위와 시간증분과의 관계를 무차원화시켜, 선형 해석의 경우는 Fig. 12, 비선형해석의 경우는 Fig. 13에 나타내었다.

Fig. 12와 Fig. 13에서 보면 적분점을 수정한 경우가 수정하지 않은 경우보다, 선형해석 및 비선형 해석결과 모두에서, 8절점 요소의 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 그리고 적분점을 수정하지 않은 경우는 변위와 주기가 작게 나타나 강성행렬이 과다하게 평가되었음을 알 수 있다.

4.5 예 2의 동적해석

정적 문제 2와 같은 형상과 유한요소모델에 대하

여 동적 선형 및 비선형해석을 하였다. 수치계산에 사용한 시간증분 Δt 의 크기는 $1.61 E-04$ sec이다.

Fig. 6의 유한요소 모델에 대한 동적 선형 및 비선형해석 결과를 변위와 시간증분과의 관계를 무차원화시켜 각 각 Fig. 14, Fig. 15에 나타내었다. 또한 균일 분포하중이 작용하는 경우에 있어서도 같은 해석을 한 결과를 각 각 Fig. 16, Fig. 17에 나타내었다.

Fig. 14, Fig. 15, Fig. 16 및 Fig. 17에서 보면 적분점을 수정한 경우가 수정하지 않은 경우보다, 집중하중조건에서나 균일 분포하중조건 모두에서, 8절점 요소의 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

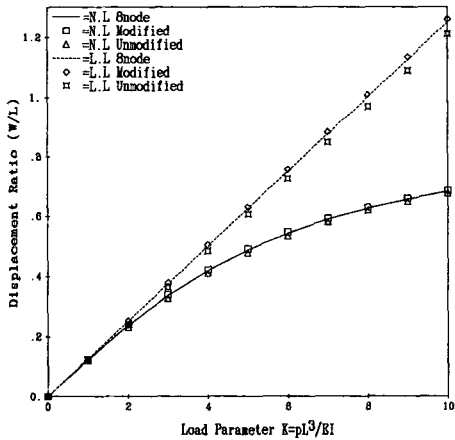


Fig. 11 Static linear and nonlinear displacements of a simply-supported beam under uniformly distributed load

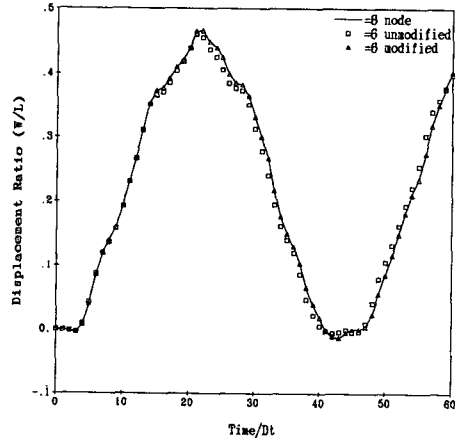


Fig. 13 Dynamic nonlinear displacements of a pure bending beam under concentrated load

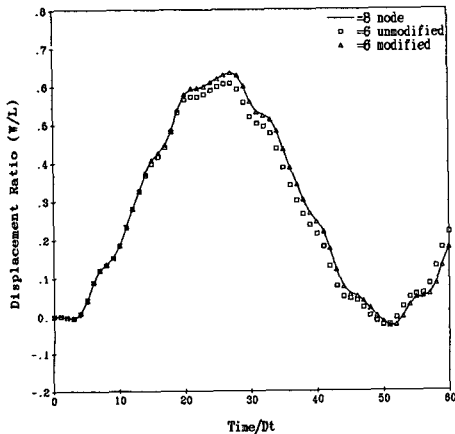


Fig. 12 Dynamic linear displacements of a pure bending beam under concentrated load

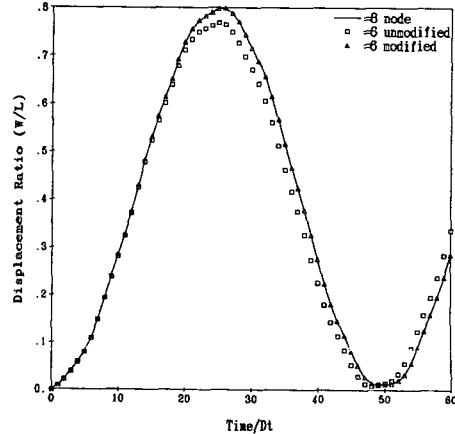


Fig. 14 Dynamic linear displacements of a simply supported beam under concentrated load

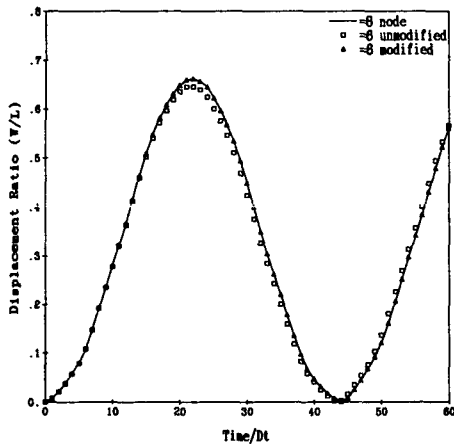


Fig. 15 Dynamic nonlinear displacements of a simply supported beam under concentrated load

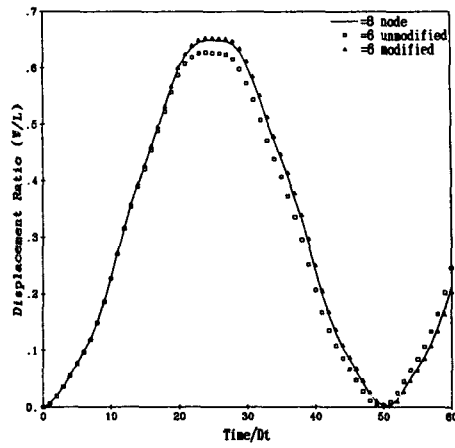


Fig. 18 Dynamic linear displacements of a cantilever beam under concentrated load

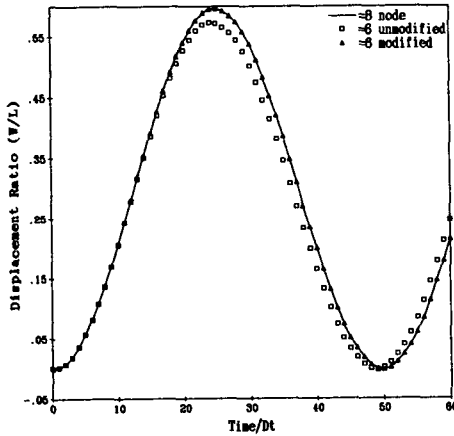


Fig. 16 Dynamic linear displacements of a simply supported beam under uniformly distributed load

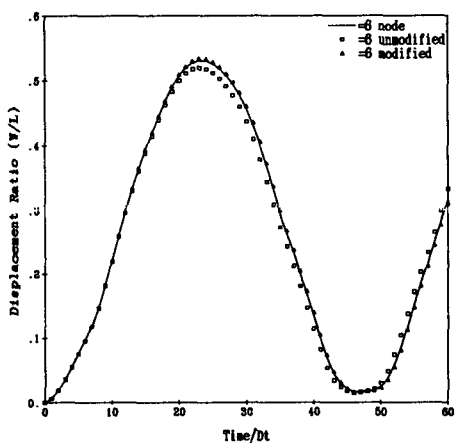


Fig. 19 Dynamic nonlinear displacements of a cantilever beam under concentrated load

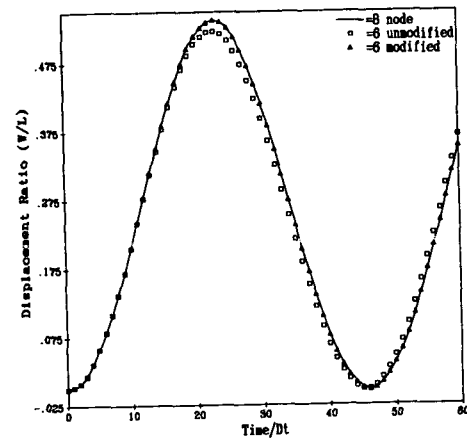


Fig. 17 Dynamic nonlinear displacements of a simply supported beam under uniformly distributed load

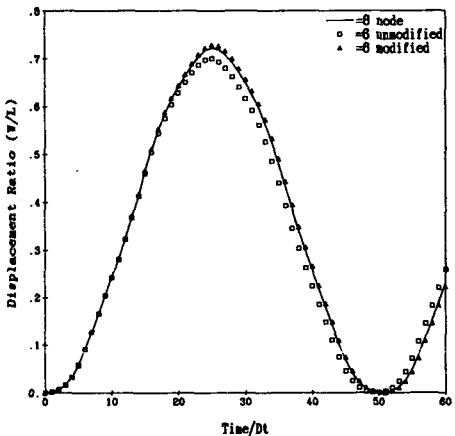


Fig. 20 Dynamic linear displacements of a cantilever beam under uniformly distributed load

4.6 예 3의 동적 해석

정적 문제 3과 같은 형상과 유한요소 모델에 대하여 동적 선형 및 비선형해석을 하였다. 수치계산에 사용한 시간증분 Δt 의 크기는 1.41×10^{-4} sec이다.

Fig. 9의 유한요소 모델에 대한 동적 선형해석과 비선형해석을 한 결과를, 변위와 시간증분과의 관계를 무차원화시켜 각각 Fig. 18, 19에 나타내었다. 또한 균일 분포하중이 작용하는 경우에 있어서도 같은 해석을 한 결과를 각각 Fig. 20, 21에 나타내었다.

Fig. 18, 19, 20 및 Fig. 21에서 보면 적분점을 수정한 경우가 수정하지 않은 경우보다, 집중하중

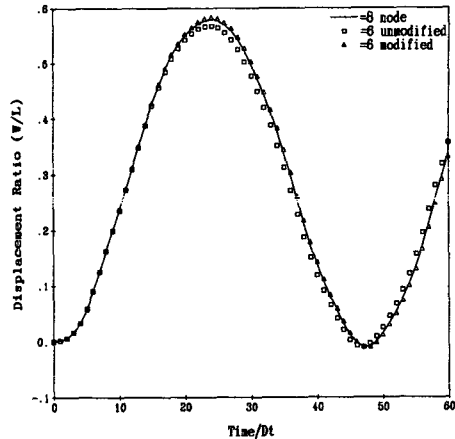


Fig. 21 Dynamic nonlinear displacements of a cantilever beam under uniformly distributed load

Table 1 Summary of the errors of modified 6-node and unmodified 6-node models with respect to 8-node models(unit : %)

Types of beam	Load conditions	Kinds of analysis		Unmodified model	Modified model
Pure bending Beam	Concentrated	Static	Linear	4.0	0.03
			Nonlinear	2.0	0.04
		Dynamic	Linear	3.8	0.08
			Nonlinear	2.1	0.05
Simply Supported beam	Concentrated	Static	Linear	4.0	0.01
			Nonlinear	2.8	0.02
		dynamic	Linear	3.9	0.02
			Nonlinear	2.6	0.02
	Uniformly distributed	Static	Linear	3.9	0.01
			Nonlinear	3.0	0.03
		dynamic	Linear	3.9	0.02
			Nonlinear	2.9	0.08
Cantilever Beam	Concentrated	Static	Linear	3.8	0.04
			Nonlinear	3.0	0.03
		Dynamic	Linear	3.3	0.64
			Nonlinear	2.1	0.49
	Uniformly Distributed	Static	Linear	3.1	0.82
			Nonlinear	2.2	0.66
		Dynamic	Linear	3.6	0.72
			Nonlinear	2.1	0.63

조건에서나 균일 분포하중조건 모두에서, 8절점 요소의 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

4.7 고찰

식(34)에 의해 $\nu=0.2$ 일 때의 두께방향으로의 적분점 수정량을 수치계산에 적용하여, 순수굽힘보와 단순지지보 및 내다지보 문제에 대해 정적 및 동적해석을 한 결과를 각각 8절점 보요소의 결과와의 오차에 대한 백분율로 Table 1에 나타내었다. 이 때 변위 백분율의 기준은 정적해석인 경우는 하중계수가 7일 때이고, 동적 해석인 경우는 최대 변위를 중심으로 $\pm \Delta t$, $\pm 2\Delta t$ 시간 구간에서의 6절점 요소와 8절점 요소와의 변위차에 대한 절대치의 평균값을 나타낸다.

Table 1에서 알 수 있듯이 식(27)에 의한 적분점 수정을 한 계산결과는 수정하지 않은 결과 보다 8절점 보요소의 결과와 잘 일치함을 알 수 있어 강성행렬의 평가가 보다 개선되었음을 볼 수 있다. 한편 이 요소는 patch test를 통과하였으며, 6절점 요소를 사용함으로 나타날 수 있는 spurious zero energy mode는 참고문헌(14)에서와 같이 없음이 밝혀졌다.

5. 결 론

자유도를 줄이기 위하여 8절점 요소 대신 6절점 요소를 사용하여 굽힘문제를 해석할 때 발생하는 상대적 강성강화를 줄이기 위해 6절점 요소에서의 가우스적분점 수정식을 유도하였다. 같은 형상의 6절점 요소와 8절점 요소의 변형에너지가 동일하다는 전제하에서 구한 가우스적분점의 수정을 6절점에서의 순수굽힘보와 단순지지보 및 내다지보 등의 정적 및 동적 선형해석과 비선형해석에 적용하여 그 실효성을 확인하였다.

몇 가지 모델에 대해 실제 적용을 해본 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 굽힘응력을 받고 있는 평면응력상태의 6절점 평면요소의 수치적분시 적용하는 가우스적분점의 두께방향으로의 수정점은 정적인 경우나 동적인 경우 모두 $S_{6j}=S_{8j}(1-\nu^2)^{1/2}$ 이 적합하다.

(2) (1)항의 수정식을 실제 정적인 문제의 수치 계산에 적용한 결과 보의 경계조건에 따라 다르지만, 최소 0.01%, 최대 0.82% 정도의 오차로 잘 일치함을 알 수 있다.

(3) (1)항의 수정식을 실제 동적인 문제의 수치 계산에 적용한 결과 보의 경계조건에 따라 다르지만, 최소 0.02%, 최대 0.72% 정도의 오차로 잘 일치함을 알 수 있다.

후 기

본 논문은 한국과학재단의 1991/1992년도 목적기초 연구비 지원에 의하여 이루어진 것으로서 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) 정래훈, 1990, "4-9절점 Isoparametric 요소의 Beam 문제에 대한 적용," 경북대학교 대학원 석사학위 논문.
- (2) Ausserer, M. F. and Lee, S. W., 1988, "An Eighteen Node Solide Element for Thin Shell Analysis," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 26.
- (3) Kim, Y. H. and Lee, S. W., 1988, "A Solid Element Formulation for Large Deflection Analysis of Composite Shell Structures," Computer & Structures, Vol. 30, No. 1/2.
- (4) Wood, R. D. and Zienkiewicz, O. C., 1976, "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams Frames, Arches and Axisymmetric Shells," Computer & Structures, Vol. 7, pp. 7325~7354.
- (5) Bathe, K. J. and Bolourchi, S., 1980, "A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element," Computer and Structures, Vol. 11.
- (6) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (7) Belytschko, T., Liu, W. K., J. Ong, S. J. and Lam, D., 1985, "Implementation and Application of a 9-Node Lagrange Shell Element with Spurious Mode Control," Computer & Structures, Vol. 20, No. 1~3.
- (8) Surana, K. S., 1983, "Geometrically Nonlinear Formulation for the Curved Shell Element," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 19.
- (9) 권영두, 1987, "초기응력이 있는 탄성체의 선

- 형 및 비선형해석," 과학재단 연구보고서.
- (10) 김정운, 권영두, 1991, "특이 경계조건을 갖는 보의 동적 비선형해석," 대한기계학회논문집 제15권 제3호, pp. 799~808.
- (11) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedure in Engineering Analysis*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- (12) Bathe, K. J., Ramm, E. and Wilson, L. E., 1975, "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 9, pp. 353~386.
- (13) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1972, "Mechanics of Materials," Van Nostrand Reinhold Company.
- (14) 김정운, 권영두, 1993, "가우스적분점 수정을 이용한 6-절점 2차원, 16-절점 3차원 요소의 자유진동해석," 대한기계학회 추계학술대회 논문집 (I), pp. 20~23.