

〈論 文〉

곡률 곡선보요소에 의한 곡선보의 고유치문제 해석

양승용*.신호철**

(1993년 4월 13일 접수)

The Analysis of Eigenvalue Problems of Curved Beam Using Curvature-Based Curved Beam Elements

Seung-Yong Yang and Hyo-Chol Sin

Key Words : Curvature-Based Curved Beam Element(곡률기저 곡선보요소), Modified Curved Beam Element(수정 곡선보요소), Stiffness Locking Phenomenon(강성과잉현상)

Abstract

Curved beam element has received attention because of its own usefulness and its bearing on general curved elements like shells. In conventional curved beam elements stiffness matrix is overestimated and eigensolutions are poor. To avoid this phenomenon it is necessary to use a large number of elements and, as a result, the total number of degrees of freedom is increased. In this paper the two-noded, with three degrees of freedom at each node, in-plane curvature-based curved beam element is employed in eigen-analysis of curved beam. It is shown that the curvature-based beam element is very efficient in vibration analysis and also that it is applicable to both thin and thick curved beams.

1. 서 론

보, 평판 또는 구각과 같은 구조요소를 사용하여 구조물을 해석하면 일반적인 2차 혹은 3차원 연속체 요소를 사용하는 경우보다 경제적으로 해석을 수행할 수 있고 구조물이 대형화되면 그 장점은 더욱 커진다. 특히 곡선보는 자체로도 유용하게 사용될 뿐 아니라 곡선보요소의 특성을 갖는 셀과 같은 일반적인 곡선요소 해석시 발생하는 문제점을 해결하기 위해 관심의 대상이 되고 있다.

변위와 회전에 대해 각각 독립적인 동일차수의 보간함수를 사용하면 복잡한 요소의 사용을 피하고 오직 연속조건만을 충족시키는 간단한 보간함수를 사용할 수 있는 장점이 있다. 그러나 연속조건만을

충족시키는 전통적인 요소를 사용하면 강성이 실제 값보다 크게 계산되어 변위 및 고유치에 오차를 발생시킨다. 이러한 현상을 강성과잉현상이라 하며 이 때의 오차는 요소의 크기를 작게 하여도 쉽게 없어지지 않는다.⁽¹⁾ 보의 강성과잉현상을 해결하기 위해 제시된 대표적인 방법으로는 감차적분법과^(2,3) Hybrid and Mixed Method⁽⁴⁾ 등이 있고 Prathap은 강성과잉현상에 대한 새로운 관점에서의 연구⁽⁵⁾를 시도하기도 하였다.

한편, 국내에서 전단효과와 회전관성을 고려한 곡선보요소를 이용하여 얇은 아치의 평면 자유진동을 해석한 연구결과가 발표된 바 있다.⁽⁶⁾ 이 논문은 Prathap의 견해와 같이 강성과잉현상의 원인을 잘못된 형상함수에 의한 가성구속으로 보고 새로운 형상함수를 구하고, 이로부터 강성과잉현상을 완화한 결점당 3개의 자유도를 가진 3결점 곡선보 요소를 수식화하였다.

*서울대학교 기계설계학과 대학원

**정회원, 서울대학교 기계설계학과

본 논문에서는 주변수인 변위를 보간한 다음 다른 변수들은 변위를 미분함으로써 얻던 기존의 방법과 달리 곡선보의 굽힘에너지를 잘 기술할 수 있도록 곡률을 주 고려대상으로 삼아 나머지 변수들은 이를 적분하여 얻고, 전단에너지와 막에너지는 계의 평형방정식을 고려함으로써 얻는다. 그 전개 과정이 간단하고 많이 쓰이는 2절점 곡선보요소를 정식화하고, 아치의 동적거동을 해석하여 기존의 방법으로 구한 결과와 비교하고 해석이 보다 효율적으로 수행될 수 있음을 보였다.

2. 지배방정식

Fig. 1과 같은 평면 곡선보에서 접선변위를 U , 법선변위를 V , 회전각을 θ , 그리고 u, v, θ 를 중립면에서의 각각의 값이라 하면 변위성분은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta(x, y, t) &= \theta(x, t) \\ U(x, y, t) &= u - y\theta(x, t) \\ V(x, y, t) &= v(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

이로부터, 곡률반경에 비해 두께가 얇은 곡선보의 변형률 성분은 Fig. 2를 참조하면 다음과 같이 표시되며⁽⁹⁾

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{v}{R} = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{v}{R} \\ &= \epsilon - y \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \theta + \frac{U}{R} = \frac{\partial v}{\partial x} - \theta + \frac{1}{R}(u - y\theta) \\ &= \gamma - \frac{y}{R}\theta \end{aligned}$$

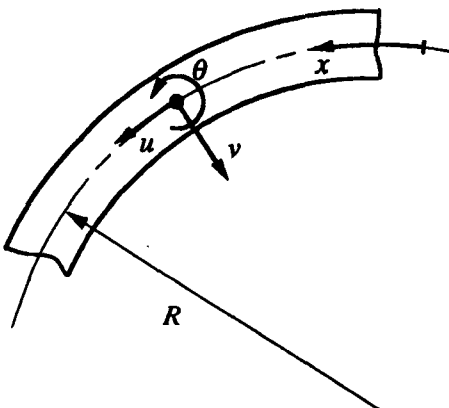


Fig. 1 Kinematic variables in curved beam

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2)$$

이에 상응하는 응력성분들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= E\epsilon_{xx} \\ \tau_{xy} &= G\epsilon_{xy} \end{aligned} \quad (5)$$

한편, 보의 운동에너지는 다음과 같으며

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^L \rho \dot{U}_i \dot{U}_i dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^L \rho \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}(u - y\theta) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (4)$$

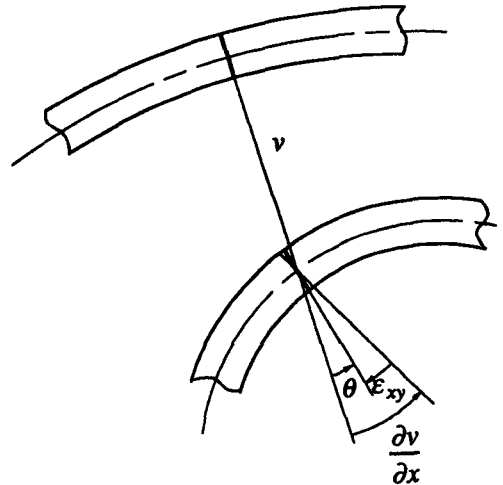
보의 총 포텐셜은 다음과 같다.

$$\pi = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \kappa^2 + \frac{kGA}{2} \gamma^2 + \frac{EA}{2} \epsilon^2 - m\theta - pu - qv \right] dx \quad (5)$$

여기서 k 는 전단응력 보정계수이다.

식(4), (5)를 이용하여 Hamilton정리를 적용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\frac{1}{2} \left[\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] \right]$$



$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x} - \epsilon_{xy} + \frac{U}{R}$$

Fig. 2 Deformation of cross section in curved beam

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \theta = \frac{\partial v}{\partial x} - \epsilon_{xy} + \frac{U}{R}$$

$$= -\frac{EI}{2}\kappa^2 - \frac{kGA}{2}\gamma^2 - \frac{EA}{2}\varepsilon^2 + m\theta + pu + qv \Big\} dx dt \quad \frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{N}{R} = 0 \quad (12)$$

$$= 0 \quad (6)$$

이산화하기 위해 식(6)의 첫째, 둘째, 세째항을 t 에 대해서 부분적분을 취하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -\frac{\partial}{\partial t}(\rho A \dot{u}) \delta u - \frac{\partial}{\partial t}(\rho I \dot{\theta}) \delta \theta - \frac{\partial}{\partial t}(\rho A \dot{v}) \delta v \right. \\ \left. - EI \kappa \delta \kappa - kGA \gamma \delta \gamma - EA \varepsilon \delta \varepsilon + m \delta \theta + q \delta v + p \delta u \right\} dx dt \\ + \int_0^L \rho A \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_0^L \rho I \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_0^L \rho A \frac{\partial v}{\partial t} \delta v \Big|_{t_1}^{t_2} dx \\ = 0 \quad (7)$$

상수계수를 가정하면, 식(7)이 시간구간에서 항상 성립되기 위해서 다음 조건을 만족해야 한다.

$$\int_0^L \left[p A \dot{u} \delta u + \rho I \ddot{\theta} \delta \theta + \rho A \dot{v} \delta v \right. \\ \left. + EI \kappa \delta \kappa + kGA \gamma \delta \gamma + EA \varepsilon \delta \varepsilon \right] dx \\ = \int_0^L [m \delta \theta + p \delta u + q \delta v] dx \quad (8)$$

3. 2절점 곡률기저 곡선보 유한요소의 정식화

곡선보의 정적해석을 위한 곡률 곡선요소는 이미 정식화되었고⁽⁷⁾ 이를 보의 진동해석을 위해 확장하면 다음과 같다.

먼저 힘의 평형조건으로부터 모멘트, 전단력, 그리고 인장력을 구하면 다음과 같다.

$$M_b = M_z = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xx} y b dy \\ = - \int_{-h/2}^{h/2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{v}{R} \right) y b dy \\ = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ = EI \kappa \quad (9)$$

$$V_s = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} b dy \\ = GAk \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta + \frac{u}{R} \right) \\ = GAk \gamma \quad (10)$$

$$N = EA \varepsilon \quad (11)$$

미소길이 dx 에 대해 성립하는 계의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial M_b}{\partial x} + V_s = 0$$

식(11)을 식(12)에 대입하면 다음과 같다.

$$\varepsilon = \frac{IR}{A} \kappa_{,xx} \\ \gamma = -\frac{EI}{GAk} \kappa_{,x} = -\alpha \kappa_{,x} \quad (13)$$

여기서 ' x '는 x 에 대한 미분을 나타낸다. 곡선보의 두께가 얇아질 때 α 는 0에 수렴하므로 전단력의 값 또한 작아짐을 알 수 있다.

회전각 θ 는 곡률을 적분함으로써 구해진다.

$$\theta = \int_0^x \kappa dx + C_0 \quad (14)$$

C_0 는 적분상수로서 경계조건으로부터 구할 수 있다.

식(13)을 식(2)에 대입하여 연립하면 범선변위의 다음과 같은 2계 미분방정식을 얻는다. 즉,

$$\gamma = -\frac{EI}{GAk} \kappa_{,x} = v_{,x} - \theta + \frac{u}{R} \\ \varepsilon = \frac{IR}{A} \kappa_{,xx} = u_{,x} - \frac{v}{R} \\ -\frac{EI}{GAk} \kappa_{,xx} = v_{,xx} - \kappa + \frac{1}{R} \left(\frac{IR}{A} \kappa_{,xx} + \frac{v}{R} \right) \\ v_{,xx} + \frac{1}{R^2} v = \kappa - \left(\frac{EI}{GAk} + \frac{I}{A} \right) \kappa_{,xx} \quad (15)$$

식(15)의 해는 일반해와 특수해로 이루어지는데 일반해의 두개의 상수는 경계조건에 의해 결정되며, 특수해는 곡률의 함수로, 곡률이 보간되는 형태에 의존한다.

$$v(x) = v^h + v^p \\ v^h = C_{v1} \cos \frac{x}{R} + C_{v2} \sin \frac{x}{R} \quad (16)$$

한편, 식(2)와 (13)으로부터 u 에 대한 다음과 같은 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$u = R \left(\theta - v_{,x} - \frac{EI}{GAk} \kappa_{,x} \right) \quad (17)$$

이제 Fig. 3의 3절점 곡선보에서 2차 함수를 이용하여 κ 를 보간하면 다음과 같다.

$$\kappa = \mathbf{H}_\kappa \mathbf{V} \quad (18)$$

여기서,

$$\mathbf{H}_\kappa = \left(h_1^\kappa \quad h_2^\kappa \quad h_3^\kappa \right)$$

$$V = (k_1 \ k_2 \ k_3)^T$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$h_1^k = 1 - 3\frac{x}{L} + 2\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$h_2^k = -\frac{x}{L} + 2\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$h_3^k = 4\frac{x}{L} - 4\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

식(14)로부터 회전각은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\theta = H_\theta V + C_\theta \tag{19}$$

여기서,

$$H_\theta = (h_1^\theta \ h_2^\theta \ h_3^\theta)$$

$$h_1^\theta = L \left\{ \frac{x}{L} - 3\frac{\left(\frac{x}{L}\right)^2}{2} + \frac{2\left(\frac{x}{L}\right)^3}{3} \right\}$$

$$h_2^\theta = L \left\{ -\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x}{L}\right)^2}{L} + \frac{2\left(\frac{x}{L}\right)^3}{3} \right\}$$

$$h_3^\theta = L \left\{ 2\frac{\left(\frac{x}{L}\right)^2}{L} - \frac{4\left(\frac{x}{L}\right)^3}{3} \right\}$$

또한 법선변위는 식(16)의 v^p 를 식(15)로부터 구하여 정리하면 다음과 같다.

$$v(x) = H_{vp} V + C_{v1} \cos \frac{x}{R} + C_{v2} \sin \frac{x}{R} \tag{20}$$

단,

$$H_{vp} = (h_1^{vp} \ h_2^{vp} \ h_3^{vp})$$

$$h_1^{vp} = R^2 \left\{ 1 - \lambda - 3\frac{x}{L} + 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right\}$$

$$h_2^{vp} = R^2 \left\{ -\lambda - \frac{x}{L} + 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right\}$$

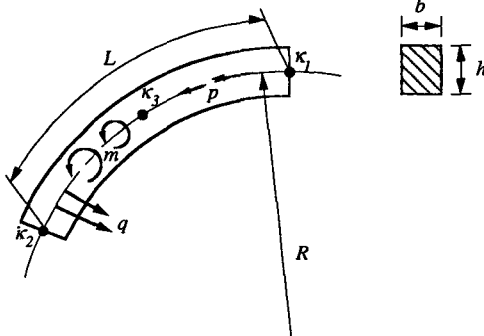


Fig. 3 Nodal curvatures and applied loads in a constant curvature curved beam element

$$h_3^{vp} = R^2 \left\{ 2\lambda + 4\frac{x}{L} - 4\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right\}$$

$$\lambda = \frac{4}{L^2} \left(\frac{EI}{GAk} + \frac{I}{A} + R^2 \right)$$

마지막으로 식(18, 19, 20)을 식(17)에 대입하여 접선방향변위를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$u = H_u V + RC_\theta + C_{v1} \sin \frac{x}{R} - C_{v2} \cos \frac{x}{R} \tag{21}$$

단,

$$H_u = (h_1^u \ h_2^u \ h_3^u)$$

$$h_1^u = RL \left\{ \frac{3}{4}\mu + (1-\mu)\frac{x}{L} - \frac{3}{2}\frac{\left(\frac{x}{L}\right)^2}{L} + \frac{2\left(\frac{x}{L}\right)^3}{3} \right\}$$

$$h_2^u = RL \left\{ \frac{1}{4}\mu - \mu\frac{x}{L} - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x}{L}\right)^2}{L} + \frac{2\left(\frac{x}{L}\right)^3}{3} \right\}$$

$$h_3^u = RL \left\{ -\mu + 2\mu\frac{x}{L} + 2\frac{\left(\frac{x}{L}\right)^2}{L} - \frac{4\left(\frac{x}{L}\right)^3}{3} \right\}$$

$$\mu = \frac{4}{L^2} \left(\frac{EI}{GAk} + R^2 \right)$$

이제 위에서 구한 변위장을 이용하여 절점에서의 변위들을 구하고 강체운동성분을 제거하여 절점에서의 변위와 곡률사이의 변환행렬을 구해보자. Fig. 3의 3절점 곡선보요소를 Fig. 4의 양단변위값 6개를 가진 2절점 곡선보요소로 등가적인 변환을 할 수 있다. 양단절점에서 각각 회전각, 접선변위, 법선변위로 변수를 잡은 것은 이러한 변수들이 기본 곡선보요소의 절점의 변수와 동일하기 때문이다. 양단의 절점에서 변위값은 식(19, 20, 21)로부터 다음과 같다.

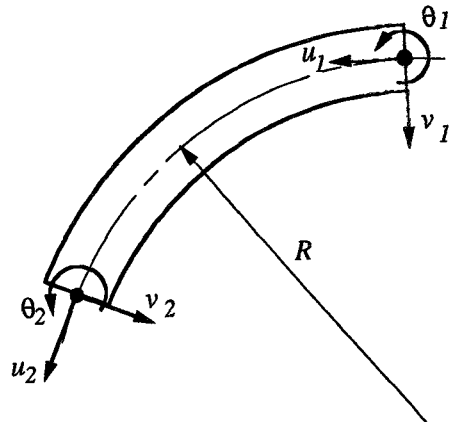


Fig. 4 Nodal displacements equivalent to the three nodal curvatures in a 2-noded curved beam element

$$\begin{aligned} v_1 &= H_{vp} \Big|_{x=0} V + C_{v1} \\ u_1 &= H_u \Big|_{x=0} V + RC_\theta - C_{v2} \\ \theta_1 &= H_\theta \Big|_{x=0} V + C_\theta = C_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= H_{vp} \Big|_{x=L} V + C_{v1} \cos \frac{L}{R} + C_{v2} \sin \frac{L}{R} \\ u_2 &= H_u \Big|_{x=L} V + RC_\theta + C_{v1} \sin \frac{L}{R} - C_{v2} \cos \frac{L}{R} \\ \theta_2 &= H_\theta \Big|_{x=L} V + C_\theta \end{aligned}$$

이들 절점값 사이에 포함되어 있는 강제운동성분을 제거하면 3개의 곡률과 6개의 변위사이의 관계를 변환행렬을 매개로 해서 나타낼 수 있다. 이러한 과정은 복잡하게 주어지는 일반적인 경계조건을 처리하기 위해 임의의 요소에서의 3개의 적분상수를 일일이 결정하지 않고도 요소내의 모든 상태를 결정할 수 있게 해 준다. 강제운동과 관련된 C_{v1} , C_{v2} , C_θ 등의 상수를 소거하여 강제운동성분을 제거하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} v_2 - \left(v_1 \cos \frac{L}{R} - u_1 \sin \frac{L}{R} + \theta_1 R \sin \frac{L}{R} \right) \\ = \left(H_{vp} \Big|_{x=L} - H_{vp} \Big|_{x=0} \cos \frac{L}{R} + H_u \Big|_{x=0} \sin \frac{L}{R} \right) V \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} u_2 - \left\{ v_1 \sin \frac{L}{R} + u_1 \cos \frac{L}{R} + \theta_1 R \left(1 - \cos \frac{L}{R} \right) \right\} \\ = \left(H_u \Big|_{x=L} - H_{vp} \Big|_{x=0} \sin \frac{L}{R} - H_u \Big|_{x=0} \cos \frac{L}{R} \right) V \end{aligned} \quad (23)$$

$$\theta_2 - \theta_1 = H_\theta \Big|_{x=L} V \quad (24)$$

위 세식을 행렬로 정리하면 다음과 같다.

$$T_x V = T_v U \quad (25)$$

단,

$$\begin{aligned} u &= (v_1 \ u_1 \ \theta_1 \ v_2 \ u_2 \ \theta_2)^T \\ T_x &= \begin{bmatrix} H_{vp} \Big|_{x=L} - H_{vp} \Big|_{x=0} \cos \frac{L}{R} + H_u \Big|_{x=0} \sin \frac{L}{R} \\ H_u \Big|_{x=L} - H_{vp} \Big|_{x=0} \sin \frac{L}{R} - H_u \Big|_{x=0} \cos \frac{L}{R} \\ H_\theta \Big|_{x=L} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$T_v = \begin{bmatrix} -\cos \frac{L}{R} & \sin \frac{L}{R} & -R \sin \frac{L}{R} & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \frac{L}{R} & -\cos \frac{L}{R} & -R \left(1 - \cos \frac{L}{R} \right) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서 3절점 사이의 곡률값과 양단의 변위값을 이 어주는 변환행렬을 다음과 같이 구할수 있다.

$$V = T U \quad (26)$$

단,

$$T = T_x^{-1} T_v$$

위의 변환행렬을 이용하여 각각의 변위장을 양단의 절점변위로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \kappa &= S_x U \\ \theta &= S_\theta U \\ v &= S_v U \\ u &= S_u U \end{aligned} \quad (27)$$

여기서

$$\begin{aligned} S_x &= H_x T \\ S_\theta &= H_\theta T + H_{\theta 0} \\ S_v &= \left(H_{vp} - H_{vp} \Big|_{x=0} \cos \frac{x}{R} + H_u \Big|_{x=0} \sin \frac{x}{R} \right) T + H_{v0} \\ S_u &= \left(H_u - H_{vp} \Big|_{x=0} \sin \frac{x}{R} - H_u \Big|_{x=0} \cos \frac{x}{R} \right) T + H_{u0} \\ H_{\theta 0} &= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \\ H_{v0} &= \left(\cos \frac{x}{R} \ -\sin \frac{x}{R} \ R \sin \frac{x}{R} \ 0 \ 0 \ 0 \right) \\ H_{u0} &= \left(\sin \frac{x}{R} \ \cos \frac{x}{R} \ R - R \cos \frac{x}{R} \ 0 \ 0 \ 0 \right) \end{aligned}$$

위의 관계를 이용하여 요소의 질량행렬, 강성 행렬 및 하중벡터를 구하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^e &= \int_0^L (\rho A S_u^T S_u + \rho I S_\theta^T S_\theta + \rho A S_v^T S_v) dx \\ K^e &= \int_0^L (E I S_x^T S_x + E I a S_B^T S_B + E I \beta S_c^T S_c) dx \\ R^e &= \int_0^L (m S_d^T + p S_u^T - q S_v^T) dx \\ U^e &= (v_1 \ u_1 \ \theta_1 \ v_2 \ u_2 \ \theta_2)^T \\ a &= \frac{E I}{G A k} \\ \beta &= \frac{I R^2}{A} \\ S_B &= \frac{\partial}{\partial x} S_x \end{aligned}$$

$$S_c = \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_k \quad (28)$$

따라서 식(8)은 다음과 같은 행렬식으로 표현된다.

$$M\ddot{U} + KU = R \quad (29)$$

여기서,

$$U = (v_1 \ u_1 \ \theta_1 \ \dots \ v_q \ u_q \ \theta_q)^T$$

$$M = \sum_i M_i^e$$

$$K = \sum_i K_i^e$$

$$R = \sum_i R_i^e$$

4. 해석 결과 및 고찰

Fig. 5와 같은 양단이 고정된 90° 아치에 대하여 전단효과와 회전관성을 고려하여 고유치를 구하였다. Fig. 6부터 Fig. 8은 두께 대 반경의 비가 0.01 인 얇은 아치에 대하여 곡률기저 곡선보요소를 사용하여 제1, 제2, 제3 고유치를 구한 결과와 참고 문헌 6의 수정보간함수(modified interpolation function)에 의한 곡선보요소를 사용하여 구한 결과를 비교한 것이다. 그림에서 볼 수 있듯이 곡률기저 곡선보요소의 결과는 해석해에 빨리 수렴하

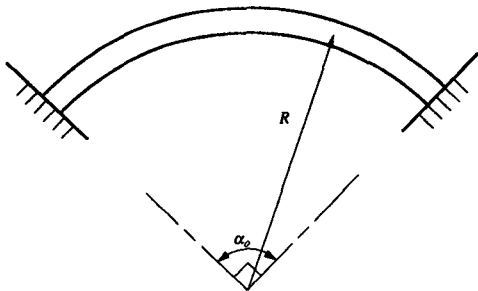


Fig. 5 Geometry of clamped-clamped arch

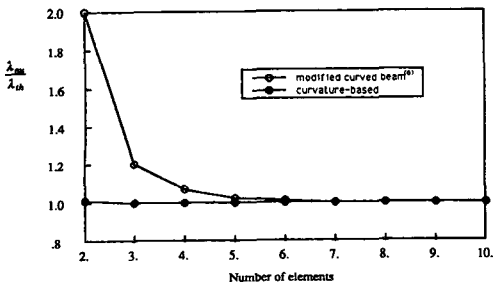


Fig. 6 Comparison of the first eigenvalues

고, 두께가 얇아도 정확함을 알 수 있다. 이때 해석해 \$\lambda_{1h}\$로는 보가 매우 얇음을 고려하여 전단효과 및 회전관성을 무시한 굽힘모드(flexural mode)의 고유치⁽⁸⁾를 사용하였다. 곡률기저 곡선보요소는 고차의 요소이면서도 절점당 자유도가 3개인 2절점 요소이나 수정 곡선보요소는 절점당 자유도가 3개인 3절점 요소임을 고려할 때 곡률기저 2절점 곡선보요소가 더 효율적인 요소임을 알 수 있다.

Fig. 9와 Fig. 10은 Fig. 5와 같이 전단효과와 회전관성을 고려한 양단이 고정된 \$\alpha_0=90^\circ\$인 아치의

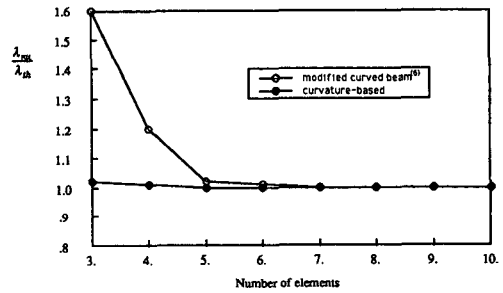


Fig. 7 Comparison of the second eigenvalues

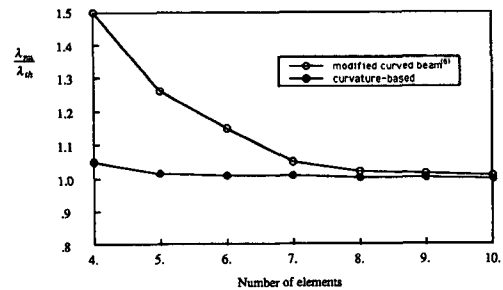


Fig. 8 Comparison of the third eigenvalues

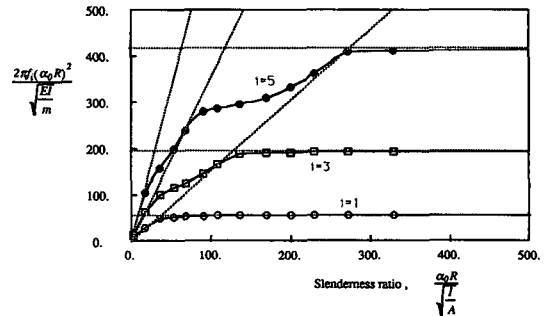


Fig. 9 Comparison of approximate antisymmetric modal natural frequencies(---) of a fixed-fixed \$\alpha_0=\pi/2\$ arc with results of the curvature based finite element(—)

고유진동수를 곡률보요소 10개를 써서 두께의 변화에 따라 예측한 것이다. 즉 Fig. 9의 실선은 아치의 중앙을 기준으로 x 방향변위 u 는 비대칭이고 법선변위는 v 는 대칭일 경우의 전단효과와 회전관성을 고려한 여러 두께의 아치의 고유진동수이고, Fig. 10의 실선은 u 가 대칭이고 v 가 비대칭일 경우의 고유진동수이다. 그림에서 i 는 실선의 고유진동수 번호를 나타낸다. 점선은 전단효과 및 회전관성을 고려하지 않을 경우의 해석해⁽⁸⁾로서 수평선은 굽힘모드(flexural mode)의 고유진동수를 나타내고 대각선은 신장-수축모드(extensional mode)의 고유진동수를 나타낸다. 예상한 바와 같이 실선은 두께가 두꺼울 경우 신장-수축모드의 고유진동수에 가깝고, 두께가 얇아짐에 따라 전단효과 및 회전관성의 영향이 감소하며 굽힘모드에 접근함을 볼 수 있다. 두께가 매우 얇은 $\frac{h}{R}=0.01$ 즉, 세장비가 544일 때 제1 고유진동수의 해석해는 53.12 rad/

sec이고 곡률보요소의 결과인 f_1 은 53.072 rad/sec로서 오차는 0.09%이다.

Fig. 11과 같이 양단이 단순지지된 Mindlin 아치의 α_0 가 $\frac{\pi}{4}$ 이고 두께대 반경의 비가 0.01인 얇은 보의 제1 고유진동수의 해석해는 참고문헌 8에 의하면 5.322 rad/sec이고 곡률 곡선보요소 10개를 사용한 결과는 5.319 rad/sec로서 0.04%의 오차를 나타낸다. 한편 제2 고유진동수의 경우는 0.07%의 오차를 나타낸다. α_0 가 π 일때는 제1 고유진동수에서 0.08%, 제2 고유진동수에서 1.2%의 오차를 보인다. 이상에서 알 수 있듯이 곡률 곡선보요소를 사용할 경우 두께가 얇아져도 오차는 매우 작으며, 얇은 아치의 굽힘모드를 잘 나타낼 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 요소당 2개의 절점을 갖는 곡률기저 곡선보요소를 곡률을 보간하고 보의 평형방정식을 고려하여 정식화하였다. 진동해석에서의 2절점 곡률기저 곡선보요소의 우수성을 보이기 위하여 Mindlin 아치의 고유치를 해석하였고 다음의 결론을 얻었다.

- (1) 자유도 개수를 고려할 때 곡률보요소가 수정 보간함수를 사용한 곡선보보다 효율적인 요소이다.
- (2) 보의 두께가 얇아져도 매우 정확한 결과를 얻을 수 있으며, 보의 두께에 관계없이 좋은 결과를 얻을 수 있다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 장기 기초연구과제(90-5-007) 지원에 의해 수행되었으며, 관계자 여러분께 심심한 감사를 표한다.

참고문헌

- (1) Walz, J. E., Cyrus, N. J. and Eppink, R. T., 1970, "Accuracy of Finite Element Approximations to Structural Problems," NASA TN-D 5728.
- (2) Prathap, G. and Bhashyam, G. R., 1982, "Reduced Integration and the Shear-flexible Beam Element," Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 18, pp. 195~210.

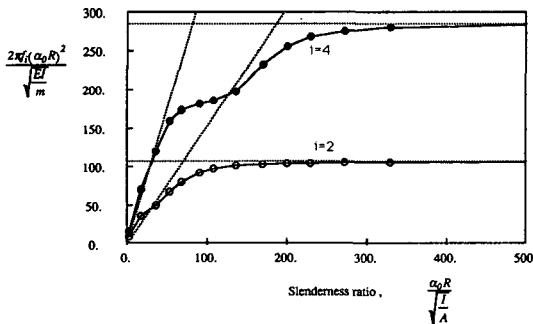


Fig. 10 Comparison of approximate symmetric modal natural frequencies(---) of a fixed-fixed $\alpha_0 = \pi/2$ arc with results of the curvature based finite element(—)

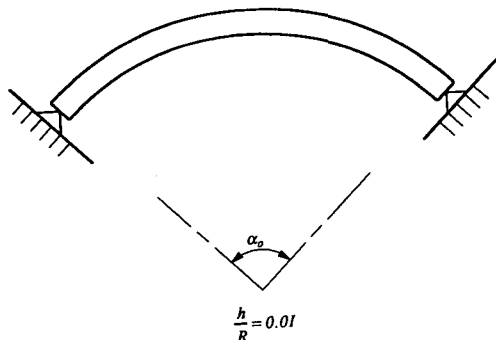


Fig. 11 Geometry of a pinned-pinned arch : Two cases of $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ and π are analyzed

- (3) Storarski, H. and Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements," Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 29~34.
- (4) Lee, S. W. and Pian, T.H.H., 1978, "Improvement of Plate and Shell Finite Elements by Mixed Formulations," AIAA J., Vol. 16, No. 1, pp. 29~34.
- (5) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 23, 1583-1600.
- (6) 민옥기, 김용우, 유동규, 1990, "곡선보의 강성과잉현상과 고유치에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제14권, 제2호, pp. 310~323.
- (7) 이팔갑, 1992, "강성과잉현상이 없는 곡률보 및 평판요소의 개발," 박사학위논문, 서울대학교.
- (8) Blevins, R. D. 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Company.
- (9) Day, R. A. and Potts, D. M., 1990, "Curved Mindlin Beam and Axi-symmetric Shell Elements-A New Approach," Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 30, pp. 1263-1274.